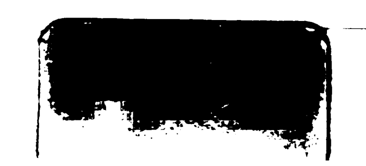




Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Elfter Jahrgang.

Mit 4 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1866.



1872, July 1.
Farrar Fund.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

Mechanik.

Optik.

Akustik.

Wärmelehre und Molecularphysik.

Elektricität und Magnetismus.

Vermischtes.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Das Wesen der Wärme. Versuch einer neuen Stoffanschauung der Wärme mit vergleichender Betrachtung der übrigen jetzt gebräuchlichen Wärmetheorien. In allgemein fasslicher Darstellung von Dr. PAUL REIS. Zweite bedeutend vermehrte Auflage. Leipzig, Quandt & Händel. 1865. 163 S. 8.

Die erste Auflage dieser Schrift erschien im Programm des Mainzer Gymnasiums von 1863—1864. Da dieselbe im Buchhandel häufig verlangt wurde, entschloss sich der Verfasser, dieselbe in erweiterter Form als selbstständiges Werk herauszugeben. — Die Anzahl der Versuche, aus molecularphysikalischen Hypothesen die Eigenschaften der Materie zu erklären, hat in den letzten Jahren in bedenklicher Weise überhand genommen; doch kann man nicht sagen, dass durch diese Fülle der Literatur wesentlich neue Gesichtspunkte zu Tage gefördert worden wären. Von der Mehrzahl dieser Schriften, welche in der Regel der dynamischen Wärmetheorie huldigen und ohne hinreichend sichere empirische Grundlagen Hypothesen über die Bewegungsformen der Körper- und Aetheratome aufstellen, welche den Erscheinungen der Wärme, der Elektricität, des Magnetismus entsprechen, unterscheidet sich der vorliegende Versuch wesentlich dadurch, dass er für die Hypothese des Wärmestoffes in die Schranken tritt, indem der Verfasser den freien, d. h. nicht durch die Anziehung der ponderablen Atome in deren Aetherhüllen gebundenen, Aether mit der Wärme und die Dichte des freien Aethers in den Intermolecularräumen mit der Temperatur identificirt. Der Verfasser bemerkt selbst in der Einleitung zu seiner Schrift, dass eine derartige Hypothese nur dann das Bürgerrecht in der Naturforschung beanspruchen kann, wenn die Erscheinungen aus derselben auf dem exacten Wege mathematischer Schlussfolgerungen abgeleitet werden. Leider aber hat der Verfasser diesen Weg nicht betreten, sondern sich nur der allgemeinen Verständlichkeit willen auf die „Erklärung mit Worten" beschränkt. Sehen wir also, wie weit es demselben auf diesem Wege gelungen ist, seine Aufgabe zu lösen.

Wenn es sich gegenwärtig um die Widerlegung der dynamischen Wärmetheorie und um die Darlegung einer Hypothese im Sinne der stofflichen Natur der Wärme handelt, so wird sich unsre Aufmerksamkeit naturgemäss darauf zu richten haben, wie sich die fragliche Hypothese denjenigen Erscheinungen gegenüber verhält, welche mit Recht als Fundamentalerscheinungen der mechanischen Wärmetheorie betrachtet werden, und welche derselben, als unerklärbar im Sinne der älteren Theorie, das jetzt ziemlich unbestrittene Uebergewicht über letztere verschafft haben. Als solche Fundamentalerscheinungen sind namentlich zu bezeichnen die von Joule nachgewiesene Thatsache, dass ein ohne Arbeitsleistung sich expandirendes Gas seine Temperatur nicht ändert, die Versuche von Rumford, Davy, Joule u. s. w. über die Erzeugung von Wärme durch Reibung ohne Verminderung der Wärmecapacität der geriebenen Körper, die Erscheinungen der Strahlung und der Absorption der Wärmestrahlen in ihrem Zusammenhange mit den Erscheinungen des Lichts.

Was zunächst die Erscheinungen der Wärmestrahlung betrifft, so äussert sich der Verfasser darüber in dem Kapitel über Sonnenwärme (S. 33) folgendermassen: „Wärme, Gluth ist frei werdender Aether; die Sonne „stösst also fortwährend nach allen Seiten Aether aus. Aether aber ist „wegen seiner nach allen Richtungen ausstrahlenden Abstossung absolute „Elektricität. Wenn nun in einer Reihe elastischer Kugeln, die einander „berühren, die erste einen Stoss erhält, so bleiben alle in Ruhe und nur die „letzte fliegt mit einer der Stosskraft entsprechenden Geschwindigkeit fort. „Ebenso ist der Weltraum mit Aether angefüllt, dessen Atome sich zwar „nicht direct berühren, aber mit ihren Abstossungsstrahlen, die ja unend- „lich dicht neben einander liegen, in einander greifen... Es müssen dem- „nach, wenn die Sonne uns aufgeht, Aetheratome in unsere Atmosphäre „hineingeschleudert werden, ohne dass der Aether des Weltraums vermehrt „wird; es sind ja nicht die von der Sonne ausgestrahlten, sondern die unse- „rer Atmosphäre nächsten Atome, welche in dieselbe eindringen, während „sie durch jene ersetzt werden...." Beim Durchlesen dieser Stelle muss es scheinen, als seien dem Verfasser die Erscheinungen der Interferenz und Polarisation der Wärmestrahlen, welche beweisen, dass die Wärme sich wie das Licht durch Transversalwellen fortpflanzt, und überhaupt alle Erscheinungen, welche der Ansicht, dass Wärmeerzeugung und Erleuchtung nur verschiedene Wirkungen derselben Aetherwellen seien, allgemeinen Eingang verschafft haben, gänzlich unbekannt geblieben. Das ist jedoch nicht der Fall. In einem späteren Kapitel (S. 69 u. ff.) werden nämlich die Beziehungen zwischen Wärme und Licht ausführlich besprochen und auf S. 98 wird insbesondere die Interferenz, Brechung, Doppelbrechung und Polarisation der Wärmestrahlen erwähnt. Die Durchsichtigkeit und die Diathermanität der Körper denkt sich der Verfasser von ihrem Gefüge nämlich von dem Vorhandensein mehr oder minder zahlreicher „Aetherkanäle" zwischen

den Körperatomen abhängig, welche sowohl den transversalen Aetherschwingungen des Lichts, als den longitudinalen Impulsen, welche in der oben erläuterten Weise die Wärme fortpflanzen, den Durchgang gestatten. „Wenn „nun die lichtbildende Querbewegung eines Aetheratoms vernichtet wird, „so wird im Allgemeinen die wärmebildende Längsbewegung des Atoms „demselben Schicksal unterliegen, da die jedenfalls veränderte Beschaffen-„heit des Aetherkanals auch auf die letztere von Wirkung sein muss" (S. 95). Es sind daher die Lichtstrahlen im Allgemeinen immer mit Wärmestrahlen combinirt, oder ein Körper, welcher für eine Gattung von Lichtstrahlen durchsichtig ist, ist auch für eine entsprechende Art von Wärmestrahlen diatherman. Wie nämlich die Farben des Lichts durch ihre Wellenlänge verschieden sind, so unterscheiden sich die Wärmearten durch eine bestimmte Gruppirung der wirksamen Aetherstrahlen (S. 71). Während demnach im Allgemeinen jedem Lichtstrahl von bestimmter Wellenlänge eine gewisse Wärmeart entspricht, giebt es andrerseits dunkle Wärmestrahlen, denen keine Lichtstrahlen entsprechen; ein undurchsichtiger Körper kann diatherman sein, „denn die breite Querschwingung des Lichts kann durch den „Widerstand der Seitenwände eines Aetherkanals vernichtet werden, ohne „dass die Längsschwingung auch sofort erloschen sein müsste" (S. 94). „Finden sich in einem durchstrahlten Körper mehrere Richtungen mit zahl-„reichen regelmässigen Aetherkanälen, wie es bei den das Licht doppelt „brechenden Krystallen der Fall sein muss, so kann doch eine doppelte „Brechung der Wärme, ja sogar eine mehrfache Brechung derselben aus „diesen Gründen ebenso gut für die nicht combinirten Strahlen stattfinden, „wie sie die combinirten mit dem Lichte gemeinschaftlich erfahren" (S. 99). Der Verfasser scheint sich also vorzustellen, dass es in einem Kalkspathkrystall überhaupt nur zwei Richtungen gebe, in denen sich Licht- und Wärmestrahlen fortpflanzen können, und dass ein Krystall, in welchem „Aetherkanäle" in drei Richtungen vorhanden sind, das Licht dreifach brechen würde! „Sind mehrere Platten so gelegt, dass ihre Aetherfäden „parallel sind, so können die aus der einen Platte tretenden Strahlen unge-„hindert durch die zweite gehen; kreuzen sich aber die Aetherfäden, so „müssen die Wärmestrahlen bei der ersten Platte von der zweiten absor-„birt werden" (S. 99). Diese Proben aus dem Kapitel der Wärmestrahlung werden genügen, um sich ein eigenes Urtheil über die Anschauungsweise des Verfassers zu bilden. Wir bemerken nur noch, dass der Gedanke, die Wärmestrahlen durch Longitudinalwellen zu erklären, nicht eben neu ist.

Was zweitens die Erklärung der Wärmeerscheinungen bei Compression und Expansion der Gase betrifft, so wird der Hypothese gemäss durch Compression der im Gase enthaltene freie Aether verdichtet, somit Wärme erzeugt, umgekehrt wird durch Expansion derselbe verdünnt, oder das Gas abgekühlt. Beim Einströmen der Luft in einen leeren Raum (S. 37) „ist

„der letztere schon mit Aether von der Dichte des Aethers der freien Um-
„gebung gefüllt, der zwar bei der Einströmung in Bewegung gesetzt wird,
„aber sogleich zurückströmen muss, wenn hinter ihm ein weniger dichter
„Aether nachfolgt." Es würde aber aus dieser Anschauungsweise offenbar folgen, dass bei Verkleinerung oder Vergrösserung eines leeren Raumes genau ebenso viel Wärme erzeugt oder verbraucht würde, als wenn derselbe mit Luft von beliebiger Dichtigkeit gefüllt wäre, während hingegen die Erfahrung lehrt, dass die erzeugte Wärmemenge der geleisteten Arbeit, also der Dichte der comprimirten Luft, proportional ist.

Die Wärmeerzeugung durch Reibung endlich erklärt der Verfasser nach der im Sinne der Stofftheorie üblichen Weise dadurch, dass durch Annäherung der Theilchen des geriebenen Körpers eine Verdichtung des Aethers und ein Uebergang des gebundenen in freien Aether stattfinde (S. 43). Hätte der Verfasser die von ihm citirte Abhandlung von Rumford studirt, so würde er gefunden haben, wie Rumford diese Erklärung widerlegte, indem er nachwies, dass die Wärmecapacität der geriebenen Körper durch die Wirkung nicht verändert worden war. Des Versuches von Davy, bei welchem durch Reibung zweier Eisstücke im leeren Raum und in einer unter 0° erkalteten Umgebung Wasser, also ein Körper von grösserer Wärmecapacität als die geriebenen Körper, erzeugt wurde, erwähnt der Verfasser an dieser Stelle gar nicht und in einer späteren Stelle (S. 135) erklärt er denselben durch die Zusammendrückung des Eises, wobei Wärme frei werde, während doch andrerseits die Stofftheorie den zum Uebergang in den flüssigen Zustand erforderlichen Wärmeverbrauch dadurch erklärt, dass Wärme gebunden werde. — Zur Erklärung der von Joule angestellten Versuche über Flüssigkeitsreibung sagt der Verfasser (S. 44): „Die
„Flüssigkeitstheilchen werden mit Gewalt an einander gepresst, dadurch
„Aether verdichtet und so die Wärme erhöht; ob die entstehende Wärme-
„menge wirklich unbeschränkt sei, darüber belehrt uns kein Versuch aus-
„reichend; sehr gross kann dieselbe sein, weil die Menge des gebundenen
„Aethers im Verhältniss zu der des freien sehr gross ist; eine der Arbeit
„verhältnissgleiche Menge muss es sein, da in allen Fällen zwar etwas Ar-
„beit zur Näherung der Körpertheilchen verwendet wird, der weitaus
„grösste Theil aber immer die Abstossung des Aethers überwindet, also
„denselben verdichtet, und zwar um so mehr verdichtet, je mehr Kraft auf-
„gewendet wird." . . . „Ob die benutzten Wasser- und Quecksilbermassen
„nach den Versuchen in demselben Zustande waren, wie vorher, darüber
„stehen mir keine Angaben zu Gebote. Zweifelhaft ist es; doch liegt die
„Möglichkeit vor, dass dabei die Aenderungen durch die später wieder von
„Aussen eintretenden Aetheratome beseitigt wurden." Leider liegen zu Gunsten des Verfassers keine Erfahrungen darüber vor, dass Wasser und Quecksilber durch Reibung ihre Wärmecapacität ändern, und wenn davon die Rede ist, dass die Zustandsänderung durch später wieder von Aussen

eintretende Aetheratome beseitigt werde, so heisst dies, in die Hypothese des Verfassers übersetzt, nichts anderes, als dass die durch Reibung im Calorimeter erzeugte Wärmemenge den Umgebungen der Flüssigkeit, d. i. den Gefässwänden, entzogen werde. Wenn der Verfasser von der Art, wie Joule die Versuchsreihen über Flüssigkeitsreibung ausführte, Kenntniss genommen hätte, so würde er die Ueberzeugung gewonnen haben, dass eine nachträgliche Abkühlung der Flüssigkeit und Wärmeaufnahme von Aussen der Aufmerksamkeit des Experimentators nicht hätte entgehen können.

Wir glauben auf den Theil des Buches, in welchem der Verfasser die weiteren Folgerungen aus seiner Hypothese entwickelt, nicht näher eingehen zu dürfen, zumal da die bereits gegebenen Proben den Charakter seiner Deductionen hinreichend erkennen lassen. Dass ein grosser Theil der Wärmeerscheinungen durch die Hypothese eines Wärmestoffes ebenso wohl und selbst zum Theil durch elementarere und daher der Anschauung näher liegende Betrachtungen erklärt werden kann, als im Sinne der dynamischen Wärmetheorie, ist niemals geläugnet worden. Lange Zeit hindurch hat ja die Stofftheorie zur Erklärung der bekannten Erscheinungen ausgereicht, und die Aetherthorie des Verfassers ist von den Vorstellungen von de Luc, Black, Jrvine, Wilke und Berthollet über freie und latente Wärme in keinem wesentlichen Punkte verschieden. Die Schwierigkeiten, auf welche jene Stofftheorie stösst, und welche zur Verwerfung derselben und zur Annahme der Bewegungstheorie geführt haben, werden dadurch nicht beseitigt, dass an Stelle des „Wärmestoffes“ der neue Name „Aether“ gesetzt wird.

Die zweite Abtheilung des Buches enthält eine Darstellung und Kritik der Ansichten, welche im Sinne der Bewegungstheorie der Wärme über die Natur der Wärmebewegungen aufgestellt worden sind. Insbesondere wendet sich der Verfasser gegen die Theorie der Identität der Licht- und Wärmestrahlung. Obgleich zugegeben werden mag, dass im Nachweis dieser Identität noch manche experimentelle Lücken vorhanden sein mögen, so beruht doch die Mehrzahl der Einwürfe des Verfassers auf Missverständnissen. Der Verfasser schliesst z. B., dass der grösseren Schwingungsgeschwindigkeit der violetten Strahlen auch die grösste Wärmewirkung entsprechen müsste. Dieser Schluss würde nur unter der Voraussetzung gleicher Schwingungsamplituden zulässig sein, indem dann allerdings der kürzesten Schwingungsdauer die grösste absolute Vibrationsgeschwindigkeit entsprechen würde. Es hindert aber nichts, anzunehmen, dass die Schwingungsamplituden der dunklen Strahlen jenseits des rothen Endes des Spectrums die grössten seien, und dass die Unempfindlichkeit der Netzhaut für Strahlen von grosser Schwingungsdauer, oder auch die Absorption in den Augenmedium uns hindern, diese Schwingungen als Licht wahrzunehmen. Dass die Intensität der Lichtempfindung im gelben Theil des Spectrums am grössten ist, steht dieser Annahme nicht entgegen, da man zwischen der

Intensität der Aetherbewegung und der Stärke des Lichteindrucks auf unser Auge wohl zu unterscheiden hat. Die erstere wird durch die lebendige Kraft der Aetherschwingungen oder durch die Wärmewirkung derselben gemessen, letztere aber ist ausserdem durch den verschiedenen Grad der Empfindlichkeit unseres Sehnerven für Schwingungen von verschiedener Wellenlänge bedingt, welche sogar grosse individuelle Verschiedenheiten bei verschiedenen Beobachtern zeigt. Für Strahlen, deren Wellenlänge dem vorrothen und rothen Theil des Spectrums entspricht, besitzt das Auge keine oder nur geringe Empfindlichkeit, während dasselbe für blaue und violette Strahlen so empfindlich ist, dass es dieselben als Licht noch wahrnimmt, obgleich dieselben so geringe Schwingungsamplituden besitzen, dass sie keine messbaren thermometrischen Wirkungen zu erzeugen im Stande sind.

Ein anderer Einwand, welchen der Verfasser gegen die Identität von Licht- und Wärmestrahlen aufstellt, bezieht sich auf die von Aken und Tyndall mit dem Namen der Calcescenz oder Calorescenz bezeichneten Erscheinungen der Umwandlung dunkler Wärme- in leuchtende Strahlen, wie dieselbe z. B. bei der Ersetzung des Kalkes durch die vorwiegend dunkle Strahlen aussendende Flamme des Knallgasgebläses vorkommt. — Es findet hier eine Uebertragung der Aetherschwingungen an die Körperatome statt und es ist *a priori* keineswegs erweislich, dass die Schwingungsdauer der neuen von den Körperatomen aus erregten Aetherwellen mit den der ursprünglichen von den Körperatomen erregten Wellen identisch sein müsse. — Ein ganz ähnliches Verhältniss findet bei den Fluorescenzerscheinungen der Lichtstrahlen statt. Die erwähnten Erscheinungen können demnach vielmehr zur Unterstützung als zur Widerlegung der Identitätstheorie dienen. — Dass ferner ein durchsichtiger Körper adiatherman für gewisse Wärmestrahlen und ein diathermaner Körper undurchsichtig sein könne, liefert ebenso wenig einen Beweis gegen die Identität von Licht und Wärme, wie aus der Erfahrung, dass rothes Glas keine blauen und blaues Glas keine rothen Strahlen hindurchgehen lässt, gefolgert werden kann, dass rothes und blaues Licht Erscheinungen verschiedener Natur seien.

Die übrigen zum Theil unter sich widersprechenden Resultate verschiedener Forscher, welche der Verfasser als Argumente gegen die Identitätstheorie anführt, beweisen nur, dass die Versuche über Wärmestrahlung mit mancherlei Schwierigkeiten verknüpft sind, welche selbst geübte Beobachter, wie Melloni, zu Irrthümern veranlassen konnten, die durch Vervollkommnung der Hilfsmittel und Versuchsmethoden ihre Aufklärung gefunden haben. Wie gross jene experimentellen Schwierigkeiten sind, mag man aus den entgegengesetzten Resultaten schliessen, zu welchen noch in der jüngsten Zeit zwei der berühmtesten Experimentatoren bezüglich der Absorption der Wärmestrahlen durch gasförmige Mittel gelangt sind.

Der Verfasser erörtert sodann die Vorstellungen, welche Ampère,

Redtenbacher (das Dynamidensystem, Mannheim 1857), Wiener (Grundzüge der Weltordnung, Leipzig und Heidelberg 1863) von der molecularen Beschaffenheit der Materie gegeben haben, sowie die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie und die im Zusammenhang mit denselben von Krönig, Clausius u. A. aufgestellten Ansichten über die Natur der Gase u. s. w. Der Ansicht des Verfassers, dass die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie auch mit seiner Aethertheorie verwoben seien, können wir nach den oben gegebenen Erörterungen nicht beipflichten. Dass andererseits die Ansichten der verschiedenen Forscher über die Natur der Wärmebewegung noch viel Lückenhaftes und Widersprechendes enthalten, wer wollte es läugnen? Die Unzugänglichkeit des Gebietes der Molecularphysik für die directe Beobachtung einerseits, die bedeutenden Schwierigkeiten, welche sich einer streng mathematischen Behandlung entgegenstellen andererseits, werden voraussichtlich eine erfolgreiche Ausbildung dieses Gebietes noch lange verzögern — indess ist es nicht eine oder die andere specielle Hypothese über die atomistische Zusammensetzung der Materie, auf welche die mechanische Wärmetheorie sich gründet. Dieselbe ist vielmehr eine nothwendige Consequenz bestimmter Erfahrungsthatsachen, welche mit der Annahme eines Wärmestoffes im Widerspruch stehen. Jeder Versuch, die Theorie des Wärmestoffes in dieser oder jener Form wieder zur Geltung zu bringen, muss daher so lange als verfehlt betrachtet werden, bis er jene Thatsachen entweder zu widerlegen oder auf genügende Weise zu erklären im Stande ist. Dies ist durch die Aethertheorie des Verfassers nicht geleistet worden.

Berlin, im November 1865. Jochmann.

Der Monitor. Eine Sammlung von Formeln und Tabellen aus dem Gebiete der Mathematik und Mechanik; zusammengestellt von H. van Aller, Oberst a. D. Erster Theil, Mathematik. Hannover, G. Wedekind. 1865.

Das vorliegende Werkchen enthält eine ziemlich reichhaltige Sammlung von Formeln aus folgenden Theilen der Mathematik: 1. Goniometrie, 2. Ebene Trigonometrie, 3. Sphärische Trigonometrie, 4. Polygonometrie, 5. Polyedrometrie, 6. Analytische Geometrie der Ebene, 7. Analytische Geometrie des Raumes, 8. Berechnung von Flächen, 9. Berechnung der Oberflächen und Inhalte von Körpern, 10. Versetzungen, Reihen und Gleichungen, 11. Differential- und Integralrechnung, 12. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. In einer derartigen Publication sucht selbstverständlich Niemand eigene Forschungen des Verfassers, wohl aber verlangt das Publikum mit Recht dreierlei, nämlich Correctheit des Druckes, bequeme Anordnung des Materiales und genaue Angabe der Be-

dingungen, unter welchen die aufgeführten Formeln richtig sind. Nach diesen Gesichtspunkten betrachtet, hat die vorliegende Schrift keinen günstigen Eindruck auf den Referenten gemacht, wenigstens erweckt es ein nachtheiliges Vorurtheil, dass demselben beim blossen Durchblättern die folgende ziemlich lange Reihe von Fehlern und Ungenauigkeiten aufgestossen ist.

S. 21, Z. 6 v. u. steht *arctan x* statt *arctan* 1; S. 102, Z. 3 v. u. muss es statt $\frac{1}{4}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2$ heissen $\frac{1}{8}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2$; S. 103, Z. 4 v. o. ist statt $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ zu lesen $\sqrt{2(a^2+b^2)}$; S. 233, Z. 3 v. u. steht $m\,log(a+x)+n\,log(b+x)$ statt

$$(a+x)^m(b+x)^n\,d[m\,log(a+x)+n\,log(b+x)];$$

in mehreren folgenden Zeilen fehlt der Factor dx; S. 280, Z. 6 v. o. muss es für Cordioide heissen „Cardioide". Ferner ist zu tadeln, dass der Verfasser häufig mit einem und demselben Buchstaben ganz verschiedene Grössen bezeichnet; so wird auf S. 117 als Gleichung der hyperbolischen Spirale angegeben

$$r=\frac{a}{t}=\frac{2\pi a}{t},$$

wo die beiden a verschiedene Bedeutungen haben; daraus entspringt der Uebelstand, dass man bei den a, welche in den folgenden Formeln für Tangente, Normale etc. vorkommen, nicht weiss, welches a gemeint ist. Dieselbe Unsicherheit findet sich wieder bei der Gleichung der logarithmischen Spirale (S. 118), welche der Verfasser schreibt

$$r=c\,e^{\frac{t}{a}}=a^t=a\,e^{mt},$$

was geradezu eine Confusion giebt, da überdies m einmal $=1$ und das andere Mal davon verschieden ist. Auf S. 175 steht als Oberfläche des Ellipsoides

$$O=\frac{ab\pi}{\varepsilon}\,arc\,sin\frac{\varepsilon x}{a}+\frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}$$

(bei Drehung um die grosse Axe),

$$O=2b^2\pi+\frac{2ab\pi}{\varepsilon}\,ln\,(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})$$

(bei Drehung um die kleine Axe);

das erste O bedeutet die Oberfläche einer Viertelzone von der Höhe x; das zweite die Gesammtoberfläche, ohne dass dieser wesentliche Unterschied in einer Note bemerkt wäre. Unter der Rubrik Rectification bezeichnet beim Kreise (S. 285) s einen Quadranten, bei der Parabel den Bogen, dessen Horizontalprojection x ist, bei der Ellipse den ganzen Umfang, und wiederum fehlt hierzu jede Erläuterung. — Sehr unglücklich erscheint dem Referenten die Anordnung der Integralformeln, welche in 8 Tafeln auf folgende Weise vertheilt sind: Taf. 29. Integralformeln; Taf. 30. Unmittelbare Integrationen; Taf. 31. Integrationen durch Theile; Taf. 32. Integrale rationaler

Differentiale; Taf. 33. Integrale irrationaler Differentiale; Taf. 34. Integrationen durch Reductionsformeln; Taf. 35. Bestimmte Integrale; Taf. 36. Transcendente (unbestimmte) Integrale. Offenbar hat der Verfasser hierbei nicht die Natur des gegebenen Differentiales, sondern die zufälligen Hilfsmittel der Integration zum Eintheilungsgrunde genommen, er hat aber dabei übersehen, dass es auf letztere bei einem Tabellenwerke nicht ankommt. Wer z. B. den Werth von

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2}$$

in einer Tafel sucht, der fragt nicht danach, ob dieses Integral durch theilweise Integration oder durch Zerlegung in Partialbrüche oder durch Reductionsformeln entwickelt werden kann (hier würden sogar alle drei Methoden passen), er hat nur das Interesse, jenen Werth möglichst rasch zu finden. Für diesen Zweck ist die Anordnung, welche Meyer Hirsch, Minding, Bierens de Haan u. A. bei ihren Integraltafeln benutzt haben, die richtige und durch die Erfahrung längst bewährt. Wie weit dagegen bei des Verfassers Eintheilung die verwandtesten Formeln von einander getrennt werden, möge nur ein Beispiel zeigen:

$\int e^x\,dx$ steht auf S. 225,

$\int e^{ax}\,dx$ „ „ „ 227,

$\int x e^{ax}\,dx$ „ „ „ 235,

$\int x^n e^{ax}\,dx$ „ „ „ 253.

Endlich ist noch zu rügen, dass der Verfasser bei keiner Formel die Bedingungen ihrer Gültigkeit angiebt, wodurch der Nachschlagende zu dem Glauben an die Allgemeingültigkeit der betreffenden Formel und damit zu Fehlern verleitet wird. Aus den ersten Zeilen von Taf. I, *b* geht z. B. hervor, dass der Verfasser die Function $\arcsin x$ als eindeutig betrachtet, d. h. darunter immer den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen versteht, dessen Sinus $=x$ ist. Dann musste aber auch bei der Formel (S. 20)

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

die Einschränkung $x^2+y^2 \leq 1$ beigefügt werden, ohne welche falsche Resultate herauskommen, wie z. B. für $x=y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Besonders gefährlich wird der gerügte Mangel bei den unendlichen Reihen. So steht auf S. 198 ohne alle Determination

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 x}{5} + \ldots\ldots$$

und hieraus folgt, indem man von der Formel

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n+1} x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x\,dx = 2.\frac{2.4.6\ldots.(2n)}{3.5.7..(2n+1)}$$

Gebrauch macht,

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x\,dx = 2\left\{\frac{2}{1^2.3}+\frac{4}{3^2.5}+\frac{6}{5^2.7}+\right\},$$

was durchaus unrichtig ist. — Nach diesen Erörterungen muss man sagen, dass der Verfasser zwar mit vielem Fleisse aus allen möglichen Büchern Formeln zusammengetragen, dass er es aber hierbei versäumt hat, sich den eigentlichen Sinn und die praktische Anwendbarkeit derselben klar zu machen. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. November bis 31. December 1865.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1865. 2. Bd., 1. u. 2. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1864. Berlin, Dümmler. 2 Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1863. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. 19. Jahrg., redig. von E. JOCHMANN. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Repertorium für physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde. Herausgeg. von P. CARL. 1. Heft. München, Oldenburg. pro compl. 6²/₅ Thlr.

Reine Mathematik.

NEUMANN, C., Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig, Teubner. 3⅔ Thlr.

—— —— Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. Ebendas. 18 Ngr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 5. Aufl. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 8. Aufl. Leipzig, Brandstetter. 1⅓ Thlr.

RULAND, N., Praktische Anleitung zum Unterricht in der Algebra. Ausführliche Auflösung der Gleichungen etc. in Heis' Sammlung. 2. Aufl. Bonn, Cohen & Sohn. $1^3/_5$ Thlr.

ZAMPIERI, J., Sammlung von Formeln und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Nach der 4. Aufl. der gleichnamigen Sammlung von J. Salomon. Wien, Gerold. $1^1/_3$ Thlr.

GALLENKAMP, W., Die Elemente der Mathematik. 3. Aufl. 1. Thl. (Arithmetik, Algebra und Planimetrie). Iserlohn, Bädeker. $^1/_2$ Thlr.

VEGA, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 49. Aufl., bearb. von BREMIKER. Berlin, Weidmann. $1^1/_4$ Thlr.

RÜHLMANN, M., Logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln. 7. Ausg. Leipzig, Arnold. $^2/_3$ Thlr.

LALANDE, J. DE, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben von H. G. KÖHLER. 3. Ausg. Leipzig, Holtze. 18 Ngr.

Geometrisches Lehrpensum für das Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Cöln. Cöln, Schmitz. 8 Ngr.

SPITZ, C., Lehrbuch der ebenen Polygonometrie. Leipzig, Winter. 18 Ngr.

—— —— Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Ebendas. $1^1/_6$ Thlr.

GEISER, C. F., Einige geometrische Betrachtungen. Zürich, Schabelitz. $^1/_5$ Thlr.

—— —— Ueber eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. Ebendas. $^1/_6$ Thlr.

GREGORY, D. F., *Mathematical writings. Edited by W. Walton. With a biographical memoir by R. L. Ellis. London, Bell.* 12 sh.

Angewandte Mathematik.

POHLKE, K., Darstellende Geometrie. 1. Abth. 2. Aufl. Berlin, Gärtner. 1 Thlr.

CULMANN, K., Die graphische Statik. 2. Hälfte. Zürich, Meyer & Zeller. $4^2/_3$ Thlr.

GRASHOF, F., Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Berlin, Gärtner. 2 Thlr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 2. Thl.: Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen. 4. Aufl. 7. u. 8. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

RHODIUS, A., Ein neuer Lehrsatz der Aerodynamik nebst dessen Anwendungen auf Maschinen und die Bewegungen der Atmosphäre. Bonn, Marcus. $^1/_6$ Thlr.

PECHMANN, E., Die Abweichung der Lothlinie bei astronomi-

schen Beobachtungsstationen und ihre Berechnungen bei Gradmessungen. (Fortsetzung.) Wien, Gerold. 2 Thlr.

Lesser, O., Tafeln der Lutetia mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter und Saturn. Altona und Berlin, Dümmler. 1 Thlr.

Kepleri, J., *Opera omnia ed. C. Frisch. Vol. VI. Pars* 1. Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 2⅙ Thlr.

Loomis, E. A., *treatise on astronomy. New York and London.* 16 sh.

Bour, M. E., *Course de mécanique et machines, professé à l'école polytechnique. 1. Fascicule. Cinématique. Paris, Gauthiers-Villars.*

Physik.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Aufl. 1. Lief. Leipzig, Teubner. ⅚ Thlr.

Schabus, J., Grundzüge der Physik. 4. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 2 Thlr. 12 Ngr.

Neumann, C., Der gegenwärtige Standpunkt der mathematischen Physik. (Antrittsrede.) Tübingen, Laupp. 6 Ngr.

Urbanski, A., Theorie des Potentials und dessen Anwendung auf Elektricität. 2. Ausg. der Vorträge über höhere Physik. 1. Abth. Berlin, Friedländer. 1 Thlr.

Suhle, H., Psychrometertafeln, welche den Dunstdruck und die relative Feuchtigkeit für Zehntelgrade beider Thermometer des Psychrometers enthalten. Cöthen, Schettler. 24 Ngr.

Wild, H., Ueber ein neues Polaristrobometer und eine neue Bestimmung der Drehungsconstante des Zuckers. Bern, Haller. ⅜ Thlr.

Schrauf, A., Die Refractionsäquivalente und optischen Atomzahlen der Grundstoffe. Wien, Gerold's Sohn. ⅙ Thlr.

Kupffer, A. v., Handbuch der Alkoholometrie. Berlin, Springer. 2⅙ Thlr.

Zetzsche, K. E., Die Copirtelegraphen, die Typendrucktelegraphen und die Doppeltelegraphie. Ein Beitrag zur Geschichte der elektrischen Telegraphie. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 26 Ngr.

Matteucci, C., *Della pila di Volta, della corrente elettrica e della sue applicazioni. Torino.* 80 c.

I.

Neue Begründung der ersten Sätze über projectivische Grundgebilde im Allgemeinen und über harmonische im Besonderen.

Von

Prof. Dr. Chr. Wiener zu Carlsruhe.

(Hierzu Tafel I, Figur 1 bis 7.)

Zur Begründung der ersten Sätze über Projectivität sind zwei Wege eingeschlagen worden, der des Doppelverhältnisses und der der harmonischen Punktreihe. Auf dem ersteren, fast allgemein betretenen Wege wird von der Rechnung Gebrauch gemacht, auf dem letzteren von jeder Rechnung befreiten Wege wird von der harmonischen Punktreihe ausgegangen, deren Begriff in etwas befremdender Weise durch ihre Erzeugung aus dem Vierecke aufgestellt wird. Beidesmal aber ist die ursprüngliche Anschauung des Projicirens verlassen. Der Verfasser dieses Aufsatzes beabsichtigt im Folgenden eine Begründung jener Sätze zu geben, welche ganz auf der Anschauung des Projicirens beruht und sich dadurch dem Gegenstande in naturgemässer Weise anschliesst. Ausserdem dürfte dieselbe durch ihre Unabhängigkeit von der Rechnung für die synthetische Geometrie besonders geeignet sein, während der analytischen Entwickelung das Doppelverhältniss als Grundlage entspricht. Das eigenthümliche Hilfsmittel unserer Begründung bilden die ähnlichen Punktreihen, über welche einige Sätze benutzt werden, die aus der Elementargeometrie theils unmittelbar entlehnt, theils in einfacher Weise abgeleitet sind. Die Begründung dieser Hilfsätze bedarf zwar der Proportionen, ist also von Rechnung nicht frei; dieselben leuchten aber wegen der Geläufigkeit der zu Grunde liegenden Anschauungen unmittelbar ein, so dass wir nur, um die Grundlagen deutlich zu zeigen, die einfachen Beweise zugefügt haben.

Entsprechend der Behandlung der Sätze über allgemeine Projectivität mussten auch der Begriff der harmonischen Gebilde und die Beweise der zugehörigen Sätze eine Umänderung erfahren. Der hier zu Grunde liegende Begriff der harmonischen Punktreihe ist ebenfalls auf die Anschauung des Projicirens gegründet und von jeder Rechnung befreit. Die harmonische Punktreihe ist in ganz entsprechender Weise, wie es durch das Doppelverhältniss geschieht, als besonderer Fall projectivischer Punktreihen betrachtet. Wie nämlich bei der letzteren Anschauung für vier harmonische Punkte die Zulässigkeit einer gewissen Vertauschung von Elementen ohne Aenderung des Doppelverhältnisses als Kennzeichen aufgestellt werden kann, so wird im Folgenden für dieselben die Zulässigkeit der nämlichen Vertauschung von Elementen ohne Aenderung der Projectivität als Kennzeichen aufgestellt werden.

Begriffe.

1. Als Elemente des Raumes werden im Folgenden betrachtet: der Punkt, die Gerade oder der Strahl, die Ebene.

2. Aus diesen werden die Grundgebilde zusammengesetzt. Die einförmigen Grundgebilde oder diejenigen der ersten Stufe, von denen allein wir hier zu handeln haben, sind:

1) Die gerade Punktreihe oder kurz die Punktreihe. Sie ist der Inbegriff aller Punkte — der Elemente —, welche auf einer Geraden — dem Träger der Punktreihe — liegen.

2) Der ebene Strahlenbüschel oder kurz der Strahlenbüschel. Er ist der Inbegriff aller Geraden — der Elemente —, welche in einer Ebene durch einen Punkt derselben — den Mittelpunkt des Strahlenbüschels — möglich sind. Liegt der Mittelpunkt im Unendlichen, so ergibt sich ein Parallelstrahlenbüschel.

3) Der Ebenenbüschel. Er ist der Inbegriff aller Ebenen — der Elemente —, welche durch eine Gerade — die Axe des Ebenenbüschels — möglich sind. Liegt die Axe im Unendlichen, so ergibt sich ein Parallelebenenbüschel.

3. *a*) 1) Zwei Punktreihen heissen projectivisch (π), wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Punkte der einen und der andern Reihe sich paarweise auf einander projiciren. Diese Lage, in welcher die Reihen und der Projectionsmittelpunkt in derselben Ebene liegen, sowie dann auch die beiden Punktreihen, heissen perspectivisch. Die Punkte, welche sich auf einander projiciren, heissen entsprechend. Da die Projicirenden einen Strahlenbüschel bilden, kann man auch zwei Punktreihen projectivisch nennen, wenn man die Paare entsprechender Punkte in dieselben Strahlen eines Strahlenbüschels legen kann, und perspectivisch, wenn sie darin liegen.

2) Zwei Strahlenbüschel heissen projectivisch, wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Strahlen des einen und des andern Büschels sich paarweise auf einander projiciren. Diese Lage, sowie dann auch die beiden Strahlenbüschel, heissen perspectivisch. Die Strahlen, welche sich auf einander projiciren, heissen entsprechend. Da die projicirenden Ebenen einen Ebenenbüschel bilden, so kann man auch zwei Strahlenbüschel projectivisch nennen, wenn man die Paare entsprechender Strahlen in dieselben Ebenen eines Ebenenbüschels legen kann, und perspectivisch, wenn sie darin liegen. Da ferner die entsprechenden Strahlen sich in Punkten der Durchschnittsgeraden der Ebenen der Strahlenbüschel schneiden, und da umgekehrt, wenn die entsprechenden Strahlen zweier in verschiedenen Ebenen befindlicher Strahlenbüschel sich in Punkten einer und derselben Geraden schneiden, diese Büschel perspectivisch in dem Ebenenbüschel liegen, dessen Axe die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Strahlenbüschel ist, und der die gerade Reihe jener Durchschnittspunkte projicirt, so nennt man zwei Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in Punkten einer und derselben Geraden schneiden, auch dann noch perspectivisch, wenn sie in derselben Ebene liegen. Sind die Strahlenbüschel parallel, so liegt ihre Durchschnittsgerade im Unendlichen.

b) 3) Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heissen projectivisch, wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Strahlen des Büschels die angegebenen Punkte der Reihe projiciren. Diese Lage, sowie dann auch die beiden Gebilde, heissen perspectivisch. Die Strahlen und die durch sie projicirten Punkte heissen entsprechend.

4) Ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel heissen projectivisch, wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Ebenen des Ebenenbüschels die angegebenen Strahlen des Strahlenbüschels projiciren. Diese Lage, in welcher der Mittelpunkt des zweiten Gebildes in der Axe des ersten liegt, sowie dann auch die beiden Gebilde, heissen perspectivisch. Die Ebenen und die durch sie projicirten Strahlen heissen entsprechend.

5) Ein Ebenenbüschel und eine Punktreihe heissen projectivisch, wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Ebenen des Ebenenbüschels die angegebenen Punkte der Punktreihe projiciren. Diese Lage, sowie dann auch die beiden Gebilde, heissen perspectivisch. Die Ebene und die durch sie projicirten Punkte heissen entsprechend.

c) 6) Zwei Ebenenbüschel heissen projectivisch, wenn man sie in eine derartige Lage bringen kann, dass die angegebenen Elemente des einen dieselben Strahlen eines Strahlenbüsches projiciren, wie die angegebenen Elemente des andern. Diese Lage, in der die Axen der beiden

Ebenenbüschel sich im Mittelpunkt des genannten Strahlenbüschels schneiden, sowie dann auch die beiden Ebenenbüschel, heissen perspectivisch. Die Ebenen, welche dieselben Strahlen projiciren, heissen entsprechend.

Zusammenfassend kann man sagen: Zwei einförmige Grundgebilde — in der Reihenfolge: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel — heissen projectivisch, wenn entweder *a*) sie sich auf einander projiciren können, oder wenn *b*) das eine das andere projiciren kann, oder wenn *c*) beide dasselbe Grundgebilde der nächst vorhergehenden Art projiciren können.

4. Aus der perspectivischen Lage folgt unmittelbar, dass die Folge der Elemente in dem einen Gebilde dieselbe ist, wie die der entsprechenden Elemente im projectivischen Gebilde.

5. Zwei projectivische einförmige Grundgebide derselben Art heissen gleich oder congruent, wenn sie mit allen Paaren entsprechender Elemente zur Deckung gebracht werden können.

Parallele Ebenen schneiden denselben Ebenenbüschel in gleichen Strahlenbüscheln, parallelle Gerade denselben Parallelstrahlenbüschel in gleichen Punktreihen.

6. Zwei projectivische Punktreihen heissen ähnlich, wenn sie in perspectivischer Lage parallel in ein und denselben Strahlenbüschel gelegt werden können.

Hilfssätze.

7. Satz. Das Verhältniss der entsprechenden Strecken zweier ähnlicher Punktreihen ist unveränderlich.

Seien $A, B, C \ldots, A', B', C' \ldots$ die entsprechenden Punkte zweier ähnlichen Punktreihen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots$$

8. Satz. Ist das Verhältniss der entsprechenden Strecken zweier Punktreihen unveränderlich, so sind dieselben ähnlich.

Seien $A, B, C \ldots, A', B', C' \ldots$ die Punktreihen, für welche

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots,$$

so lege in einen beliebigen Strahlenbüschel $abc\ldots$, welcher $ABC\ldots$ projicirt, eine zu AB parallele Gerade $A''B''C''\ldots$, welche zwischen den Strahlen a und b die Strecke $A''B'' = A'B'$ enthält; es wird dann behauptet, dass $A''B''C''\ldots = A'B'C'\ldots$ Denn die erstere Reihe ist mit $ABC\ldots$ ähnlich, so dass

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''} \ldots$$

Da nun noch $A''B'' = A'B'$, so ist auch

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{B''C''}$$

und $A'C'' = A'C'$, $B''C'' = B'C'$.

Wenn aber zwei Punkte C'', C' auf den mit den Punktenpaaren $A'A''$, $B'B''$ zur Deckung gebrachten beiden Reihen dieselben Abstände von diesen beiden Punkten haben, so müssen sie zusammenfallen. Dasselbe gilt von allen andern entsprechenden Punktepaaren. Daher ist auch $A'B'C'\ldots$ mit $ABC\ldots$ ähnlich.

9. Satz. Alle Punktreihen, welche Schnitte desselben Parallelstrahlenbüschels sind, sind ähnlich.

Denn das Verhältniss entsprechender Strecken derselben ist unveränderlich.

10. Satz. Zwei ähnliche Punktreihen liegen perspectivisch in einem Strahlenbüschel, sobald zwei Paare entsprechender Punkte in denselben Strahlen liegen, und wenn *a*) der Büschel ein Parallelstrahlenbüschel ist, oder wenn *b*) beide Punktreihen parallel sind. Bei Parallelstrahlenbüscheln können die genannten Bedingungen nur dann erfüllt werden, wenn der Abstand zweier Punkte einer Reihe nicht kleiner ist, als der kürzeste Abstand der entsprechenden Strahlen.

Der Beweis in 8. ist zugleich der Beweis für den zweiten Fall unseres Satzes. Derselbe Beweis gilt auch für den ersten Fall oder für Parallelstrahlenbüschel, nachdem der Satz ausgesprochen wurde.

Man kann daher in ein Strahlenbüschel, welcher eine Punktreihe projicirt, jede mit letzterer ähnliche Punktreihe perspectivisch legen, in ein Parallelstrahlenbüschel jedoch nur unter der angeführten Bedingung.

11. Satz. Zwei Punktreihen, die mit einer dritten ähnlich sind, sind unter einander ähnlich.

Denn sie können beide mit letzterer parallel in ein Strahlenbüschel gelegt werden, in dem sie dann auch unter einander parallel liegen.

Die Sätze über projectivische Gebilde.

12. Satz. Zwei einförmige Grundgebilde, welche mit ein und demselben dritten einförmigen Grundgebilde projectivisch sind, sind unter einander projectivisch.

Der Beweis muss für die 6.3 oder 18 möglichen Fälle nachweisen, dass zwei solche Grundgebilde, welche mit ein und demselben dritten Grundgebilde perspectivisch liegen, auch unter sich perspectivisch gelegt werden können. Nur zwei dieser Beweise [1) *a*) und 5) *a*)] bedürfen ursprünglicher Anschauungen, während alle andern sich in einfacher Weise auf diese stützen.

1) Zwei Punktreihen u, v sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit ein und demselben Ebenenbüschel x.

u und v liegen perspectivisch in x. Lege durch u parallel zur Axe x eine Ebene E, so schneidet diese den Ebenenbüschel x in einem Parallelstrahlenbüschel. Schneidet E die v in einem Punkte A, so lege durch A eine Gerade parallel u, welche den Parallelstrahlenbüschel in einer Punktreihe u_1, die mit u gleich ist (5), schneidet. Eine Ebene durch v und u_1 gelegt, schneidet den Ebenenbüschel x in einem Strahlenbüschel, in welchem $u_1 = u$ und v perspectivisch liegen. Schneidet dagegen E die v nicht, ist also mit ihr parallel, so lege durch v eine die Axe x schneidende Ebene, deren Schnitt mit dem Ebenenbüschel x ein Strahlenbüschel ist, welcher zu v perspectivisch liegt. Der Schnitt derselben Ebene mit dem genannten Parallelstrahlenbüschel ist eine mit v parallele, also ähnliche Punktreihe v_1, welche auch mit u ähnlich ist, weil beide in demselben Parallelstrahlenbüschel liegen. Daher sind auch v und u ähnlich und damit projectivisch (**10**).

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel [**3.** 1)].

c) Mit ein und derselben Punktreihe w.

Drehe den Strahlenbüschel U, welcher u auf w projicirt, um w, so dass er mit dem Strahlenbüschel V, welcher v auf w projicirt, nicht in derselben Ebene liegt, lege durch $U\,V$ als Axe einen mit w perspectivischen Ebenenbüschel, so liegen auch U, V und damit auch u, v in demselben perspectivisch, sind also nach 1) *a*) projectivisch.

2) Eine Punktreihe u und ein Strahlenbüschel S sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit ein und demselben Ebenenbüschel x.

Lege durch u parallel zu x eine Ebene, welche den Büschel x in einem Parallelstrahlenbüschel schneidet. In diesem liegt auch die Punktreihe v, in welcher jene Ebene den Büschel S schneidet; daher ist u mit v ähnlich und kann in den Strahlenbüschel S, in dem u liegt, perspectivisch gelegt werden (**10**).

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel T.

Mit dem Ebenenbüschel, der S auf T projicirt, ist S und die perspectivisch mit T liegende u perspectivisch, daher sind S und u projectivisch [2) *a*)].

c) Mit ein und derselben Punktreihe v.

Mit dem Ebenenbüschel, welcher den Strahlenbüschel, der u auf v projicirt, und den Strahlenbüschel S, der ebenfalls v projicirt, auf einander projicirt, liegen u und S perspectivisch, sind daher projectivisch [2) *a*)].

3) Eine Punktreihe u und ein Ebenenbüschel x sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit ein und demselben Ebenenbüschel y.

Der Ebenenbüschel y projicirt die Punktreihe u und einen Strahlenbüschel S, vermittelst dessen x mit y perspectivisch liegen. Da u und S perspectivisch in y liegen, sind sie [2) *a*)] projectivisch, oder es kann u perspectivisch in S gelegt werden; dann liegt es auch perspectivisch in x.

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel *S*.

Liegen *u* und *x* perspectivisch mit *S*, so liegen sie auch unter einander perspectivisch.

c) Mit ein und derselben Punktreihe *v*.

Lege durch *v* eine Ebene, welche den Ebenenbüschel *x* in einem Strahlenbüschel *S* schneidet. Da *u* und *S* mit *v* perspectivisch, so sind sie [2) *c*)] projectivisch, oder es kann *u* perspectivisch in *S* gelegt werden, worauf es auch perspectivisch in *x* liegt.

4) Zwei Strahlenbüschel *S* und *T* sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit ein und demselben Ebenenbüschel [3. 2)].

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel *R*.

S und *T* schneiden *R* in der mit ihm perspectivischen Lage in den Punktreihen *s* und *t*, oder es sind *S* oder *T* oder beide mit *R* parallel. In den letzteren Fällen ist *S* oder *T* oder es sind beide mit *R* gleich und dann sind jedenfalls *S* und *T* projectivisch. Im ersteren Falle sind *S* und *t* mit *s* perspectivisch, also [2) *c*)] projectivisch, und es kann dann *t* in *S* perspectivisch gelegt werden. Legt man *T* wieder mit diesem verlegten *t* perspectivisch in eine von der Ebene des *S* verschiedenen Ebene, so liegen *S* und *T* in ein und demselben Ebenenbüschel, dessen Axe *ST*, und welcher *t* projicirt.

c) Mit ein und derselben Punktreihe *u*.

Lege die mit *u* perspectivischen *S* und *T* in zwei verschiedene Ebenen, so sind sie beide mit dem Ebenenbüschel *ST*, welches *u* projicirt, projectivisch.

5) Ein Strahlenbüschel *S* und ein Ebenenbüschel *x* sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit ein und demselben Ebenenbüschel *y*..

Indem (Taf. I, Fig. 1) *x* mit *y* perspectivisch liegt, liegen beide mit demselben Strahlenbüschel *T* perspectivisch; ausserdem liegt *S* mit *y* perspectivisch. Sind die Strahlenbüschel *S* und *T* parallel, so sind sie gleich und *x* kann dann mit *S* perspectivisch gelegt werden. Andernfalls schneiden sich die Büschel *S* und *T* in einer Punktreihe *u*. Lege durch *u* parallel der Axe *x* eine Ebene, welche den Büschel *x* in einem Parallelstrahlenbüschel schneidet. Lege sodann senkrecht zur Axe *x* eine Ebene, welche den Büschel *x* in einem Strahlenbüschel *R*, und jenen Parallelstrahlenbüschel in einer mit *u* ähnlichen Punktreihe schneidet. Daher kann man *u* perspectivisch in *R* legen. Sodann lege über *u* in die Ebene des *R* den Büschel *S* perspectivisch, so dass *R* und *S* in derselben zu *x* senkrechten Ebene auf derselben Seite von *u* liegen (Taf. I, Fig. 2). Man suche nun in *R* und *S* die einander entsprechenden auf einander senkrechten Strahlenpaare, indem man aus dem Durchschnitte der die Strecke *RS* senkrecht halbirenden Geraden mit *u* einen Kreis durch *R* und *S* legt, welcher *u* in *A* und *B* schneide.

RA, RB und SA, SB sind dann die einander entsprechenden auf einander senkrechten Strahlenpaare. Liegt S in R, so liegt es sogleich perspectivisch in dem Ebenbüschel x. Liegt S nicht in R, so liegt es mit R auf demselben Halbkreise ARB; daher ist entweder Bogen und Sehne $SA < RA$, und dann ist Sehne $SB > RB$, oder es ist Bogen und Sehne $SA > RA$, und dann ist Sehne $SB < RB$. Lege nun ASB auf ARB, so dass $RA' = SA$ und $RB' = SB'$, so muss entweder A' innerhalb RA oder B' innerhalb RB liegen. Durch den innerhalb liegenden Punkt, in der Fig. 2 A', lege eine Gerade parallel zu u, so schneidet diese den Büschel R in der mit u ähnlichen Punktreihe u', welche RB in B'' trifft, so dass $RB'' < RB < RB'$. Durch u' lege eine mit der Axe x parallele Ebene, so schneidet diese den Büschel x in einem mit u' perspectivischen Parallelstrahlenbüschel. Drehe nun $A'RB'$ sammt dem nach R gelegten Strahlenbüschel S um RA', so bleibt RB' in der Ebene xB des Ebenenbüschels x. Drehe nach der einen oder der andern Seite so lange, bis B' in den durch B'' gehenden Strahl des durch u' gelegten Parallelstrahlenbüschels gelangt, was wegen $RB'' < RB'$ immer möglich, so liegt u perspectivisch mit u' (10) in demselben Parallelstrahlenbüschel. Dann liegt auch u perspectivisch im Büschel x, und da der Mittelpunkt S des die u projicirenden Büschels S in der Axe x, so liegt S perspectivisch in x. Es ist dies wegen der zweifachen möglichen Drehungsrichtung für RB' auf zwei Arten möglich.

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel T.

Der Ebenenbüschel x und der Strahlenbüschel S sind dann beide mit dem Ebenenbüschel ST perspectivisch, welcher S auf T projicirt, daher [5) *a*)] unter einander projectivisch.

c) Mit ein und derselben Punktreihe u.

x und S sind beide mit einem Strahlenbüschel T perspectivisch, welcher u von einem Punkte der Axe x aus projicirt, daher [5) *b*)] unter einander projectivisch.

6) Zwei Ebenenbüschel x und y sind unter einander projectivisch, wenn sie projectivisch sind

a) mit demselben Ebenenbüschel z.

Der Büschel x schneidet den perspectivisch liegenden z im Strahlenbüschel X, y den z in Y. Da nun X vermittelst z mit Y und da Y mit y perspectivisch ist, so sind auch [5) *b*)] X und y perspectivisch. Legt man dann X perspectivisch in y und dann x perspectivisch zu X, so liegen x und y vermitttelst X perspectivisch.

b) Mit ein und demselben Strahlenbüschel [3. 6)].

c) Mit ein und derselben Punktreihe u.

Lege zwei Strahlenbüschel, welche u projiciren, einen von einem Punkte X der Axe x, den andern von einem Punkte Y der Axe y, lege den Ebenenbüschel XY, welcher u projicirt, so ist x durch X und y durch Y perspectivisch mit XY, daher sind [6) *a*)] x und y projectivisch.

13. Satz. Wenn von einer Reihe von einförmigen Grundgebilden das zweite mit dem ersten und jedes folgende mit einem der vorhergehenden projectivisch ist, so sind alle unter einander projectivisch.

14. Satz. Wenn eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel projectivisch sein sollen, so ist das eine Gebilde durch drei Elemente, welche willkürlich sind und dreien willkürlichen des andern entsprechen, ganz bestimmt.

Den drei Elementen A, B, C der Punktreihe u (Taf. I, Fig. 3) entsprechen der Reihe nach die drei Elemente a, b, c des Strahlenbüschels S. Während ein Punkt die Strecken AB und BC durchläuft, auf deren jeder der jedesmalige dritte Punkt nicht liegen soll, muss der entsprechende Strahl die Winkel ab und bc durchlaufen, in deren jedem dann auch der jedesmalige dritte gegebene Strahl nicht liegen kann. Da also dieser Winkel ab nicht den Strahl c, also noch weniger den Strahl a, der seine eine Grenze bildet, zugleich in sich schliessen kann, da auch Winkel bc den a nicht einschliesst, so kann auch $ab + bc$ den Strahl a, der die eine Grenze dieses Summenwinkels ist, nicht zugleich in sich schliessen, es muss also $ab + bc < 2$ Rechte. Legt man nun den Winkel $ABD = ab$ und den Winkel $CBE = bc$ auf ein und derselben, z. B. der unteren, Seite von u an, so lassen dieselben einen Winkel $DBE = 2R$ — Winkel abc auf dieser Seite übrig. Beschreibt man dann auf der entgegengesetzten, der oberen, Seite von u zwei Kreisbogen, von denen der eine AB zur Sehne und BD zur Tangente und der andere BC zur Sehne und BE zur Tangente hat, so fasst der erstere den über AB stehenden Winkel ab, und der letztere den über BC stehenden Winkel bc. Da nun diese Kreise den Punkt B gemein, hier aber verschiedene Tangenten haben, so müssen sie sich noch in einem zweiten Punkte schneiden. Da ferner der erste Kreis ganz mit A auf derselben Seite von DB liegt, und der zweite ganz mit C auf derselben Seite von BE, so können sie nur in $D'BE'$, dem Scheitelwinkel von DBE, also auf der oberen Seite von u oder auf den die Winkel ab und bd fassenden Bogen den zweiten gemeinschaftlichen Punkt S' haben. Es gibt daher immer einen Strahlenbüschel $S'(A, B, C)$, welcher mit dem gegebenen a, b, c gleich ist. Wählt man stets die mit den eben angenommenen entgegengesetzten Seiten von u, so ergibt sich noch S'' als möglicher Ort des Mittelpunktes des mit u perspectivischen Strahlenbüschels S. Beide Punkte S' und S'' sind aber in Bezug auf u offenbar symmetrisch, so dass der Strahlenbüschel S' sammt dem darin perspectivisch liegenden u mit demjenigen S'' sammt u zur Deckung gebracht werden kann. Daraus folgt, dass nur einerlei perspectivische Lage von S und u nach den gegebenen drei Paaren entsprechender Elemente möglich ist. Für jedes vierte Element des einen Gebildes folgt dann nur ein viertes entsprechendes Element des andern, was zu beweisen war.

15. Satz. Können zwei gleichartige projectivische einförmige Grundgebilde mit drei Paaren entsprechender Elemente zur Deckung gebracht werden, so decken sie sich mit allen Paaren.

Es seien die beiden Gebilde die Punktreihen $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$, welche mit A, B, C und A', B', C' zur Deckung gebracht werden können. Dann kann in einen zu $ABCD\ldots$ perspectivisch gelegten Strahlenbüschel S auch die Reihe $A'B'C'D'\ldots$, die ebenfalls mit S projectivisch, perspectivisch gelegt werden. Dies geschehe mit den Elementen A', B', C', und es ist auf der Seite von S, auf welcher ABC liegt, nur auf eine Art möglich, nämlich so, dass A, A', sowie B, B' und C, C' sich decken. Dann liegen beide Punktreihen auf einander und perspectivisch zu S, so dass jede andern entsprechenden Punkte auf dem Schnittpunkte des einen entsprechenden Strahles mit dem gemeinschaftlichen Träger der beiden Punktreihen, also in einem Punkte liegen. — Sind die Gebilde zwei Strahlenbüschel, so lege sie mit Deckung der drei Paare entsprechender Strahlen auf einander, schneide sie durch eine Gerade, so projiciren sie auf diese zwei unter einander projectivische Punktreihen, in denen drei, also alle Paare entsprechender Elemente sich decken. Dann decken sich auch alle entsprechenden Elementenpaare der Büschel, weil sie durch den gemeinschaftlichen Scheitel und denselben Punkt der Schnittgeraden festgelegt sind. — Sind die Gebilde zwei Ebenenbüschel, so lege sie mit Deckung der drei Paare entsprechender Ebenen auf einander, schneide sie durch eine Ebene, so projiciren sie auf diese zwei unter einander projectivische Strahlenbüschel, in denen drei, also alle Paare entsprechender Elemente sich decken. Dann decken sich auch alle Paare entsprechender Elemente der Ebenenbüschel.

16. Satz. Wenn zwei einförmige Grundgebilde mit einander projectivisch sein sollen, so ist das eine Gebilde durch drei Elemente, welche willkürlich sind und dreien willkürlichen des andern entsprechen, ganz bestimmt.

Denn gäbe es mehrere Gebilde von der Art des ersteren, welche mit dem zweiten projectivisch wären, so müsste es auch mehrere unter einander projectivische Gebilde derselben Art geben, welche drei Paare entsprechender Elemente gemein hätten, was nach dem vorhergehenden Satze nicht möglich ist. Dass aber die drei Elemente in beiden Gebilden, welche sich entsprechen sollen, willkürlich sind, folgt daraus, dass eine Punktreihe, welche mit beiden projectivischen Gebilden projectivisch ist, mit drei willkürlichen Punkten (**14**) perspectivisch zu drei willkürlichen Elementen eines Strahlenbüschels, also auch eines Ebenenbüschels, sowie einer Punktreihe gelegt werden kann.

17. Satz. Zwei gleichartige projectivische einförmige Grundgebilde, welche nicht dieselbe Gerade zum Träger oder denselben Mittelpunkt oder dieselbe Axe haben, liegen perspectivisch, wenn ein Element des einen das entsprechende

Element des andern deckt, vorausgesetzt, dass die zwei Strahlenbüschel, wenn es solche sind, in einer und derselben Ebene liegen.

Sind die beiden Gebilde die Punktreihen $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ und decken sich A und A', so bestimme den Schnittpunkt S der Geraden BB' und CC'. Von diesem aus werden die beiden Punktreihen durch zwei projectivische Strahlenbüschel projicirt, welche, da sie die drei Strahlen BB', CC' und AS gemein haben, sich ganz decken. Es fallen demnach die Strahlen von S, welche zwei entsprechende Punkte der Reihen projiciren, zusammen, und beide Punktreihen liegen perspectivisch im Strahlenbüschel S.— Sind die Gebilde zwei Strahlenbüschel $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$, die in derselben Ebene liegen, und decken sich a und a', so verbinde die Punkte bb', cc' durch eine Gerade u. Auf diese projiciren die beiden Strahlenbüschel zwei projectivische Punktreihen, welche, da sie die drei Punkte bb', cc' und au gemein haben, sich ganz decken. Es fallen demnach die Schnitte zweier entsprechender Strahlen mit u zusammen, und beide Büschel liegen perspectivisch über der Punktreihe u. — Sind die Gebilde zwei Ebenenbüschel $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, und decken sich A und A', so schneiden sich in dieser gemeinsamen Ebene die beiden Axen im Punkte S, der auch im Unendlichen liegen kann. Die Ebenen B und B', sowie C und C' schneiden sich in zwei Geraden, welche durch S gehen. Lege eine Ebene T durch diese beiden Geraden, so projiciren die beiden Ebenenbüschel auf dieselbe zwei Strahlenbüschel, welche, da sie die drei Strahlen BB', CC' und AT' gemein haben, ganz zusammenfallen. Ueber diesem Strahlenbüschel stehen die beiden Ebenenbüschel perspectivisch.

Die Sätze über die harmonischen Gebilde.

18. Begriff. Eine harmonische Punktreihe ist eine Reihe von vier Punkten in einer Geraden, welche mit einer zweiten Punktreihe projectivisch ist, die aus der ersten durch Vertauschung zweier nicht auf einander folgender Punkte gebildet ist.

Sind A, B, C, D die vier Punkte in der Reihenfolge, wie geschrieben, so muss, damit die Reihe harmonisch,

$$ABCD \;\pi\; CBAD$$

und

$$ABCD \;\pi\; ADCB.$$

19. Satz. Eine harmonische Punktreihe $ABCD$ liegt so, dass, wenn man ein Viereck construirt, von dem die Schnittpunkte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten in zwei nicht auf einander folgenden Punkten A, C liegen, und dessen eine Diagonale durch einen dritten Punkt B geht, dass dann die andere Diagonale durch den vierten Punkt D geht.

Um ein solches Viereck zu construiren, ziehe die Diagonale durch B (Taf. I, Fig. 4) willkürlich, nehme auf ihr die zwei Eckpunkte S und S' will-

kürlich an, so ist das Viereck bestimmt. Die Seiten SA, $S'C$ liefern den dritten Eckpunkt E, SC, $S'A$ den vierten G des Vierecks $SES'G$. Die zweite Diagonale EG muss dann durch D gehen. Denn der Schnittpunkt D der EG mit ABC ist derjenige Punkt der ABC, welcher zunächst der einen Bedingung des Begriffs $ABCD \pi CBAD$ genügt. Es ist nämlich, wenn F der Schnittpunkt der Diagonalen, durch die Projection aus S: $ABCD \pi EFGD$,
und aus S': $CBAD \pi EFGD$;
daher $ABCD \pi CBAD$.
Jeder andere Punkt D' der ABC genügt aber dieser Bedingung nicht. Denn, wenn D_1 und D_2 die Projectionen des D' auf EG aus S und S' sind, so ist aus S: $ABCD' \pi EFGD_1$,
aus S': $CBAD' \pi EFGD_2$.
Es kann daher nur dann $ABCD' \pi CBAD'$, wenn $EFGD_1 \pi EFGD_2$, und dies kann nach 15. nur dann, wenn D_1 in D_2 fällt. Dies tritt nur ein, wenn D' in D oder wenn SD' in $S'D'$, also D' in B fällt. Der letzere Fall ist aber deswegen nicht zuzulassen, weil dann A und C gegen die Voraussetzung auf einander folgende Punkte wären.

Da es demnach nur den einzigen Punkt D gibt, welcher der ersten Bedingung des Begriffes genügt, jedes Viereck von der angegebenen Construction aber einen Punkt D liefert, der derselben Bedingung genügt, so müssen alle derartige Vierecke denselben Punkt D liefern.

Es ist nun noch zu beweisen, dass $ABCD$ auch der zweiten Bedingung des Begriffes einer harmonischen Punktreihe

$$ABCD \pi ADCB$$

genügt. Dies ist der Fall, wenn B und D die Schnittpunkte der Paare gegenüberliegender Seiten eines Vierecks sind, dessen Diagonalen durch A und C gehen. Ein solches Viereck wird aus dem vorigen $SES'G$ (Taf. I, Fig. 5) gewonnen, wenn man den Schnittpunkt F seiner Diagonalen mit A und C verbindet. Diese Linien treffen die Seiten des vorigen Vierecks in den Ecken des neuen. Schneide AF die ES' in H, die GS in K, schneide CF die ES in L, die GS' in I, so gehen die Diagonalen des Vierecks $HIKL$ durch A und C, und es wird behauptet, dass die gegenüberliegenden Seiten LH und IK sich in B, HI und KL sich in D schneiden. Denn projicirt man die ganze Figur auf eine Ebene, so dass die Projection von $ABCD$, die wir mit $A_1B_1C_1D_1$ (und entsprechend bei den andern Punkten) bezeichnen wollen, ins Unendliche fällt, so wird $S_1E_1S'_1G_1$ ein Parallelogramm, F_1 sein Mittelpunkt, F_1A_1, F_1C_1 Parallele zu je zwei Seiten, L_1, H_1, I_1, K_1 die Mitten der Seiten des Parallelogramms. Daher wird

$$L_1H_1 \;//\; S_1S'_1 \;//\; K_1I_1$$

und

$$H_1I_1 \;//\; E_1G_1 \;//\; L_1K_1,$$

oder die ersten drei Geraden scheiden die unendlich ferne Gerade A_1C_1 in demselben Punkte B_1, die letzten drei in demselben Punkte D_1. Daher

müssen auch LH, SS', KI die Gerade AC in demselben Punkte B, HI, EG, LK in D schneiden.

Anmerkung. Wenn vorher bewiesen wurde, dass jede Reihe von vier Punkten A, B, C, D in einer Geraden mit einer Reihe projectivisch ist, welche durch Vertauschung der Elemente zweier beliebiger Paare aus der ersten gebildet wird, dass also unter Anderm

$$CBAD \;\pi\; ADCB,$$

so kann die zweite Hälfte des obigen Beweises einfach so geführt werden. Bewiesen wurde $ABCD \;\pi\; CBAD.$

Daher durch Verbindung mit dem Obigen:

$$ABCD \;\pi\; ADCB.$$

20. Begriff. Jeder Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel von vier Elementen, welcher mit einer harmonischen Punktreihe projectivisch ist, heisst harmonisch. Von vier harmonischen Elementen in jeder Art von einförmigen Grundgebilden nennt man zwei nicht auf einander folgende durch die beiden andern harmonisch getrennt.

21. Satz. Jede Punktreihe, die mit einem harmonischen einförmigen Grundgebilde projectivisch ist, ist harmonisch.

Das Gebilde ist dadurch harmonisch, dass es mit einer harmonischen Punktreihe $ABCD$ projectivisch ist. Eine andre Punktreihe $A'B'C'D'$, die mit ihm projectivisch ist, ist es auch mit $ABCD$, oder es ist

$$A'B'C'D' \;\pi\; ABCD.$$

Da die Reihenfolge hierbei gleichgiltig, wenn sich nur immer dieselben Elemente entsprechen, so ist auch

$$C'B'A'D' \;\pi\; CBAD,$$
$$A'D'C'B' \;\pi\; ADCB.$$

Da $ABCD$ harmonisch, so ist

$$ABCD \;\pi\; CBAD \;\pi\; ADCB,$$

woraus unter Beachtung der drei vorhergehenden Projectivitäten

$$A'B'C'D' \;\pi\; C'B'A'D' \;\pi\; A'D'C'B';$$

oder $A'B'C'D'$ ist harmonisch.

22. Erörterung über die harmonische Punktreihe. Es soll untersucht werden, wie in einer harmonischen Punktreihe, von der zwei Punkte A und C fest bleiben und der dritte B sich bewegt, die Bewegung des vierten D von der des dritten abhängt. Zu dem Ende müssen wir das zu bestimmende Viereck sich verändern lassen. Den willkürlichen Punkt S (Taf. I, Fig. 6) wollen wir der Einfachheit halber so annehmen, dass $SA = SC$. Seien nun die Seiten SA, SC, CE allen Vierecken gemein, sei B_2 eine beliebige Lage des B, so schneide die Diagonale SB_2 mit CE in S'_2, ziehe die vierte Seite S'_2A, welche mit SC den Eckpunkt G_2 bestimmt; die zweite Diagonale EG_2 bestimmt dann auf AC den Punkt D_2. Sobald B in der Mitte B_1 von AC liegt, fällt D nach D_1 ins Unendliche; denn dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $AB_1S'_1$ und $CB_1S'_1$ congruent, daher auch die

Dreiecke $ES_1S'_1$ und $G_1S_1S'_1$, woraus $EG_1 \perp SB_1$ oder $EG_1 // AC$ folgt. Bewegt sich dann B durch die endliche Strecke B_1C, von B_1 nach C, so geht S' von S'_1 nach C, G von G_1 nach C und D von D_1 im Unendlichen nach C, ohne A zu durchlaufen. D und B nähern sich also in entgegengesetzter Richtung dem C und fallen endlich darin zusammen. Alle übrigen gegenseitigen Lagen von B und D sind dieselben, wie die eben betrachteten oder symmetrisch mit ihnen in Bezug auf den Mittelpunkt von AC. Denn aus den eben betrachteten Gestalten des veränderlichen Vierecks ergibt sich, dass B und D ihre Stellen vertauschen können, und aus den symmetrischen Gestalten desselben in Bezug auf die durch B_1 zu DC gelegte Senkrechte, bei welcher G der feste und E der bewegliche Eckpunkt wird, folgt, dass B und D symmetrische Lagen zu ihren früheren in Bezug auf die Mitte von AC annehmen können. Während demnach B die ganze Gerade AC in der Reihenfolge der Punkte ∞, A, B, C, ∞ durchläuft, durchläuft D dieselbe in der entsprechenden Reihenfolge B_1, A, ∞, C, B_1.

23. Erörterung über den harmonischen Strahlenbüschel. Es soll untersucht werden, wie in einem harmonischen Strahlenbüschel S (Taf. I, Fig. 7), von welchem zwei Strahlen a und c fest bleiben und der dritte b sich bewegt, die Bewegung des vierten d von der des dritten abhängt. Der Schnitt des Büschels mit einer beliebigen Geraden, die wir der Einfachheit halber unter gleichen Winkeln mit a und c neigen wollen, ist eine harmonische Punktreihe $ABCD$. Aus der gegenseitigen Bewegung des B und D folgt die von b und d. Bildet der Strahl b in der Lage b_1 gleiche Winkel mit a und c, so bildet d in d_1 ebenfalls gleiche Winkel mit a und c. Denn dem b_1 entspricht der Mittelpunkt B_1 der AC, zu welchem der vierte harmonische Punkt D_1 im Unendlichen gehört. Der Strahl d_1 ist daher mit AC parallel oder auf b_1 senkrecht, bildet also ebenfalls gleiche Winkel mit a und c. Bewegt sich nun b von b_1 nach c, so geht B von B_1 nach C, D von D_1 nach C, also d von d_1 nach c, jeder Punkt und Strahl, ohne A und a zu durchlaufen. Die entsprechende Bewegung der Strahlen in den übrigen Winkeln wiederholt sich noch dreimal, so dass, wenn b_1 und d_1 die Halbirungsstrahlen der beiden von a und c gebildeten Winkel sind, folgendes der entsprechende Lauf von b und d ist. b durchläuft der Reihe nach b_1, a, d_1, c, b_1 und d gleichzeitig d_1, a, b_1, c, d_1.

Das Umgekehrte des obigen Ergebnisses gilt ebenfalls, dass nämlich, wenn zwei Strahlen b, d eines harmonischen Strahlenbüschel auf einander senkrecht stehen, die zwei übrigen a, c gleiche Winkel mit ihnen bilden. Denn legt man eine schneidende Gerade parallel mit dem einen d, also senkrecht zum andern b der beiden ersteren Strahlen, so liegt in der entstehenden harmonischen Punktreihe $ABCD$ der Punkt D im Unendlichen, also B in der Mitte zwischen A und C. Daraus folgt, dass b und d gleiche Winkel mit a und c bilden.

24. Erörterung über den harmonischen Ebenenbüschel. Da ein zur Axe senkrechter Schnitt desselben einen harmonischen Strahlenbüschel liefert, dessen Winkel auch die Winkel des Ebenenbüschels sind, so gelten die Gesetze der Bewegung und der durch Winkel bestimmten gegenseitigen Lage, welche für den Strahlenbüschel gefunden wurden, auch für den Ebenenbüschel.

II.

Ueber den mittleren Abstand ebener Linien von einem Punkte.

Von Dr. Wetzig,
Oberlehrer an der Realschule zu Leipzig.

(Hierzu Tafel I, Figur 8 bis 10.)

Zu den folgenden Betrachtungen gab die Abhandlung des Herrn Prof. Drobisch Veranlassung: „Ueber die mittleren Radien der Linien, Flächen und Körper"*), in welcher unter dem mittleren Radius einer Linie das arithmetische Mittel der Abstände eines Punktes von den in gleichen Bogenabständen gelegenen Punkten der Linie verstanden wird. Obgleich diese Annahme der Vertheilung der Punkte als die nächstliegende erscheint, so ist man offenbar berechtigt, auch andere Gesetze derselben zu Grunde zu legen z. B., wenn man die Linie als Bahn eines sich bewegenden Punktes betrachtet, die Zeit als unabhängige Variable zu nehmen, so dass die Orte, die der Punkt nach den auf einander folgenden gleichen Zeitelementen einnimmt, den mittleren Abstand bestimmen. Demnach wäre der mittlere Abstand eines Planeten von der Sonne das arithmetische Mittel aller Abstände, die mit einander gleiche Flächenelemente einschliessen (wo sich allerdings nicht die grosse Halbaxe, sondern die halbe Differenz der dreifachen Halbaxe und der Ordinate im Brennpunkte als solcher ergiebt). Bewegt sich ein Punkt mit constanter Winkelgeschwindigkeit gegen einen festen Punkt O, so wird man als mittleren Abstand seiner Bahnlinie von O das Mittel aller unter gleichen Winkelabständen gelegenen Punkte betrachten. Diese letztere Vertheilungsweise der Punkte, die sich durch grosse Einfachheit der Resultate auszeichnet, ist im Folgenden für ebene krumme Linien in Bezug auf einen in ihrer Ebene liegenden Punkt zu Grunde gelegt; jedoch enthält §. 5 auch einige Zusätze in Bezug auf eine Vertheilung

*) Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften vom 1. Juli 1858.



der Punkte unter gleichen Bogenabständen. Da einige Eigenschaften der Fusspunktlinien in Anwendung kommen, so gebe ich zunächst im ersten Paragraph eine kurze und sehr einfache Ableitung derselben.*)

§. 1.

1. Sind PQ, QR, RS (Taf. I, Fig. 8) Seiten eines ebenen Vielecks, der Basis, sind P_1, Q_1, R_1 die Fusspunkte der Senkrechten, die man von einem festen Punkte O seiner Ebene, dem Pol, auf sie fällt, so sind P_1, Q_1, R_1 Ecken des Fusspunktvielecks. Von diesen liegen P_1 und Q_1 auf einem Kreise vom Durchmesser OQ, Q_1 und R_1 auf einem solchen vom Durchmesser OR; daher hat man die gleichen Peripheriewinkel

$$1)\qquad \angle P_1QQ_1 = \angle P_1OQ_1,$$

d. h. der Seitenwinkel der Basis ist gleich dem zugehörigen Winkel der Eckenabstände des Fusspunktvielecks.

Ferner ist

$$2)\qquad \angle OQP = \angle OQ_1P_1,$$

d. h. der Winkel des Eckenabstandes mit der Seite in der Basis ist gleich demselben Winkel im Fusspunktvieleck.

Endlich hat man als Seitenwinkel im Fusspunktvieleck

$$\angle P_1Q_1M = 180^\circ - \angle P_1Q_1R_1;$$

$$\angle P_1Q_1R_1 = \angle P_1Q_1O + \angle OQ_1R_1 = \angle P_1QO + 180^\circ - \angle ORR_1,$$

$$\angle P_1Q_1M = \angle ORR_1 - \angle P_1QO$$

$$= \angle ORQ + \angle Q_1RR_1 - \angle OQQ_1 + \angle P_1QQ_1,$$

$$3)\qquad \angle P_1Q_1M = \angle P_1OQ_1 + \angle Q_1OR_1 - \angle QOR.$$

Geht man vom Vieleck zur Curve über, so ergiebt sich aus diesen drei Gleichungen Folgendes:

Der Winkel zweier auf einander folgender Tangenten der Basis ist gleich dem zugehörigen der Vectoren der Fusspunktlinie, den wir $d\varphi_1$ nennen wollen. Da derselbe auch gleich dem zweier benachbarter Normalen der Basis ist, die sich in der Entfernung ϱ, dem Krümmungshalbmesser der Basis, schneiden, so ist $\varrho\, d\varphi_1$ das Bogenelement der Basis, das wir ds nennen; also

$$ds = \varrho\, d\varphi_1,$$

woraus, wenn α den Winkel PQO der Tangente mit dem Vector r und $d\varphi$

*) Eine ausführlichere Behandlung der Fusspunktlinien habe ich in dieser Zeitschrift Bd. IV, p. 319 gegeben. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, dass ich erst nach dem Erscheinen derselben durch die gleichzeitige Abhandlung von Hirst über denselben Gegenstand (*Annali di Matematica t. II*) darauf aufmerksam gemacht wurde, dass schon Roberts Fusspunktlinien positiver und negativer Ordnung hinsichtlich ihrer Rectification betrachtet hat (*Journal de math. t. X* und *t. XV*). Indess hat schon Maclaurin, wie Roberts neuerdings in den *Nouv. Ann. de math.* mittheilte, einen Theil dieser Resultate gefunden (*Philosophical transactions* No. 356, 1718).

den Winkel QOR zweier benachbarten Vectoren der Basis bezeichnet, wegen $ds = \frac{r\,d\varphi}{\sin\alpha}$ sich ergiebt

$$4)\qquad d\varphi_1 = \frac{r}{\varrho \sin\alpha}\,d\varphi.$$

Die Gleichung 2) lehrt, dass der Winkel α des Vectors mit der Tangente in den entsprechenden Punkten der Basis und der Fusspunktlinie derselbe ist. Sind daher r_1 und ds_1 Vector und Bogenelement der Fusspunktlinie, wo $r_1 = r \sin\alpha$, so hat man

$$5)\qquad ds_1 = \frac{r_1\,d\varphi_1}{\sin\alpha} = r\,d\varphi_1,$$

woraus in Verbindung mit $ds = \varrho\,d\varphi_1$ folgt

$$6)\qquad ds_1 = \frac{r}{\varrho}\,ds.$$

Wenn man in Gl. 3) den Punkt R so wählt, dass $\angle P_1 O Q_1 = \angle Q_1 O R_1$ ist, so ergiebt sich als Winkel zweier benachbarten Normalen der Fusspunktlinie, der passend mit $d\varphi_2$ bezeichnet wird,

$$7)\qquad d\varphi_2 = 2\,d\varphi_1 - d\varphi.$$

Daher ist

$$ds_1 = \varrho_1\,d\varphi_2 = \varrho_1(2\,d\varphi_1 - d\varphi).$$

Hieraus folgt durch Division mit $d\varphi_1$ und Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 5)

$$r = \varrho_1\left(2 - \frac{\varrho \sin\alpha}{r}\right)$$

oder

$$\varrho_1 = \frac{r^2}{2r - \varrho \sin\alpha},$$

welche Gleichung den Krümmungshalbmesser der Fusspunktlinie durch den der Basis ausdrückt.

2. Aus diesen Gleichungen lassen sich mit Leichtigkeit die entsprechenden für die Fusspunktlinie n^{ter} Ordnung herleiten, d. i. derjenigen Linie, die man erhält, wenn man von der ersten Fusspunktlinie wieder die Fusspunktlinie in Bezug auf denselben Pol construirt etc. und diese Operation n mal wiederholt. Die Ordnungszahl n kann auch negativ sein, indem in Bezug auf die Fusspunktlinie von der Ordnung $+n$ die Basis „Fusspunktlinie von der Ordnung $-n$" heisst. Haben r_n, $d\varphi^n$ u. s. w. für einen Punkt der n^{ten} Fusspunktlinie dieselbe Bedeutung, wie $r\,d\varphi$ u. s. w. für den entsprechenden Punkt der Basis, so ist nach Gl. 7)

$$\begin{aligned} d\varphi_3 &= 2\,d\varphi_2 - d\varphi_1 = 3\,d\varphi_1 - 2\,d\varphi \\ d\varphi_4 &= 2\,d\varphi_3 - d\varphi_2 = 4\,d\varphi_1 - 3\,d\varphi \\ &\vdots \\ d\varphi_n &= n\,d\varphi_1 - (n-1)\,d\varphi. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich durch Division mit $d\varphi$

$$d\varphi_n = d\varphi\left(\frac{r}{\varrho \sin\alpha} - n + 1\right).$$

Da ferner nach Gl. 4)

$$\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = \frac{d\varphi_n}{d\varphi_{n+1}},$$

wo $r_n = r \sin^n \alpha$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von ϱ_n

$$\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = \frac{\frac{r}{\varrho \sin\alpha} - n + 1}{\frac{r}{\varrho \sin\alpha} - n}.$$

Wir übergehen andere leicht herzuleitende Relationen.

§. 2.

Nach diesen Bemerkungen über Fusspunktlinien gehen wir zum eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung über.

1. Wenn die Punkte P_1 und P_2 von einem Punkte O, mit welchem sie nicht in einer Geraden liegen, die Abstände $OP_1 = r_1$ und $OP_2 = r_2$ haben, diese den Winkel $\overline{OP_2}\,\overline{OP_1} = r_2 r_1$ einschliessen, und ihre in P_1 und P_2 errichteten Normalen sich in Q_1 schneiden, so ist, da die Summe der Seitenprojectionen eines Vielecks auf eine beliebige Gerade Null giebt,

$$\begin{aligned} 1)\qquad & OP_1 + P_1Q_1 . \cos \overline{P_1Q_1}\,\overline{OP_1} + Q_1P_2 . \cos \overline{Q_1P_2}\,\overline{OP_1} \\ & + P_2O . \cos \overline{P_2O}\,\overline{OP_1} = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist

$$\cos \overline{P_1Q_1}\,\overline{OP_1} = 0, \quad \cos \overline{P_2O}\,\overline{OP_1} = -\cos r_2 r_1,$$
$$\overline{Q_1P_2}\,\overline{OP_1} = \overline{Q_1P_2}\,\overline{OP_2} + \overline{OP_2}\,\overline{OP_1}.$$

Wird nun die Drehungsrichtung von r_1 nach r_2 als positiv angenommen, so ist, wenn Q_1P_2 diese Richtung hat, der Winkel $\overline{Q_1P_2}\,\overline{OP_2} = 90^\circ$, wenn die entgegengesetzte $c_1 = 270^\circ$, daher $\cos \overline{Q_1P_2}\,\overline{OP_1} = \mp \sin r_2 r_1$. Demnach folgt aus 1) die Gleichung

$$2)\qquad r_1 - Q_1P_2 \sin r_2 r_1 - r_2 \cos r_2 r_1 = 0,$$

welche allgemein gilt, wenn man Q_1P_2 das Vorzeichen des Winkels Q_1OP_2 giebt. Bildet man die entsprechende Gleichung, indem man OP_2 als Nulllinie annimmt und giebt man der Strecke P_1Q_1 das Vorzeichen des Winkels P_1OQ_1, so hat man folgende zwei Formeln

$$r_2 = r_1 \cos r_2 r_1 + P_1Q_1 \sin r_2 r_1,$$
$$r_1 = r_2 \cos r_2 r_1 + Q_1P_2 \sin r_2 r_1.$$

Sind nun in der Ebene $n+1$ Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n+1}$ gegeben, deren Winkelabstände gegen einen Punkt O der Ebene dieselbe Grösse haben, nämlich $P_2OP_1 = P_3OP_2 = \ldots = \frac{\varphi}{n}$, so dass $P_{n+1}OP_1 = \varphi$ ist, und schnei-

den sich die Senkrechten auf OP_1, OP_2, ... OP_{n+1} der Reihe nach in den Punkten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, so ist $P_1 P_2 P_3 \ldots$ das Fusspunktvieleck von $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ in Bezug auf den Pol O, und es gelten die Gleichungen

$$\text{3)}\quad \begin{aligned} r_2 &= r_1 \cos\frac{\varphi}{n} + P_1 Q_1 \sin\frac{\varphi}{n} \\ r_1 &= r_2 \cos\frac{\varphi}{n} + Q_1 P_2 \sin\frac{\varphi}{n} \\ r_3 &= r_2 \cos\frac{\varphi}{n} + P_2 Q_2 \sin\frac{\varphi}{n} \\ r_2 &= r_3 \cos\frac{\varphi}{n} + Q_2 P_3 \sin\frac{\varphi}{n} \\ &\vdots \\ r_{n+1} &= r_n \cos\frac{\varphi}{n} + P_n Q_n \sin\frac{\varphi}{n} \\ r_n &= r_{n+1} \cos\frac{\varphi}{n} + Q_n P_{n+1} \sin\frac{\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Ziehen wir zunächst den einfacheren Fall in Betracht, dass die gegebenen Punkte ein **geschlossenes Vieleck** bilden, indem P_{n+1} mit P_1 zusammenfällt, und dass O innerhalb desselben liegt, also $\varphi = 2k\pi$ ist (wo k eine ganze Zahl), so erhält man durch Addition der vorstehenden Gleichungen

$$2(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= (P_1 Q_1 + Q_1 P_2 + P_2 Q_2 + \ldots + Q_n P_1) \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Bezeichnet ϱ den mittleren Abstand des Punktes O von den Punkten P (nicht zu verwechseln mit dem ϱ des vorigen Paragraphen, dem Krümmungshalbmesser), also

$$\varrho = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n},$$

und

$$s = P_1 Q_1 + Q_1 P_2 + \ldots + Q_n P_1$$

den Umfang des $(-1)^{\text{ten}}$ Fusspunktvielecks des gegebenen Vielecks, also den Umfang $Q_1 Q_2 \ldots Q_n Q_1$, so folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\text{4)}\quad 2n\varrho \tan\frac{k\pi}{n} = s.$$

In dieser Gleichung bedeutet die linke Seite den Umfang des regelmässigen n Ecks, dessen eingeschriebener Kreis zum Halbmesser den mittleren Abstand ϱ hat; derselbe ist also dem Umfange des $(-1)^{\text{ten}}$ Fusspunktvielecks gleich.

Geht das Vieleck in eine Curve, so geht das regelmässige n Eck in einen Kreis über, und man erhält den Satz:

Der Kreis, der den mittleren Abstand einer geschlossenen Linie von einem innerhalb derselben liegenden Punkt zum Halbmesser hat, ist gleich dem Umfange ihrer $(-1)^{ten}$ Fusspunktlinie,

$$2\varrho\pi = s. \tag{5}$$

Macht die gegebene Linie nicht, wie dabei vorausgesetzt ist, einen, sondern k Umgänge, so ist

$$2k\varrho\pi = s.$$

Umgekehrt ist der Umfang einer geschlossenen Linie gleich dem Kreise, der zum Halbmesser den mittleren Abstand ihrer Fusspunktlinie in Bezug auf beliebigen innerhalb liegenden Pol O hat. Daher haben alle Fusspunktlinien einer geschlossenen Linie, die sich durch verschiedene Lage des Pols innerhalb derselben ergeben, von diesem Pol denselben mittleren Abstand.

Einer besonderen Betrachtung bedarf jedesmal der Fall, dass vom Pol sich eine Tangente an die gegebene Linie legen lässt, weil für den Berührungspunkt die $(-1)^{te}$ Fusspunktlinie einen unendlichen Vector erhält.

2. In dem allgemeinen Falle, dass die Punkte $P_1, P_2 \ldots\ldots P_{n+1}$ kein geschlossenes Vieleck bilden, erhält man durch Addition der Gleichungen 3)

$$[2(r_1 + r_2 + \ldots\ldots r_{n+1}) - (r_1 + r_{n+1})]\left(1 - \cos\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$= [(Q_1P_2 + P_2Q_2 + \ldots + P_nQ_n) + (P_1Q_1 + Q_nP_{n+1})]\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Bezeichnet

$$\varrho = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n+1}}{n+1}$$

den mittleren Abstand, so folgt

$$2n\varrho\, tang\frac{\varphi}{2n} - (r_1 + r_{n+1} - 2\varrho)\, tang\frac{\varphi}{2n}$$

$$= (Q_1P_2 + \ldots\ldots + P_nQ_n) + (P_1Q_1 + Q_nP_{n+1}).$$

In dieser Gleichung haben

$$2n\varrho\, tang\frac{\varphi}{2n} \text{ und die Summe } s = Q_1P_2 + \ldots = P_nQ_n$$

ähnliche Bedeutung, wie die analogen Ausdrücke vorhin. Geht das Vieleck in eine Curve, so gehen s in das dem gegebenen Curvenstücke P_1P_{n+1} entsprechende Stück der $(-1)^{ten}$ Fusspunktlinie, $2n\varrho\, tang\frac{\varphi}{2n}$ in den mit dem mittleren Abstand ϱ und dem Centriwinkel φ beschriebenen Kreisbogen $\varrho\varphi$, sowie P_1Q_1 und Q_nP_{n+1} in die Strecken der Tangenten im Anfangs- und Endpunkte der $(-1)^{ten}$ Fusspunktlinie über, die zwischen dieser und der Basis liegen. Daher ist dann, wenn P_0 und P' Anfangs- und Endpunkt

der gegebenen Linie, Q_0 und Q' die entsprechenden Punkte der $(-1)^{\text{ten}}$ Fusspunktlinie bezeichnen.

6) $$\varrho\varphi = P_0 Q_0 + arc\, Q_0 Q' + Q' P',$$

in welcher Gleichung die oben gegebenen Vorzeichenregeln zu berücksichtigen sind. So ist z. B. in Taf. I, Fig. 9 $Q_0 Q'$ positiv und sind beide Tangentenstrecken negativ.

3. Zur allgemeinen Bestimmung von ϱ dient das Integral $\int r\, d\varphi$. Denn bezeichnet $\varDelta\varphi = \frac{\varphi}{n}$ den gleichen Winkelabstand der Vectoren r und Σr die Summe der letzteren, so ist

$$\varrho = \frac{\Sigma r}{n} = \frac{\varDelta\varphi\, \Sigma r}{\varphi} = \frac{\Sigma r\, \varDelta\varphi}{\varphi}.$$

Geht man vom Vieleck zur Curve über, indem man n über alle Grenzen wachsen lässt, so wird $\Sigma r\, \varDelta\varphi$ zu $\int r\, d\varphi$, und man hat demnach

7) $$\varrho\varphi = \int_0^{\varphi} r\, d\varphi.$$

4. Aus den bekannten mittleren Abständen mehrerer Bogenstücke von einem Punkte O lässt sich leicht ihr mittlerer Gesammtabstand von O finden. Denn bilden die gegebenen Punkte P mehrere Gruppen von n', n'', ... Punkten, zu denen die Winkel φ', φ'', ... gehören, so dass die gleichen Winkelabstände $\frac{\varphi'}{n'} = \frac{\varphi''}{n''} = \ldots$ sind, bezeichnen ϱ', ϱ'' ... die mittleren Abstände dieser Gruppen, r', r'' ... die Abstände ihrer einzelnen Punkte, ist ϱ der mittlere Abstand sämmtlicher Punkte, so ist

$$\varrho' = \frac{\Sigma r'}{n'}, \quad \varrho'' = \frac{\Sigma r''}{n''}, \ldots$$

$$\varrho = \frac{\Sigma r' + \Sigma r'' + \ldots}{n' + n'' + \ldots} = \frac{n'\varrho' + n''\varrho'' + \ldots}{n' + n'' + \ldots}$$

oder, da die Winkel φ den Zahlen n proportional sind,

$$\varrho = \frac{\varphi'\varrho' + \varphi''\varrho'' + \ldots}{\varphi' + \varphi'' + \ldots},$$

8) $$\varrho(\varphi' + \varphi'' + \ldots) = \varrho'\varphi' + \varrho''\varphi'' + \ldots.$$

§. 3.

Das Vorstehende soll auf einige bekannte Curven angewendet werden, zunächst auf die Kreislinie.

1. Wird der mittlere Abstand ϱ eines Punktes O, der innerhalb eines Kreises liegt, von dem Bogen $P_0 P'$ desselben gesucht, so bedeutet in Gleichung 6) des vorigen Paragraphen $arc\, Q_0 Q'$ den entsprechenden Bogen einer Ellipse, deren Brennpunkt O und deren Mittelpunkt der Kreismittelpunkt ist. Denn bekanntlich ist die Fusspunktlinie der Ellipse aus dem Brennpunkte als Pol der aus ihrem Mittelpunkte mit der grossen Halbaxe

als Halbmesser beschriebene Kreis. Der mit dem mittleren Abstande der ganzen Kreislinie beschriebene Kreis ist gleich dem Ellipsenumfange E, $2\varrho\pi = E$. Der Umfang des gegebenen Kreises verhält sich zu dem der Ellipse, deren Fusspunktlinie er ist, wie sein Halbmesser zu seinem mittleren Abstand. Dieselbe Grösse hat ϱ für jede andere Fusspunktlinie dieser Ellipse aus einem beliebigen Punkt innerhalb derselben.

2. Liegt der Pol O auf dem Umfange des Kreises, so ist der Kreis als Fusspunktlinie des ihm diametral gegenüber liegenden Punktes A (den man sich als unendlich kleinen Kreis denken kann) zu betrachten. Bezeichnet ϱ den mittleren Abstand des Kreisbogens AP, φ daher den Winkel AOP, so ist in Gleichung 6) des §. 2 $P_0Q_0 = 0$, $arc\, Q_0Q' = 0$, $Q'P' = AP$ zu setzen, und man erhält daher

$$\varrho\varphi = PA.$$

Es ist also der mit dem mittleren Abstande zwischen den Schenkeln des Winkels φ beschriebene Kreisbogen gleich der Sehne des gegebenen Bogenstückes (ϱ daher gleich dem Abstande des Schwerpunktes des Kreisbogens vom Mittelpunkte). Bezeichnet a den Kreisdurchmesser, so ist der mittlere Abstand des ganzen Kreises, indem man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt,

$$\varrho = \frac{2a}{\pi}.$$

3. Liegt der Punkt O ausserhalb des Kreises, so ist dessen $(-1)^{te}$ Fusspunktlinie eine Hyperbel, deren Hauptaxe der durch O gelegte Kreisdurchmesser AB und deren Brennpunkt O ist. Ist OC Tangente an den Kreis, M sein Mittelpunkt, so ist MC Asymptote, deren unendlich entfernter Punkt in der Richtung von M nach C mit U, in entgegengesetzter mit V bezeichnet werde. Ist ferner $\angle MOC = \alpha$, ϱ' der mittlere Abstand des Kreisbogens AC, so ist nach Gleichung 6) des §. 2

$$\varrho'\alpha = arc\, AU - CU.$$

Liegt der Punkt P des Kreises über C hinaus, ist PQ die zu OP senkrechte Hyperbeltangente, bezeichnet ϱ'' den mittleren Abstand des Kreisbogenstückes PC, φ den Winkel COP, so hat man

$$\varrho''\varphi = -PQ - arc\, QV + VC.$$

Bezeichnet endlich ϱ den mittleren Abstand des Kreisbogens AP, so hat man nach Gleichung 8) des §. 2

$$\varrho(\alpha + \varphi) = \varrho'\alpha + \varrho''\varphi = arc\, AU - arc\, QV - PQ + VC - CU,$$
$$\varrho(\alpha + \varphi) = arc\, BQ - PQ + a.$$

Für den Halbkreis ist $\varphi = \alpha$, $arc\, BQ = 0$, $PQ = 0$,

$$2\varrho\alpha = a.$$

Demnach ist der mit dem mittleren Abstande zwischen den Tangenten aus O beschriebene Kreisbogen gleich dem Kreisdurchmesser.

§. 4.

Die durch eine Menge merkwürdiger Eigenschaften ausgezeichneten Curven von der Polargleichung mit beliebigem k

$$1)\qquad \left(\frac{r}{a}\right)^k = \cos k\varphi \,^*),$$

zu denen z. B. die Lemniscate ($k=2$), die gleichseitige Hyperbel ($k=-2$), die Parabel ($k=-\frac{1}{2}$), die Cardioide ($k=\frac{1}{2}$) gehören, geben auch hinsichtlich ihres mittleren Abstandes vom Coordinatenanfang bemerkenswerthe Resultate. Da für dieselben das Verhältniss des Vectors r zur Projection des Krümmungshalbmessers ϱ auf den Vector constant ist, $\frac{r}{\varrho \sin\alpha} = 1+k$, wo ϱ und α vorübergehend die Bedeutung wie in §. 1 haben, so geht die Gleichung 6) des §. 1,

$$ds_1 = \frac{r}{\varrho}\, ds$$

über in

$$ds_1 = (1+k)\, ds \sin\alpha = (1+k)\, r\, d\varphi,$$

woraus nach Gleichung 7) des §. 2 folgt

$$2)\qquad \varrho\varphi = \frac{1}{1+k} s_1.$$

Bedeutet nun k eine positive Zahl, besteht die Curve daher aus geschlossenen Zweigen, und bezeichnet ϱ den mittleren Abstand des Coordinatenanfangs von einem solchen Zweige, s_1 den Umfang des ebenfalls geschlossenen Zweiges der Fusspunktlinie, so ist in vorstehender Gleichung $\varphi = \frac{\pi}{2k}$ und statt s_1 zu setzen $\frac{1}{2}s_1$; daher erhält man

$$\varrho\pi = \frac{k}{1+k} s_1.$$

Da die n^{te} Fusspunktlinie der gegebenen Curve 1) dieselbe Gleichung hat, in welcher k in $k_n = \frac{k}{1+nk}$ übergegangen ist, so folgt

$$3)\qquad \varrho\pi = k_1 s_1.$$

Bezeichnet ferner ϱ_1 den mittleren Abstand der ersten Fusspunktlinie und s den Umfang der Basis, so erhält man aus Gleichung 6) des §. 2, indem man $\varphi = \frac{\pi}{2k_1}$ und $\frac{s}{2}$ statt s setzt,

$$4)\qquad \varrho_1\pi = k_1 s.$$

Durch Multiplication der beiden vorstehenden Gleichungen folgt

$$\varrho s = \varrho_1 s_1.$$

Da demnach für die ganze positive Reihe der Fusspunktlinien der gegebenen Curve 1) das Produkt des mittleren Abstandes mit dem Umfange con-

*) Siehe meine oben citirte Abhandlung p. 330.

stant ist, so muss es von der Constanten k, weil diese Function der Ordnungszahl n ist, unabhängig sein und sich mittelst irgend einer der Curven von der Gattung 1) bestimmen lassen. Da unter dieselben, für $k=1$, der Kreis gehört, auf dessen Umfang der Pol liegt und für diesen nach §. 3, $2\varrho=\frac{2a}{\pi}$, $s=a\pi$, so hat für alle Curven von der Gattung 1), bei beliebigem positiven k, das Produkt des Umfanges mit dem mittleren Abstand des geschlossenen Zweiges den constanten Werth

$$\varrho s = 2a^2; \tag{5}$$

es ist also dem doppelten Quadrate des grössten Vectors gleich.

Weitere Folgerungen ergeben sich, wenn man die Gleichung 3)

$$\varrho\pi = k_1 s_1$$

durch die aus 4) folgende

$$\varrho_2\pi = k_2 s_1$$

dividirt; man erhält

$$\frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_3} = \frac{k_2}{k_3};$$

und aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\varrho\varrho_1}{k_1} = \frac{\varrho_2\varrho_3}{k_3}.$$

Mithin ist $\frac{\varrho\varrho_1}{k_1}$ ebenfalls eine von k unabhängige Grösse, deren Werth sich aus den mittleren Abständen des Kreises und der Cardioide ergiebt. Für den Kreis ist $\varrho=\frac{2a}{\pi}$; für die Cardioide, als Fusspunktlinie des Kreises, auf dessen Umfang der Pol liegt, ist in Gleichung 4) $k_1=\frac{1}{2}$, $s=a\pi$, daher $\varrho_1=\frac{a}{2}$. Mithin hat für alle Curven der Gleichung 1) obiges Produkt den Werth

$$\frac{\varrho\varrho_1}{k_1} = \frac{2a^2}{\pi}. \tag{6}$$

Zu dieser bemerkenswerthen Relation zwischen den mittleren Abständen der Basis und ihrer Fusspunktlinie giebt es eine analoge und schon bekannte*) zwischen ihren Umfängen. Durch Multiplication der Gleichungen 3) und 4) folgt nämlich

$$\varrho\varrho_1\pi^2 = s s_1 k_1^2,$$

*) Die Rectification der Fusspunktlinien der gleichseitigen Hyperbel, der positiven des Kreises und der negativen der Geraden hat Maclaurin in der oben citirten Abhandlung, die der ersteren Roberts in *Journal de math. t. X*, p. 177 und allgemein die der Linien von der Gleichung 1) Roberts im *Journal de math. t. XV*, p. 214 und Hirst in der oben citirten Abhandlung behandelt.

und hieraus nach Gleichung 6)

7) $$k_1 s s_1 = 2a^2\pi.$$

Mittelst der Gleichung $$\frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

lässt sich aus dem mittleren Abstande der Basis derjenige jeder Fusspunktlinie positiver Ordnung berechnen. Denn multiplicirt man die Gleichungen

$$\frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{k_1}{k_2},$$
$$\frac{\varrho_2}{\varrho_4} = \frac{k_3}{k_4},$$
$$\vdots$$
$$\frac{\varrho_{2n-2}}{\varrho_{2n}} = \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}}$$

mit einander, so erhält man, unter Berücksichtigung von $k_n = \frac{k}{1+nk}$,

8) $$\varrho_{2n} = \varrho \frac{(1+k)(1+3k)\ldots(1+(2n-1)k)}{(1+2k)(1+4k)\,..\,(1+2nk)}.$$

Da ferner nach Gleichung 6)

$$\frac{\varrho_{2n}\cdot\varrho_{2n+1}}{k_{2n+1}} = \frac{2a^2}{\pi},$$

so ist

9) $$\varrho_{2n+1} = \frac{2a^2}{\pi\varrho}\,\frac{k(1+2k)(1+4k)\,..\,(1+2nk)}{(1+k)(1+3k)\,..\,(1+(2n+1)k)}.$$

Ist die Basis ein Kreis, auf dessen Umfang der Pol liegt, so erhält man, indem man $\varrho = \frac{2a}{\pi}$ und $k=1$ setzt, als Werthe der mittleren Abstände

$$\varrho_{2n} = \frac{2a}{\pi}\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5\ldots\ldots(2n+1)},$$
$$\varrho_{2n+1} = a\,\frac{3.5\ldots\ldots(2n+1)}{2.4\ldots\ldots(2n+2)}.$$

§. 5.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, wie man die im vorigen Paragraphen entwickelten Relationen, sowie ähnliche über den mittleren Abstand derselben Curven, wenn ihre Punkte unter gleichen Bogenabständen vertheilt sind, mit Hilfe bestimmter Integrale herleiten kann.

1. Aus

$$r = a(\cos k\varphi)^{\frac{1}{k}}$$

folgt

$$ds = a(\cos k\varphi)^{\frac{1}{k}-1}\,d\varphi,$$

$$\tfrac{1}{2}s = a\int_0^{\frac{\pi}{2k}}(\cos k\varphi)^{\frac{1}{k}-1}\,d\varphi.$$

Setzt man

$$\cos k\varphi = x^k,$$

$$d\varphi = -\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2k}}},$$

so folgt

$$s = 2a\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2k}}}.$$

Dieses bestimmte Integral kann bekanntlich durch Gammafunctionen ausgedrückt werden, nämlich

$$1)\qquad s = \frac{a}{k}\,\frac{\Gamma\frac{1}{2k}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Ist ϱ der mittlere Abstand des geschlossenen Zweiges, so hat man

$$\varrho\,\frac{\pi}{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2k}} r\,d\varphi = a\int_0^{\frac{\pi}{2k}} (\cos k\varphi)^{\frac{1}{k}}\,d\varphi,$$

woraus durch die Substitution $x^k = \cos k\varphi$ folgt

$$\frac{\pi}{2k}\,\varrho = a\int_0^1 \frac{x^k\,dx}{\sqrt{1-x^{2k}}} = \frac{a}{2k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}+1\right)},$$

oder, unter Berücksichtigung von

$$\Gamma(1+z) = z\,\Gamma z, \text{ und } \Gamma\tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi},$$

$$2)\qquad \varrho = 2ak\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\frac{1}{2k}\,\Gamma\frac{1}{2}}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1) und 2) erhält man, in Uebereinstimmung mit Gleichung 5) des §. 4, $\varrho s = 2a^2$.

Vertauscht man in Gleichung 2) k mit $k_1 = \frac{k}{1+k}$, so erhält man

$$\pi\varrho_1 = \frac{a}{1+k}\,\frac{\Gamma\frac{1}{2k}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\right)},$$

und hieraus durch Multiplication mit 2) $\frac{\varrho\,\varrho_1}{k_1} = \frac{2a^2}{\pi}$, in Uebereinstimmung mit Gleichung 6) des vorigen Paragraphen.

2. Wenn die Punkte einer Linie von der Bogenlänge s unter gleichen Bogenabständen Δs vertheilt gedacht werden, so ist der mittlere Abstand

$$R = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = (r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \frac{\Delta s}{s};$$

mithin folgt, wenn man zur Grenze $n = \infty$ übergeht,

$$Rs = \int r\, ds.$$

Für die im vorigen Paragraphen betrachteten Curven ist

$$r^k = a^k \cos k\varphi,$$

$$r\, ds = a^2 (\cos k\varphi)^{\frac{2}{k} - 1} d\varphi.$$

daher, wenn R den mittleren Abstand eines geschlossenen Zweiges bedeutet,

$$R \frac{s}{2} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2k}} (\cos k\varphi)^{\frac{2}{k} - 1} d\varphi.$$

Durch die Substitution $x^k = \cos k\varphi$ erhält man

$$Rs = 2a^2 \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^{2k}}},$$

3)
$$Rs = \frac{a^2}{k} \frac{\Gamma \frac{1}{k} \, \Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2} \right)}.$$

Setzt man den Werth von s aus Gleichung 1) ein, so erhält man

4)
$$R = a \frac{\Gamma \frac{1}{k} \; \Gamma \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \frac{1}{2k} \; \Gamma \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2} \right)}.$$

Aus 3) folgt z. B. für die Lemniscate $(k = 2)$

$$Rs = \frac{a^2 \pi}{2}.$$

Aus 4) ergiebt sich für den Kreis, auf dessen Umfang der Pol liegt,

$$R = \frac{2a}{\pi},$$

also gerade so gross, wie bei Vertheilung der Punkte unter gleichen Winkelabständen; für die Cardioide $(k = \frac{1}{2})$

$$R = \frac{4}{3} a.$$

Auch hier bestehen unter den mittleren Abständen der Fusspunktlinien verschiedener Ordnungen einfache Relationen. Vertauscht man in Gl. 3) k mit $\frac{k}{1+k}$, so erhält man

$$R_1 s_1 = 2 \frac{1+k}{2+k} Rs.$$

Da nun in gleicher Weise

$$R_2 s_2 = 2\frac{1+k_1}{2+k_1} R_1 s_1,$$

$$\vdots$$

$$R_n s_n = 2\frac{1+k_{n-1}}{2+k_{n-1}} R_{n-1} s_{n-1},$$

so erhält man, wenn man

$$k_n = \frac{k}{1+nk} \text{ und } \frac{s}{s_n} = \frac{\varrho_n}{\varrho} \text{ (nach Gl. 5) des vorigen Paragraphen)}$$

berücksichtigt,

$$\frac{R_n}{R} = 2^n \frac{(1+k)(1+2k)\ldots(1+nk)}{(2+k)(2+3k)\ldots(2+(2n-1)k)} \cdot \frac{\varrho_n}{\varrho}.$$

Ist die Ordnungszahl eine gerade, $2n$, so kann man den Werth von ϱ_n aus Gleichung 8) des vorigen Paragraphen entnehmen und erhält

$$R_{2n} = 4^n \frac{[(1+k)(1+3k)\ldots(1+(2n-1)k)]^2}{(2+k)(2+3k)\ldots(2+(4n-1)k)} R.$$

Setzt man hier $k=1$ und $k=\frac{1}{2}$, so erhält man für die $2n^{\text{te}}$ und $2n+1^{\text{te}}$ Fusspunktlinie des Kreises

$$R_{2n} = 4^n \frac{(2.4.6\ \ldots\ 2n)^2}{3.5.7\ldots(4n+1)} \frac{2a}{\pi},$$

$$R_{2n+1} = 4^n \frac{(3\,.\,5\,.\,7\ \ \ldots\ \ (2n+1))}{(2n+3)(2n+5)\ldots(4n+3)} 2a.$$

Noch werde hinzugefügt, dass, wenn man in 1) k mit $\frac{k}{2}$ vertauscht, sich nach 3) ergiebt

$$2R_k . s_k = a . s_{\frac{1}{2}k},$$

wo der Index nicht die Ordnungszahl, sondern die Constante bezeichnet. Da $s_k : s_{\frac{1}{2}k} = \varrho_{\frac{1}{2}k} : \varrho_k$, so hat man auch

$$2R_k \varrho_{\frac{1}{2}k} = a\varrho_k.$$

Für die Lemniscate ergiebt sich z. B., indem man $k=2$ setzt,

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{\pi}{4}.$$

§. 6.

1. Wird der mittlere Abstand ϱ einer Ellipse vom Brennpunkte gesucht, bezeichnen a, b und c grosse und kleine Halbaxe und lineare Excentricität, φ den Winkel des Vectors r mit a, so hat man

$$\varrho\varphi = \int_0^\varphi r\,d\varphi = b^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{a+c\cos\varphi},$$

$$\varrho\varphi = 2b \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Für die ganze Ellipse folgt

$$\varrho = b,$$

der mittlere Abstand ist gleich der kleinen Halbaxe. Daher ist der Umfang der $(-1)^{\text{ten}}$ Fusspunktlinie der Ellipse aus dem Brennpunkte gleich dem mit der kleinen Axe als Halbmesser beschriebenen Kreise.

2. Bezeichnet ϱ den mittleren Abstand der Ellipse von ihrem Mittelpunkt, $k = \frac{c}{a}$ ihre numerische Excentricität, φ den Winkel des Vectors mit der kleinen Halbaxe, so ist

$$\varrho\varphi = b\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = b.F(k,\varphi),$$

wo $F(k,\varphi)$ das elliptische Integral erster Art mit dem Modul k bezeichnet. Hieraus ergiebt sich einfach, dass dieses Integral den Umfang der $(-1)^{\text{ten}}$ Fusspunktlinie der Ellipse aus dem Mittelpunkt, der sogenannten Talbot-schen Linie angiebt, einer Curve vom 12ten Grade, deren Gleichung Tortolini in Crelle's Journal Bd. 33 entwickelt, und deren Rectification zuerst Talbot in Gergonne's Annalen Bd. 14, p. 380 im Resultat gegeben hat.

3. Ist ϱ der mittlere Abstand eines Hyperbelbogens AP vom Mittelpunkt (Taf. I, Fig. 10), sind $OA = a$ und $AB = b$ halbe Haupt- und Nebenaxe, $OF = c$ die Excentricität, ist $\angle POA = \varphi$, so hat man

$$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Beschreibt man aus dem Brennpunkte F mit dem Halbmesser b einen Kreis, welcher OP in Q schneidet, und setzt man $\angle PQF = \psi$, so folgt

$$c\sin\varphi = b\sin\psi,\quad r = \frac{a}{\cos\psi},$$

$$d\varphi = \frac{b\cos\psi\, d\psi}{c\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}\sin^2\psi}},$$

$$1)\qquad \varrho\varphi = \frac{ab}{c}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2\sin^2\psi}} = \frac{ab}{c}F\left(\frac{b}{c},\psi\right).$$

Man construire aus O mit dem Halbmesser $OA = a$ einen zweiten Kreis, der den ersten in H rechtwinklig schneidet, und ziehe HG senkrecht OF; ferner construire man eine Ellipse, deren Mittelpunkt F, Brennpunkt G, deren grosse und kleine Halbaxe und Excentricität sind

$$\alpha = b = FH,\quad \beta = GH = \frac{ab}{c},\quad \gamma = FG = \frac{b^2}{c};$$

man trage an die kleine Halbaxe FJ der Ellipse den Winkel $JFS = \psi$ an, so ist

$$FS = \frac{\beta}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \sin^2\psi}} = \frac{ab}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2 \sin^2\psi}}.$$

Demnach erhält man, wenn ϱ_e den mittleren Abstand des Ellipsenbogens JS von seinem Mittelpunkt F bezeichnet, für $\varrho_e . \psi$ den Werth von $\varrho\varphi$ in 1). Bezeichnet daher ϱ_h den mittleren Abstand des Hyperbelbogens AP, so ist

$$\varrho_e . \psi = \varrho_h . \varphi.$$

Der mittlere Abstand des Hyperbelbogens lässt sich also durch den eines einfach zu construirenden Ellipsenbogens ausdrücken; das Verhältniss beider Abstände ist gleich dem umgekehrten der zugehörigen Winkel. Der mittlere Abstand des ganzen Hyperbelzweiges ist daher eine endliche Grösse, und zwar ist, wenn $\frac{\pi}{n}$ den Asymptotenwinkel, ϱ_e den mittleren Abstand der ganzen Ellipse bezeichnet,

$$\varrho_h = n . \varrho_e.$$

III.

Ueber die Bestimmung der Energie und Entropie eines Körpers.

Von R. Clausius.

Im zweiten diesjährigen Hefte dieser Zeitschrift*) befindet sich eine Abhandlung von Bauschinger, welche sich vorzugsweise auf das im zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie vorkommende Integral $\int \frac{dQ}{T}$ bezieht, worin dQ ein Element der Wärmemenge ist, welche ein Körper bei irgend einer in umkehrbarer Weise vor sich gehenden Zustandsänderung aufnimmt, und T die absolute Temperatur des Körpers im Momente der Aufnahme dieses Wärmeelementes bedeutet. Bauschinger entwickelt einen Ausdruck, welcher unter gewissen die Rechnung vereinfachenden Umständen den Werth des Integrals für endliche Zustandsänderungen darstellt, und welcher in dem Falle, wo der Endzustand des Körpers derselbe ist, wie der Anfangszustand, wo also der Körper einen Kreisprocess durchgemacht hat, Null wird. Wegen dieses letzteren Umstandes meint Bauschinger, dass die von ihm entwickelte Gleichung einen allgemeinen Satz ausspreche, in welchem mein Satz von der Aequivalenz der Verwandlungen für Kreisprocesse als besonderer Fall enthalten sei.

Mit dieser Ansicht über die Bedeutung seiner Entwickelungen kann ich mich nicht einverstanden erklären.

In der von mir für umkehrbare Kreisprocesse aufgestellten Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

liegt zugleich ein Satz für solche umkehrbare Veränderungen, bei denen der Endzustand vom Anfangszustande verschieden ist, mit ausgedrückt, und zwar ein Satz, den ich nicht nur stillschweigend als darin enthalten betrachtet, sondern auch mehrfach bestimmt ausgesprochen habe.

*) Band X, S. 109.

Wenn nämlich das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ jedesmal gleich Null wird, so oft der Körper, nachdem er verschiedene Veränderungen durchgemacht hat, wieder in seinen Anfangszustand zurückgelangt, so muss der Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ das vollständige Differential einer Grösse sein, welche durch den gerade stattfindenden Zustand des Körpers bestimmt ist, ohne dass man zu wissen braucht, auf welchem Wege er in diesen Zustand gelangt ist, d. h. welches die Zwischenzustände gewesen sind, die er von seinem Anfangszustande bis zu seinem gegenwärtigen Zustande nach einander besessen hat. Für den Fall, wo der Zustand des Körpers durch irgend zwei unabhängige Veränderliche bestimmt ist, muss somit der Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ das vollständige Differential einer Function dieser Veränderlichen sein; er muss also, nachdem man ihn als einen auf diese Veränderlichen bezüglichen Differentialausdruck dargestellt hat, der bekannten Bedingung der Integrabilität genügen.

Der Unterschied zwischen Differentialausdrücken, welche dieser Bedingung genügen, und solchen, welche dieser Bedingung nicht genügen, kommt in meinen Abhandlungen so oft zur Sprache, dass ich ihn sogar in meiner Abhandlungensammlung zum Gegenstande einer besonderen mathematischen Einleitung gemacht habe. Speciell für den Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ findet sich die Angabe, dass er ein vollständiges Differential ist, und somit der Bedingung der Integrabilität genügt, unter andern in meiner Abhandlung: „Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.“ *)

Nachdem dieses einmal festgestellt war, verstand es sich von selbst, dass das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ sich mit Hülfe dazu geeigneter, bei der Rechnung als bekannt vorausgesetzter Grössen als Function zweier Veränderlichen ausdrücken lassen müsse. Eine solche Rechnung hat nun Bauschinger ausgeführt, indem er dabei die Gleichung, welche den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ausdrückt, mit angewandt und zugleich für die Differentialcoefficienten $\frac{dQ}{dT}$ (wenn das Volumen v als constant vorausgesetzt wird) und $\frac{dQ}{dv}$ (wenn die Temperatur T als constant vorausgesetzt wird) besondere Zeichen eingeführt hat. Soweit ich auch davon entfernt bin, in Abrede zu stellen, dass derartige Entwickelungen für die Wärmelehre sehr nützlich sein können, so glaube ich doch

*) Poggendorff's Annalen, Bd. XCIII, S. 502 und Abhandlungensammlung Theil I, S. 150.

nicht, dass man von einer dadurch gewonnenen Gleichung sagen kann, sie drücke einen neuen allgemeinen Satz aus, in welchem mein Satz als besonderer Fall enthalten sei. Meiner Ansicht nach bilden Entwickelungen dieser Art nur eine weitere Ausführung von algebraischen Rechnungen, wozu die Data durch die schon vorhandenen Hauptgleichungen dargeboten sind.

Bauschinger vergleicht seine Entwickelung mit derjenigen, welche ich in meiner Abhandlung: „Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit"*) gegeben habe, und hebt dabei hervor, dass ich eine neu eingeführte Grösse, welche ich die Disgregation nenne, und die Hypothese, „dass die mechanische Arbeit, welche die Wärme bei irgend einer Anordnungsänderung thun kann, der absoluten Temperatur, bei welcher die Aenderung geschieht, proportional ist," zu Hilfe genommen habe, während seine Enwickelung ohne ähnliche Hilfsmittel auf rein mathematischem Wege ausgeführt sei. Dabei scheint er nicht beachtet zu haben, dass ich in jener Abhandlung etwas ganz anderes bezweckt habe, als das, worum es sich in seiner Entwickelung handelt. Ich wollte das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ nicht blos seiner Grösse nach, sondern vielmehr seiner physikalischen Bedeutung nach bestimmen, und habe in der That nachgewiesen, dass es sich in zwei wesentlich verschiedene Grössen zerlegen lässt, von denen die eine nur von der Temperatur des Körpers, und die andere nur von der Anordnung der Bestandtheile des Körpers abhängt.

Als die Abhandlung von Bauschinger erschien, hatte ich kurz vorher eine neue Abhandlung vollendet, welche seitdem in der Vierteljahresschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft Bd. X, S. 1 und in Poggendorff's Ann. Bd. CXXV, S. 353 erschienen ist, und worin ich unter andern auch die Bestimmung des Integrals $\int \frac{dQ}{T}$ besprochen habe. Ich habe dort, wie man sich leicht überzeugen kann, den Gegenstand in allgemeinerer Weise behandelt, als Bauschinger, dabei jedoch alle vorkommenden Gleichungen nur als Folgerungen aus den beiden schon genannten Hauptgleichungen abgeleitet.

Vielleicht wird es nicht ohne Interesse sein, wenn ich hier noch einige weitere Entwickelungen ähnlicher Art mittheile, welche als Ergänzungen der dort gegebenen dienen können, und welche mir besonders dazu geeignet zu sein scheinen, den Zusammenhang jenes Integrals mit einer anderen für die Wärmelehre wichtigen Grösse in ein klares Licht zu stellen.

*) Poggendorff's Annalen Bd. CXVI, S. 73 und Abhandlungensammlung Theil I, S. 242.

Bevor ich aber dazu übergehe, möchte ich noch erst über eine in Bauschinger's Abhandlung vorkommende Stelle eine kurze Bemerkung machen.

Auf S. 114 der Abhandlung ist die Rede von folgender, auch auf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezüglicher Gleichung:

$$\frac{dQ}{dv} = A(a+t)\frac{dp}{dt}.$$

Hierin ist $\frac{dQ}{dv}$ der schon oben einmal erwähnte Differentialcoefficient, p bedeutet den Druck, unter welchem der Körper steht, t die vom Gefrierpunkte an gezählte Temperatur und a den reciproken Werth des Ausdehnungscoefficienten der Gase, also angenähert die Zahl 273, so dass $a+t$ dieselbe Grösse ist, die vorher mit T bezeichnet wurde; A endlich bedeutet das calorische Aequivalent der Arbeit. Diese Gleichung citirt Bauschinger mit den Worten: „die schon von Carnot, nur in anderer Form, aufgestellte Gleichung".

Diese Worte könnten leicht ein Missverständniss veranlassen. Die in den älteren Darstellungen der Carnot'schen Theorie vorkommende Gleichung, welche eigentlich nicht von Carnot selbst aufgestellt, sondern erst von Clapeyron aus dem Carnot'schen Satze abgeleitet ist, lautet, wenn man sie der äusseren Form nach der vorigen möglichst ähnlich macht, folgendermaassen:

$$\frac{dQ}{dv} = C\frac{dp}{dt},$$

worin C eine unbestimmte Temperaturfunction darstellt, welche häufig die Carnot'sche Function genannt wurde. Wenn nun in dieser Gleichung an die Stelle der früher unbestimmt gelassenen Function die bestimmte Function $A(a+t)$ gesetzt ist, so ist das jedenfalls mehr, als was man unter einer blossen Formveränderung zu verstehen pflegt.

Ich gehe nun zu den oben angekündigten Entwickelungen über.

§. 1.

Wir wollen in dieser Entwickelung wieder von den beiden vorher erwähnten Hauptgleichungen ausgehen, durch welche ich in meiner Abhandlung „Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie" die beiden Hauptsätze ausgedrückt habe.

Die erste Hauptgleichung lautet, wenn man sie auf eine unendlich kleine Zustandsänderung eines zur Betrachtung ausgewählten Körpers bezieht:

$$\text{I)} \qquad dQ = dU + A\,dW.$$

Hierin ist, wie vorher, A das calorische Aequivalent der Arbeit, d. h. das Wärmeaequivalent für die Einheit der Arbeit, und dQ bedeutet die bei der unendlich kleinen Zustandsänderung vom Körper aufgenommene Wärme.

Ferner bedeutet dW die gleichzeitig vom Körper gethane äussere Arbeit, und dU die dabei eingetretene Aenderung derjenigen Grösse, welche in der Ueberschrift mit dem Worte Energie bezeichnet ist. Als ich die Grösse U zuerst in die Wärmelehre einführte*), gab ich ihr keinen besonderen Namen, sondern begnügte mich damit, ihre Bedeutung durch eine Definition festzustellen, welche dahin ging, dass diese Grösse, wenn man von irgend einem Anfangszustande des Körpers ausgeht, die Summe der hinzugekommenen wirklich vorhandenen und der zu innerer Arbeit verbrauchten Wärme sei. Da aber W. Thomson, welcher diese Grösse später ebenfalls in seine Gleichungen aufgenommen hat, für sie den bequemen Namen Energie des Körpers in Vorschlag gebracht hat, so habe ich mich dieser Benennungsweise angeschlossen.

Das Eigenthümliche der Grösse U, wodurch sie sich von den andern in der vorigen Gleichung befindlichen veränderlichen Grössen unterscheidet, besteht darin, dass sie, wenn man den Anfangszustand des Körpers als gegeben voraussetzt, durch den augenblicklich stattfindenden Zustand des Körpers vollkommen bestimmt ist, ohne dass man zu wissen braucht, auf welche Weise der Körper in diesen Zustand gelangt ist, während die Grössen W und Q nicht blos vom Anfangs- und Endzustande, sondern auch von der Art des Ueberganges abhängen.

In der vorigen Gleichung lässt sich noch eine kleine Vereinfachung anbringen. Ich habe in einem in meiner Abhandlungensammlung befindlichen Zusatze vorgeschlagen, die mechanische Arbeit, wenn sie nicht nach dem gewöhnlichen mechanischen Maasse, sondern nach Wärmemaasse gemessen wird, d. h. wenn man dabei als Einheit die einer Wärmeeinheit entsprechende Arbeit anwendet, mit dem Namen Werk zu bezeichnen. Hiernach ist also, da W die äussere Arbeit bedeutet, das Product AW das äussere Werk. Dieses wollen wir durch einen besonderen Buchstaben bezeichnen, indem wir setzen:

$$w = AW.$$

Dann lautet die vorige Gleichung:

$$\text{I}a) \qquad dQ = dU + dw.$$

§. 2.

Die zweite hier in Betracht kommende Hauptgleichung ist die schon oben erwähnte, für umkehrbare Kreisprocesse geltende Gleichung:

$$\text{II}) \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Sie drückt den zweiten Hauptsatz zwar nicht in der allgemeinsten Weise aus, aber für unsern gegenwärtigen Zweck ist sie genügend.

---

*) Poggendorff's Annalen Bd. LXXIX, S. 384, Märzheft 1850, und Abhandlungensammlung Theil I, S. 32.

Aus dieser Gleichung folgt, wie oben gesagt wurde, dass der Differentialausdruck $\frac{dQ}{T}$, soweit er sich auf umkehrbare Veränderungen bezieht, das vollständige Differential einer Grösse ist, welche, sofern der Anfangszustand des Körpers als gegeben vorausgesetzt wird, durch den augenblicklich stattfindenden Zustand des Körpers vollkommen bestimmt ist, ohne dass man den Weg, auf welchem der Körper in diesen Zustand gelangt ist, zu kennen braucht. Bezeichnen wir diese Grösse mit S, und fügen ausdrücklich hinzu, dass unter S ebenso, wie unter U, eine Grösse verstanden werden soll, welche für jeden Zustand des Körpers einen bestimmten Werth hat, so können wir die vorige Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\text{II}a) \qquad \frac{dQ}{T} = dS.$$

Was die physikalische Bedeutung der Grösse S anbetrifft, so habe ich darüber, wie schon oben erwähnt, in meiner Abhandlung „Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit" gesprochen; indessen brauchen wir auf die dort vorkommenden Betrachtungen hier nicht einzugehen, und ich erwähne sie nur deshalb, weil ich aus ihnen den Namen der Grösse S entnommen habe. Ich habe nämlich aus dem griechischen Worte τροπή, Verwandlung, das Wort Entropie gebildet, welches die Bedeutung der Grösse S in ähnlicher Weise ausdrückt, wie das Wort Energie die Bedeutung der Grösse U.

Der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist nun, aus den Hauptgleichungen Ia) und IIa) andere Gleichungen abzuleiten, welche zur Bestimmung der Energie und Entropie dienen können, und die Eigenschaften und Beziehungen dieser Grössen erkennen lassen.

§. 3.

Die Gleichung Ia) gilt sowohl für umkehrbare, als auch für nicht umkehrbare Veränderungen. Wir wollen aber jetzt, um diese Gleichung mit der Gleichung IIa) in Verbindung bringen zu können, annehmen, die Veränderung, auf welche die Gleichung Ia) sich bezieht, sei dieselbe umkehrbare Veränderung, wie die, auf welche die Gleichung IIa) sich bezieht. Dann ist das Wärmeelement dQ in beiden Gleichungen dasselbe, und wir können es daher aus den Gleichungen eliminiren, wodurch wir erhalten:

$$1) \qquad TdS = dU + dw.$$

Nun wollen wir annehmen, der Zustand des Körpers sei durch irgend zwei Veränderliche bestimmt, welche wir vorläufig ganz allgemein mit x und y bezeichnen wollen. Nachträglich können wir dann für diese unbestimmt gelassenen Veränderlichen bestimmte Grössen, wie Temperatur, Volumen, Druck oder andere in den gerade beabsichtigten Untersuchungen zweckmässige Grössen einführen. Wenn der Zustand des Körpers durch

die Veränderlichen x und y bestimmt wird, so müssen sich alle Grössen, welche durch den augenblicklich stattfindenden Zustand des Körpers bestimmt sind, ohne dass man die Art, wie der Körper in diesen Zustand gelangt ist, zu kennen braucht, durch Functionen dieser Veränderlichen darstellen lassen, in denen die Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden können. Demnach sind auch die Grössen S und U als Functionen der unabhängigen Veränderlichen x und y anzusehen.

Von der Grösse w gilt dieses aber nicht, indem selbst dann, wenn festgesetzt ist, dass nur umkehrbare Veränderungen des Körpers vorkommen sollen, das äussere Werk, welches gethan wird, während der Körper aus einem gegebenen Anfangszustande in einen gegebenen Endzustand übergeht, nicht nur von dem Anfangs- und Endzustande, sondern auch von den nach einander durchlaufenen Zwischenzuständen, oder von dem Wege, auf welchem die Veränderung stattfindet, abhängt. Die Differentialcoefficienten $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{dw}{dy}$ sind zwar bestimmte Functionen von x und y; wenn man aber den ersten derselben nach y und den zweiten nach x differentiirt, so sind die dadurch entstehenden Differentialcoefficienten zweiter Ordnung $\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)$ und $\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right)$ nicht unter einander gleich, was der Fall sein müsste, wenn die Grösse w sich, während x und y von einander unabhängige Veränderliche sind, als eine Function derselben ausdrücken liesse.

Wenn man nun in der Gleichung 1) setzt:

$$dS = \frac{dS}{dx}dx + \frac{dS}{dy}dy$$

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy,$$

$$dw = \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy$$

so geht sie über in:

$$T\frac{dS}{dx}dx + T\frac{dS}{dy}dy = \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dw}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy} + \frac{dw}{dy}\right)dy.$$

Da diese Gleichung für beliebige Werthe der Differentiale dx und dy richtig sein muss, also unter andern auch für die Fälle, wo das eine oder das andere der Differentiale gleich Null gesetzt wird, so zerfällt sie sofort in folgende zwei Gleichungen:

$$2)\qquad \begin{cases} T\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{dU}{dx} + \dfrac{dw}{dx} \\ T\dfrac{dS}{dy} = \dfrac{dU}{dy} + \dfrac{dw}{dy} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man durch zweite Differentiation eine der Grössen S oder U eliminiren.

§. 4.

Wir wollen zuerst die Grösse U eliminiren, weil die dadurch entstehende Gleichung die einfachere ist.

Wir differentiiren dazu die erste der Gleichungen 2) nach y und die zweite nach x. Dabei wollen wir die Differentialcoefficienten zweiter Ordnung von S und U ganz so, wie gewöhnlich, schreiben. Die Differentialcoefficienten von $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{dw}{dy}$ dagegen wollen wir, wie es schon oben geschehen ist, um äusserlich anzudeuten, dass es nicht Differentialcoefficienten zweiter Ordnung einer Function von x und y sind, so schreiben: $\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)$ und $\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right)$. Endlich ist noch zu beachten, dass die in den Gleichungen vorkommende Grösse T, nämlich die absolute Temperatur des Körpers, von welcher wir in dieser Entwickelung annehmen, dass sie in allen Theilen des Körpers gleich sei, ebenfalls als Function von x und y anzusehen ist. Wir erhalten also:

$$\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx}+T\frac{d^2S}{dx\,dy}=\frac{d^2U}{dx\,dy}+\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy}+T\frac{d^2S}{dy\,dx}=\frac{d^2U}{dy\,dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right).$$

Wenn wir die zweite dieser Gleichungen von der ersten abziehen, und dabei bedenken, dass

$$\frac{d^2S}{dx\,dy}=\frac{d^2S}{dy\,dx} \text{ und } \frac{d^2U}{dx\,dy}=\frac{d^2U}{dy\,dx}$$

ist, so erhalten wir:

$$3)\qquad \frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx}-\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right).$$

Die hierin an der rechten Seite stehende Differenz spielt in den Formeln der mechanischen Wärmetheorie eine bedeutende Rolle. Ich habe sie in meiner zuletzt veröffentlichten Abhandlung die auf xy bezügliche Werkdifferenz genannt, und habe sie mit E_{xy} bezeichnet, so dass zu setzen ist:

$$4)\qquad E_{xy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right).$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung über in:

$$5)\qquad \frac{dT}{dy}\cdot\frac{dS}{dx}-\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dS}{dy}=E_{xy}.$$

Dieses ist die aus Gleichung 1) hervorgehende, zur Bestimmung von S dienende Differentialgleichung.

Um ferner aus den beiden Gleichungen 2) die Grösse S zu eliminiren, schreiben wir sie in folgender Form:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dU}{dx} + \frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dU}{dy} + \frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dy}$$

Von diesen Gleichungen differentiiren wir wieder die erste nach y und die zweite nach x, wodurch kommt:

$$\frac{d^2 S}{dx\,dy} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 U}{dx\,dy} - \frac{1}{T^2} \cdot \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dU}{dx} + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2 S}{dy\,dx} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 U}{dy\,dx} - \frac{1}{T^2} \cdot \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dU}{dy} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dy}\right)$$

Subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, und bringt in der dadurch entstehenden Gleichung die Glieder, welche U enthalten, auf die linke Seite, und multiplicirt dann noch die ganze Gleichung mit T^2, so kommt:

$$6)\quad \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dU}{dx} - \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dU}{dy} = T^2 \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dy}\right)\right].$$

Für die hierin an der rechten Seite stehende Grösse wollen wir ebenfalls ein besonderes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$7)\quad E'_{xy} = T^2 \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{dy}\right)\right].$$

Dann lautet die vorige Gleichung:

$$8)\quad \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dU}{dx} - \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dU}{dy} = E'_{xy}.$$

Dieses ist die aus der Gleichung 1) hervorgehende, zur Bestimmung von U dienende Differentialgleichung.

§. 5.

Bevor wir die beiden Differentialgleichungen 5) und 8) weiter behandeln, wird es zweckmässig sein, die Aufmerksamkeit für einen Augenblick auf die in ihnen vorkommenden Grössen E_{xy} und E'_{xy} zu richten.

Zwischen diesen beiden Grössen findet folgende Beziehung statt, welche sich aus den in 4) und 7) gegebenen Ausdrücken leicht ergiebt:

$$9)\quad E'_{xy} = T E_{xy} - \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{dT}{dx} \cdot \frac{dw}{dy}.$$

Beide Grössen E_{xy} und E'_{xy} sind Functionen von x und y. Wählt man zur Bestimmung des Körpers statt der Veränderlichen x und y irgend zwei andere Veränderliche, welche ξ und η heissen mögen, und bildet mit diesen die entsprechenden Grössen $E_{\xi\eta}$ und $E'_{\xi\eta}$, nämlich:

$$10)\quad E_{\xi\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{dw}{d\xi}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dw}{d\eta}\right),$$

$$11)\quad E'_{\xi\eta} = T^2 \left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{d\xi}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{T} \cdot \frac{dw}{d\eta}\right)\right],$$

so sind diese Grössen natürlich Functionen von ξ und η, ebenso wie die vo-

rigen Grössen Functionen von x und y. Vergleicht man nun aber einen dieser beiden letzten Ausdrücke, z. B. denjenigen von $E\xi\eta$ mit dem Ausdruck der entsprechenden Grösse E_{xy}, so findet man, dass sie nicht blos zwei auf verschiedene Veränderliche bezogene Ausdrücke einer und derselben Grösse sind, sondern dass sie wirklich verschiedene Grössen darstellen. Aus diesem Grund habe ich E_{xy} nicht kurzweg die Werkdifferenz, sondern die auf xy bezügliche Werkdifferenz genannt, wodurch sie sofort von $E\xi\eta$, nämlich von der auf $\xi\,\eta$ bezüglichen Werkdifferenz, unterschieden wird. Ebenso verhält es sich mit E'_{xy} und $E'\xi\eta$, welche gleichfalls als zwei verschiedene Grössen anzusehen sind.

Die Beziehung, welche zwischen den Grössen E_{xy} und $E\xi\eta$ besteht, findet man folgendermaassen. Die Differentialcoefficienten, welche in dem in 10) gegebenen Ausdrucke von $E\xi\eta$ vorkommen, können in der Weise abgeleitet werden, dass man zuerst die Differentialcoefficienten nach den Veränderlichen x und y bildet, und dann jede dieser beiden Veränderlichen als eine Function von ξ und η behandelt. Auf diese Art erhält man:

$$\frac{dw}{d\xi}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{dw}{d\eta}=\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{d\eta}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{d\eta}.$$

Von diesen beiden Ausdrücken soll der erste nach η un der zweite nach ξ differentiirt werden, wodurch man unter Anwendung desselben Verfahrens erhält:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dw}{d\xi}\right)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\eta}+\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}+\frac{dw}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\xi\,d\eta}\\+\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}+\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\xi\,d\eta},\end{cases}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dw}{d\eta}\right)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\eta}+\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}+\frac{dw}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\xi\,d\eta}\\+\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}+\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}+\frac{dw}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\xi\,d\eta}.\end{cases}$$

Wenn man die zweite dieser Gleichungen von der ersten abzieht, so heben sich an der rechten Seite die meisten Glieder auf, und es bleiben nur vier Glieder übrig, welche sich in der folgenden Weise in ein Product aus zwei zweigliedrigen Ausdrücken zusammenziehen lassen:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dw}{d\xi}\right)-\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dw}{d\eta}\right)=\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}-\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right)\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dy}\right)\right].$$

Der in dieser Gleichung an der linken Seite stehende Ausdruck ist $E\xi\eta$, und der an der rechten Seite in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist E_{xy}. Man erhält also schliesslich:

$$E\xi\eta=\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta}-\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right)E_{xy}. \tag{12}$$

Auf gleiche Art findet man auch:

13) $$E'_{\xi\eta} = \left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\xi}\right) E'_{xy}.$$

Wenn man nur Eine der Veränderlichen durch eine neue ersetzt, wenn man z. B. die Veränderliche x beibehält, während man statt y die neue Veränderliche η einführt, so hat man in den beiden vorigen Gleichungen $x = \xi$, und somit $\frac{dx}{d\xi} = 1$ und $\frac{dx}{d\eta} = 0$ zu setzen, wodurch sie übergehen in:

14) $$E_{x\eta} = \frac{dy}{d\eta} E_{xy} \text{ und } E'_{x\eta} = \frac{dy}{d\eta} E'_{xy}.$$

Will man zwar die ursprünglichen Veränderlichen beibehalten, aber ihre Reihenfolge ändern, so nehmen dadurch die in Rede stehenden Grössen, wie man sofort aus dem blossen Anblicke der Ausdrücke 4) und 7) erkennt, das entgegengesetzte Vorzeichen an, also:

15) $$E_{yx} = -E_{xy} \text{ und } E'_{yx} = -E'_{xy}.$$

§. 6.

Wir kehren nun wieder zu den für S und U abgeleiteten Differentialgleichungen 5) und 8) zurück.

Dieselben nehmen besonders einfache Gestalten an, wenn man darin als eine der unabhängigen Veränderlichen die Temperatur T wählt. Setzen wir z. B. $T = y$, so folgt daraus $\frac{dT}{dy} = 1$ und $\frac{dT}{dx} = 0$, und zugleich haben wir dann statt E_{xy} und E'_{xy} zu schreiben: E_{xT} und E'_{xT}. Dadurch gehen die Gleichungen 5) und 8) über in:

16) $$\frac{dS}{dx} = E_{xT},$$

17) $$\frac{dU}{dx} = E'_{xT}.$$

Diese Gleichungen können wir sofort nach x integriren und erhalten dadurch:

18) $$S = \int E_{xT}\,dx + \varphi(T),$$

19) $$U = \int E'_{xT}\,dx + \psi(T),$$

worin $\varphi(T)$ und $\psi(T)$ zwei willkürliche Functionen von T sind.

Die beiden letzten Gleichungen kann man natürlich leicht wieder in der Weise umgestalten, dass man statt der Veränderlichen T eine beliebige andere Veränderliche y einführt. Man braucht dazu nur für T diejenige Function von x und y, welche diese Grösse darstellt, einzusetzen. Die dadurch entstehenden Gleichungen sind dieselben, zu welchen man gelangt, wenn man von den allgemeineren Differentialgleichungen 5) und 8) ausgeht,

und auf diese das gewöhnliche Integrationsverfahren anwendet, und dabei zugleich bedenkt, dass nach 14) zu setzen ist:

$$\frac{dy}{dT} E_{xy} = E_{xT} \text{ und } \frac{dy}{dT} E'_{xy} = E'_{xT}.$$

Wir haben also im Vorigen mit Hilfe der partiellen Differentialgleichungen, welche aus der Gleichung 1) abgeleitet sind, Ausdrücke von S und U gewonnen, deren jeder noch eine willkürliche Function von T enthält. Will man nun auch diese dort willkürlich gebliebenen Functionen bestimmen, so muss man auf die Gleichungen Ia) und IIa), aus denen die Gleichung 1) durch Elimination von dQ hervorgegangen ist, zurückgehen.

§. 7.

Nehmen wir an, der Zustand des Körpers sei durch seine Temperatur T und eine beliebige andere Veränderliche x bestimmt, so können wir den beiden Gleichungen IIa) und Ia) folgende Formen geben:

$$\frac{dS}{dT} dT + \frac{dS}{dx} dx = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT + \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dx} dx.$$

$$\frac{dU}{dT} dT + \frac{dU}{dx} dx = \left(\frac{dQ}{dT} - \frac{dw}{dT}\right) dT + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dw}{dx}\right) dx.$$

Da diese Gleichungen für beliebige Werthe der Differentiale dT und dx gelten müssen, so zerfällt jede derselben, wie es in einem ähnlichen Falle schon oben zur Sprache gekommen ist, in zwei Gleichungen. Wir wollen hier von den so entstehenden vier Gleichungen nur die beiden benutzen, welche zur Bestimmung von $\frac{dS}{dT}$ und $\frac{dU}{dT}$ dienen können, nämlich:

$$\frac{dS}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT}, \tag{20}$$

$$\frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} - \frac{dw}{dT}. \tag{21}$$

Zur Bestimmung der beiden andern Differentialcoefficienten $\frac{dS}{dx}$ und $\frac{dU}{dx}$ wenden wir die weiter oben abgeleiteten Gleichungen 16) und 17) an. Mit Hilfe dieser Ausdrücke der vier Differentialcoefficienten können wir folgende vollständige Differentialgleichungen von S und U bilden:

$$dS = \frac{1}{T} \cdot \frac{dQ}{dT} dT + E_{xT} dx. \tag{22}$$

$$dU = \left(\frac{dQ}{dT} - \frac{dw}{dT}\right) dT + E'_{xT} dx. \tag{23}$$

Da die Grössen S und U sich durch Functionen von T und x darstellen lassen müssen, in welchen die beiden Veränderlichen T und x als von einander unabhängig angesehen werden können, so muss für die beiden vorstehenden Gleichungen die bekannte Bedingungsgleichung der Integrabilität gelten. Für die erste Gleichung lautet diese:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dT}\right)=\frac{dE_{xT}}{dT},$$

oder anders geschrieben:

$$24)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right)=T\frac{dE_{xT}}{dT}.$$

Für die zweite Gleichung lautet die Bedingungsgleichung:

$$25)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dT}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dT}\right)=\frac{dE'_{xT}}{dT}.$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen hängen so unter einander zusammen, dass sich aus der einen die Nothwendigkeit der anderen sofort ableiten lässt. Zwischen den beiden in ihnen vorkommenden Grössen E_{xT} und E'_{xT} besteht nämlich folgende Gleichung, welche sich aus 9) ergiebt, wenn man darin $T=y$ setzt:

$$26)\qquad E'_{xT}=TE_{xT}-\frac{dw}{dx}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach T, so kommt:

$$\frac{dE'_{xT}}{dT}=T\frac{dE_{xT}}{dT}+E_{xT}-\frac{d}{dT}\left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Bedenkt man nun, dass

$$E_{xT}=\frac{d}{dT}\left(\frac{dw}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dT}\right)$$

ist, so geht die vorige Gleichung über in:

$$27)\qquad \frac{dE'_{xT}}{dT}=T\frac{dE_{xT}}{dT}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dT}\right).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir von den beiden Gleichungen 24) und 25) sofort die eine auf die andere zurückführen.

Durch Integration der vollständigen Differentialgleichungen 22) und 23) lassen sich die beiden Grössen S und U, jede bis auf eine unbekannt bleibende Constante, bestimmen.

Natürlich kann man auch in diesen vollständigen Differentialgleichungen, wenn es für besondere Fälle zweckmässig erscheint, statt der Veränderlichen T irgend eine andere Veränderliche y einführen, was, wenn T als Function von x und y als bekannt vorausgesetzt wird, keine Schwierigkeit hat, und daher keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf.

§. 8.

Alle vorigen Gleichungen sind in solcher Weise entwickelt, dass in Bezug auf die äusseren Kräfte, welche auf den Körper wirken, und auf welche sich das äussere Werk bezieht, keine einschränkenden Bedingungen gestellt sind. Wir wollen nun einen besondern Fall, welcher vorzugsweise häufig vorkommt, etwas näher betrachten. Ich meine den Fall, wo die einzige fremde Kraft, welche bei den Zustandsänderungen des Körpers entweder hindernd oder fördernd wirkt, und daher ein positives oder negatives

äusseres Werk bedingt, ein an der Oberfläche des Körpers stattfindender, überall gleicher und normal gegen die Oberfläche gerichteter Druck ist.

In diesem Falle wird nur bei Volumenänderungen des Körpers äusseres Werk gethan, und der Ausdruck desselben ist sehr einfach. Sei nämlich p der auf die Flächeneinheit bezogene Druck, so ist die bei einer Volumenänderung um dv gethane äussere Arbeit $dW = pdv$, und demgemäss das äussere Werk:

$$dw = Apdv. \tag{28}$$

Denken wir uns nun, dass der Zustand des Körpers durch die Grössen x und y bestimmt sei, so ist v als Function von x und y zu betrachten, und man kann die vorige Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy = Ap\left(\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy\right),$$

woraus sich sofort die beiden nachstehenden Gleichungen ergeben:

$$\frac{dw}{dx} = Ap\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dw}{dy} = Ap\frac{dv}{dy}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die in 4) und 7) gegebenen Ausdrücke von E_{xy} und E'_{xy} erhält man:

$$E_{xy} = A\left[\frac{d}{dy}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dy}\right)\right],$$

$$E'_{xy} = AT^2\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{p}{T}\cdot\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{T}\cdot\frac{dv}{dy}\right)\right].$$

In der letzteren dieser Gleichungen wollen wir zur Abkürzung setzen:

$$\pi = \frac{p}{T}, \tag{29}$$

wodurch sie übergeht in:

$$E'_{xy} = AT^2\left[\frac{d}{dy}\left(\pi\frac{dv}{dx}\right) - \frac{d}{dx}\left(\pi\frac{dv}{dy}\right)\right].$$

Führt man nun in diesen Ausdrücken die Differentiationen der Producte aus, und bedenkt dabei, dass $\frac{d^2v}{dx\,dy} = \frac{d^2v}{dy\,dx}$ ist, so erhält man:

$$E_{xy} = A\left(\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\right), \tag{30}$$

$$E'_{xy} = AT^2\left(\frac{d\pi}{dy}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dy}\right). \tag{31}$$

Nimmt man an, dass eine der zur Bestimmung des Körperzustandes dienenden unabhängigen Veränderlichen, z. B. die bisher mit y bezeichnete Veränderliche, die Temperatur des Körpers sei, so hat man nur statt y überall T zu schreiben, also:

$$32)\qquad E_{xT}=A\left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right),$$

$$33)\qquad E'_{xT}=AT^2\left(\frac{d\pi}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right).$$

Wendet man nun diese Ausdrücke auf die Gleichungen 22) und 23) an, und setzt darin zugleich $\frac{dw}{dT}=Ap\frac{dv}{dT}$, so kommt:

$$34)\qquad dS=\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dT}dT+A\left(\frac{dp}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right)dx,$$

$$35)\qquad dU=\left(\frac{dQ}{dT}-Ap\frac{dv}{dT}\right)dT+AT^2\left(\frac{d\pi}{dT}\cdot\frac{dv}{dx}-\frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{dv}{dT}\right)dx.$$

Besonders einfach werden diese Ausdrücke, wenn man für die zweite, noch unbestimmt gelassene Veränderliche x das Volumen v nimmt, indem man dann $\frac{dv}{dx}=1$ und $\frac{dv}{dT}=0$ zu setzen hat. Dadurch erhält man:

$$36)\qquad dS=\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dT}dT+A\frac{dp}{dT}dv,$$

$$37)\qquad dU=\frac{dQ}{dT}dT+AT^2\frac{d\pi}{dT}dv.$$

Für den Fall, wo die Volumenänderung des Körpers ohne theilweise Aenderung seines Aggregatzustandes stattfindet, ist der in den letzten Gleichungen vorkommende Differentialcoefficient $\frac{dQ}{dT}$ einfach das Product aus dem Gewichte des Körpers in seine specifische Wärme bei constantem Volumen. Bezeichnen wir diese specifische Wärme mit c und das Gewicht des Körpers mit M, so lauten die Gleichungen für diesen Fall:

$$38)\qquad dS=M\frac{c}{T}dT+A\frac{dp}{dT}dv,$$

$$39)\qquad dU=McdT+AT^2\frac{d\pi}{dT}dv.$$

Man kann, wie leicht zu ersehen ist, die vorstehenden Gleichungen noch in verschiedenen anderen Weisen specialisiren, indem man bestimmte Grössen als Veränderliche wählt, oder die Gleichungen auf bestimmte Körperclassen anwendet. Indessen will ich hierauf, sowie auf die Ausführung der Integration der vollständigen Differentialgleichungen an diesem Orte nicht weiter eingehen, weil ich schon in meiner oben citirten, zuletzt veröffentlichten Abhandlung einige derartige Fälle beispielsweise behandelt habe.

Ich hoffe, dass die vorstehende übersichtliche Zusammenstellung der auf die Entropie und Energie bezüglichen Differentialgleichungen dazu beitragen kann, die Mathematiker und Physiker mit diesen beiden Grössen,

welche in der mechanischen Wärmetheorie eine so bedeutende Rolle spielen, näher bekannt zu machen, und ihnen den Gebrauch derselben zu erleichtern. Namentlich glaube ich, dass aus der Art, wie beide Grössen immer parallel neben einander behandelt sind, der Vortheil erwächst, dass die Beziehung dieser Grössen zu einander, inwieweit sie sich gleich verhalten, und worin sie sich von einander unterscheiden, auf das Deutlichste hervortritt.

Zürich, den 24. Juli 1865.

IV.

Plücker's neue Raumgeometrie.

Von Dr. DRONKE,
Director der Provinzialgewerbeschule in Coblenz.

---

1. Durch die unsterblichen Werke Plücker's über analytische Geometrie ist ein so unendlich grosses Gebiet mit neuen Anschauungen gebracht, dass noch für viele junge Kräfte dort reicher Stoff zu schöner Arbeit aufgehäuft ist; leider haben aber bis jetzt sehr wenige mittelst der angezeigten, durch Einfachheit und Eleganz sich auszeichnenden Methode Folgerungen aus den gegebenen Principien gemacht; in England und jetzt auch in Frankreich findet die Theorie Plücker's immer mehr und mehr Anerkennung. In Deutschland greift der Verfasser selbst nach fast zwanzigjährigem Schweigen (seit 1846) wieder zur Feder und gibt selbst neue Anschauungen in der Raumgeometrie, die namentlich in ihren Anwendungen auf die Mechanik, die Optik u. s. f. von ganz unberechenbarem Vortheil sein müssen. In den *Proceedings of the Royal Society* (Februar 1865) sind die ersten Principien der neuen Theorie niedergelegt; in einer Rede, die Plücker in Birmingham vor einer Versammlung der britischen Naturforscher hielt, sind sie erweitert. Durch die Freundlichkeit des Herrn Prof. Plücker war ich in den Stand gesetzt, mit dem Inhalte dieser Rede mich bekannt zu machen und mit Erlaubniss des genannten Herrn theile ich Folgendes mit.

2. Ebenso, wie man die Ebene sich aus Punkten oder aus Geraden bestehend denken kann, würde man den Raum entweder als den Inbegriff von Punkten, Ebenen oder Geraden auffassen können. Folgt man der ersten Definition, den Raum als aus Punkten bestehend sich zu denken,

so hat man die gewöhnliche analytische Geometrie mit den 3 (Punkt-) Coordinatenaxen X, Y, Z. Als aus Ebenen zusammengesetzt dachte sich Plücker den Raum in seinem „System der Geometrie des Raumes (Düsseldorf 1846)." Dort schon gibt er (p. 322) Andeutungen über die dritte Auffassung des Raumes als aus Geraden gebildet, doch erst jetzt verfolgt er selbst diese Idee. In einem gewöhnlichen Coordinatensystem mit drei senkrecht zu einander stehenden Axen X, Y, Z, mit dem Coordinatenanfangspunkte O bedeutet die Gleichung

$$ax + by + cz = 1$$

eine Ebene, wenn a, b, c drei Constante und x, y, z die Variabeln bedeuten; hierbei sind erstere die Coordinaten der Ebene. Sind aber x, y, z constant und a, b, c veränderlich, so stellt die Gleichung einen Punkt dar vermittelst aller durch ihn gehenden Ebenen. x, y, z sind die Coordinaten desselben.

Fasst man nun aber den Raum als aus Geraden bestehend auf, so scheidet sich diese Auffassungsart sogleich in zwei neue, je nachdem man die Gerade selbst bestimmt. Bei der ersten wird der Raum gebildet von Geraden, die ihrerseits aus Punkten bestehen; durch jeden Punkt des Raumes geht eine unendliche Anzahl gerader Linien und dieser Punkt kann als Erzeugungspunkt einer jeden dieser Geraden betrachtet werden. Ferner aber kann der Raum als aus Geraden entstanden gedacht werden, deren jede ihrerseits durch den Schnitt zweier Ebenen erzeugt ist. In einer jeden Ebene liegen unendlich viele gerade Linien und eine jede derselben kann als Axe gedacht werden, um welche man die Ebene dreht.

Ein Beispiel der verschiedenen Auffassungsweisen in ihrer Anwendung liefert die Mechanik. Denken wir uns in einem Punkt angreifend eine Reihe von Kräften, so haben wir Gerade, die durch Punkte erzeugt gedacht werden; wirken jedoch Kräftepaare, so sind die entsprechenden, den Raum bildenden Linien (die Arme) erzeugt durch die Schnitte von Ebenen.

3. Im Obigen wurde bereits eine Gleichung in verschiedener Weise gedeutet; wir wollen sie auf eine andere, eine homogene Form bringen; es sei dies

$$px + qy + rz + sw = 0. \tag{1}$$

Sind hierin p, q, r, s constant, so stellt diese Gleichung eine Ebene vor, deren vier Coordinaten die genannten vier Constanten sind. Lässt man aber p, q, r und s variabel werden, während x, y, z und w constant bleiben, so ist durch 1) ein Punkt bestimmt, dessen Plancoordinaten x, y, z, w sind.

Gehen wir nun zu den Geraden über; hält man an ihrer Erzeugung durch Punkte fest, so ist eine solche durch zwei in ihr liegende Punkte völlig bestimmt; analytisch ist sie durch die Projectionen auf zwei Ebenen z. B. die XZ- und YZ-Ebene bestimmt; die Gleichungen seien:

$$\left\{\begin{array}{l} x = dz + \delta \\ y = ez + \varepsilon \end{array}\right. \tag{2}$$

Eine so bestimmte Linie wollen wir Strahl nennen, und es ist ein solcher

also auf lineare Weise durch die vier Constanten d, δ, e, ε bestimmt. Denken wir uns nun noch die dritte Projection auf die XY-Ebene — ihre Gleichung sei:

$$3)\qquad x = fy + \varphi,$$

so muss offenbar zwischen den jetzt auftretenden sechs Constanten ein bestimmtes Verhältniss bestehen, es muss sein:

$$4)\qquad f = \frac{d}{e} \text{ und } \varphi = \frac{e\delta - d\varepsilon}{e}$$

und man erhält somit nicht vier, sondern die fünf Constanten der geraden Linie: d, δ, e, ε und $e\delta - d\varepsilon$.

4. Es sei nun die Gerade, der zweiten Vorstellung gemäss, der Schnitt zweier Ebenen. Es seien dies:

$$5)\qquad \begin{cases} px + qy + rz + sw = 0 \\ p'x + q'y + r'z + s'w = 0 \end{cases}$$

Nun gehen aber nicht blos die beiden Ebenen 5) durch die Gerade, welche durch ihren Durchschnitt gebildet ist, sondern unendlich viele und die Form ihrer Gleichungen ist:

$$6)\qquad (p + \mu p')x + (q + \mu q')y + (r + \mu r')z + (s + \mu s')w = 0,$$

unter μ einen constanten Factor verstanden. Je zwei durch diese Form 6) dargestellten Ebenen schneiden sich in der durch 5) bestimmten geraden Linie. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen 5) und 6) nach einander die Grössen x, y, z und w, so erhält man folgende 4 neue Gleichungen:

$$7)\qquad \begin{cases} (ps' - p's)x + (qs' - q's)y + (rs' - r's)z = 0 \\ (pr' - p'r)x + (qr' - q'r)y - (rs' - r's)w = 0 \\ (pq' - p'q)x + (rq' - r'q)z + (sq' - s'q)w = 0 \\ -(pq' - p'q)y + (rp' - r'p)z + (sp' - s'p)w = 0 \end{cases}$$

Jede dieser von dem constanten Factor μ unabhängige Gleichung stellt wiederum eine Ebene und zwar eine solche dar, welche durch die von den Gleichungen 5) bestimmten Geraden gehen. Diese letztere lässt sich also wiederum umgekehrt durch die Ebenen 7) bestimmen; je zwei dieser letzteren schneiden sich in denselben Geraden, wie die Ebenen 5), dabei geht die erste der 4 Ebenen 7):

$$(ps' - p's)x + (qs' - q's)y + (rs' - r's)z = 0$$

durch den Coordinatenanfangspunkt.

Es sind nun aber sechs Constanten in den Gleichungen 5) und sechs in den vier Gleichungen 7); es wird aber eine Gerade durch fünf Constante bestimmt, wie dies aus 7) hervorgeht, indem je zwei Gleichungen nur fünf Coordinaten enthalten. Es muss daher zwischen jenen sechs Coordinaten der Gleichungen 7) eine Relation bestehen, die sich folgendermassen ausdrückt:

$$8)\qquad (pq' - p'q)(rs' - r's) - (pr' - p'r)(qs' - q's) + (ps' - p's)(qr' - q'r) = 0.$$

5. Soll die Gerade durch zwei in ihr liegende Punkte bestimmt werden, so haben wir nach dem Früheren:

$$9)\quad \begin{cases} px + qy + rz + sw = 0 \\ px' + qy' + rz' + sw' = 0' \end{cases}$$

unter x, y, z, w Constante und p, q, r, s Veränderliche verstanden, als Bestimmungen zweier Punkte, deren Coordinaten x, y, z, w und x', y', z', w' sind. Nun liegen aber nicht blos jene beiden Punkte 9) in der durch sie bestimmten Geraden, sondern jeder Punkt, der bestimmt wird durch:

$$p(x + \mu x') + q(y + \mu y') + r(z + \mu z') + s(w + \mu w') = 0,$$

unter μ irgend einen constanten Factor verstanden. Eliminirt man wiederum in 9) nach einander je eine der vier Grössen p, q, r oder s, so erhält man folgende vier Bestimmungsgleichungen für vier Punkte der Geraden:

$$10)\quad \begin{cases} (xw' - x'w)p + (yw' - y'w)q + (zw' - z'w)r = 0 \\ (xz' - x'z)p + (yz' - y'z)q - (zw' - z'w)s = 0 \\ (xy' - x'y)p - (yz' - y'z)r - (yw' - y'w)s = 0 \\ (xy' - x'y)q + (xz' - x'z)r + (xw' - x'w)s = 0 \end{cases}$$

Je zwei beliebige Punkte bestimmen die Gerade; da aber je zwei Bestimmungsgleichungen wiederum nur fünf Constante enthalten, während im Ganzen sechs auftreten, so haben wir für diese sechs Constanten die Relation:

$$11)\quad (xw' - x'w)(yz' - y'z) - (xz' - x'z)(yw' - y'w) + (xy' - x'y)(zw' - z'w) = 0.$$

6. Kehren wir nun nach diesen allgemeinen Betrachtungen, die wir hier nicht noch weiter ausdehnen wollen, auf die Verhältnisse, welche zwischen den drei Winkeln der Geraden und den drei Winkeln der durch den Anfangspunkt O gehenden Ebene 7) mit den Constanten bestehen, zurück zu den Betrachtungen von dem Abschnitte 3. Betrachten wir die Gleichung in der Form

$$12)\quad x = dz + \delta \quad y = ez + \varepsilon,$$

oder auch:

$$12a)\quad \begin{aligned} x.\cos\gamma - z.\cos\alpha - t.\cos\mu &= 0, \\ y.\cos\gamma - z.\cos\beta - t.\cos\lambda &= 0, \end{aligned}$$

wo α, β, γ die drei Neigungswinkel der Geraden gegen die drei Axen, λ und μ die Winkel der durch die Gerade und den Coordinatenanfangspunkt O gehenden Ebene, und t das Perpendikel von O auf die Gerade bedeutet. Diese Gleichungen stellen zwei auf die YZ und XZ senkrechte Ebenen dar, die also durch die Gerade gehen, oder diese letztere bestimmen. Es treten in diesen beiden Gleichungen nun aber nur vier, oder wenn man die Einheit hinzurechnet, fünf Constante auf, und wir haben daher mittelst der Bedingungsgleichung 8) als letzte Constante:

$$13)\quad e\delta - d\varepsilon,$$

oder

$$13a)\quad t(\cos\beta.\cos\mu - \cos\alpha.\cos\lambda),$$

entsprechend der bereits in 3) gefundenen Form der Constanten. Wollten wir alle vier Ebenen, wie dies in 10) geschah, bezeichnen, so wäre dies jetzt leicht, indem nur noch die zur XY-Ebene senkrechte und die durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Ebene zu bestimmen wäre. Die Gleichungen aufzuschreiben überlassen wir dem geneigten Leser.

Hätten wir die Gerade durch zwei Punkte bestimmt, und zwar durch ihre Durchschnittspunkte mit der XZ- und YZ-Ebene, so hätten wir sofort als deren Bestimmungsgleichungen z. B. folgende:

$$14)\qquad \begin{cases} t+pv+\pi w=0 \\ u+qv+\varkappa w=0 \end{cases},$$

wo t, u, v, w die Variabeln sind; es ergeben sich alsdann sofort die Constanten aus der Gleichung 8)

$$15)\qquad p,\ q,\ \pi,\ \varkappa,\ 1,\ q\pi-p\varkappa.$$

7. Nachdem wir auf diese Weise die Einführung der Constanten $e\delta-d\varepsilon$ gerechtfertigt und ihre Entstehung nachgewiesen, kehren wir uns zu einigen Weiterungen aus dieser Anschauungsweise des Raumes. Eine Gerade, die durch den Schnitt zweier Ebenen erzeugt ist, wollen wir Axe, und eine solche, die durch zwei Punkte bestimmt ist, Strahl nennen.

Einen Complex von Strahlen oder Axen stellt eine Gleichung zwischen den Coordinaten derselben dar; die Linien, welche zwei Complexen, dargestellt durch zwei Gleichungen, gemeinsam sind, bilden eine Congruenz; die drei Complexen gemeinsamen Geraden werden eine Configuration genannt. In einem Complexe ist jeder Punkt der Scheitel eines Kegels und jede Ebene enthält eine Curve. In einer Congruenz gibt es in jeder Ebene eine bestimmte Anzahl gerader Linien, und eben eine solche bestimmte Zahl solcher Geraden, die durch einen Punkt gehen. Eine Configuration wird durch die Bewegung einer Geraden erzeugt.

In einem linearen Complex geht der Kegel, welcher von den durch einen Punkt gehenden Geraden eines Complexes gebildet wird, in eine Ebene über; alle Geraden, die in einer Ebene liegen, gehen hierbei durch einen bestimmten Punkt. Zwei lineare Complexe schneiden einander in einer linearen Congruenz. In einer solchen gibt es immer eine Gerade, die sowohl durch einen bestimmten Punkt geht und in einer gegebenen Ebene liegt. Drei lineare Complexe haben eine lineare Configuration gemeinsam.

Die lineare Gleichung:

$$16)\qquad Ad+Be+C+D\delta+E\varepsilon+F(e\delta-d\varepsilon)=0$$

ist die allgemeinste Form der Gleichung eines linearen Complexes. Durch die Einführung einer sechsten Grösse — vergl. Gleichung 12) — kann man die Gleichung leicht homogen und damit in Bezug auf die drei Axen eines rechtwinkligen Punktcoordinatensystems symmetrisch machen. Die eigentliche Basis der neuen Anschauung liegt jedoch in der Einführung der Coordinate $(e\delta-d\varepsilon)$.

8. Betrachten wir zunächst einen linearen Complex. Für irgend einen Punkt liegen alle Gerade, wie wir bereits früher bemerkt haben, in einer Ebene; es ist die dem Punkt entsprechende Ebene, und die Geraden ordnen sich zu je zweien zu einem conjugirten Paare und jeder Geraden entspricht eine conjugirte. Jede Gerade, welche zwei conjugirte schneidet, ist ein Strahl des Complexes. Jeder Strahl desselben muss als zwei zusammenfallende correspondirende Geraden angesehen werden.

Statt der Gleichung 15) kann man einen linearen Complex offenbar auch, unter k eine Constante verstanden, durch eine der drei folgenden Gleichungen bestimmen:

$$17)\qquad \left\{ \begin{aligned} e\delta - d\varepsilon &= k \\ \varepsilon &= k.d \\ \delta &= k.e \end{aligned} \right. ,$$

d. h. ein linearer Complex ist bestimmt durch die Lage einer Geraden und die Constante k; erstere nennen wir die Axe des Complexes. Ein solcher kann, ohne dass eine Aenderung eintritt, sich um diese Axe drehen, oder parallel mit sich selbst, der Axe entlang verschieben. Wird die Constante $k = 0$, so gehen alle Strahlen durch die Axe.

9. Zwei lineare Complexe, deren Gleichungen $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$ seien, schneiden sich in einer linearen Congruenz; es gehen aber nicht blos jene zwei Complexe durch die von ihnen bestimmte Congruenz, sonder alle die, deren Gleichungen unter die Form

$$18)\qquad \Omega + \mu\Omega' = 0$$

fallen, unter μ eine Constante gedacht. Durch irgend einen Punkt geht nur ein ensprechender Strahl und in einer Ebene liegt ebenfalls nur ein correspondirender Strahl. In Bezug auf jeden Complex, der durch die Congruenz geht, gibt es zu einer gegebenen Geraden eine conjugirte Linie und alle diese conjugirten Linien bilden ein einmantliges Hyperboloid; die Generatricen der zweiten Erzeugungsart desselben sind Strahlen der Congruenz und diese letztere kann man also durch die Drehung eines Hyperboloides um eine seiner Geraden erzeugen.

Alle Axen der durch die Gleichung 17) dargestellten Complexe, welche dieselbe lineare Congruenz gemeinsam haben, schneiden eine Gerade, die Axe der Congruenz, unter rechten Winkeln. Die Axen der beiden Complexe, deren Strahlen durch jene gehen, was der Fall ist, wenn in den Gleichungen 16) die Constante $k = 0$ wird, sind die Directricen der Congruenz. Im Speciellen können diese imaginär werden, in eine zusammenfallen, oder eine derselben kann auch im Unendlichen liegen. Jede Gerade, welche die beiden Directricen schneidet, ist ein Strahl der Congruenz; die Ebene, welche parallel zu beiden Directricen gleichweit von beiden absteht, ist die Centralebene, sie wird von der Axe im Centrum rechtwinklig geschnitten.

9. Eine lineare Configuration, welche durch den Schnitt dreier linearer Complexe entsteht, ist unendlich vielen Complexen gemeinsam. Sind die

drei linearen Gleichungen $\Omega=0$, $\Omega'=0$ und $\Omega''=0$ die ursprünglichen, so bestimmen sie eine Configuration; durch dieselbe geht aber auch jeder Complex, dessen Gleichung unter die Form fällt

$$\Omega+\mu\Omega'+\nu\Omega''=0. \tag{19}$$

Nach den Betrachtungen des vorigen Abschnittes ersieht man sofort, dass die lineare Configuration ein Hyperboloid ist, indem sie auch durch den Schnitt linearer Congruenzen gebildet wird. Während hierbei die Strahlen die eine Erzeugungsart des Hyperboloides bilden, ist die andere von den Directricen aller durch die Configuration gehenden Congruenzen dargestellt. Die Centralebenen der letzteren schneiden sich in einem Punkte, im Centrum des Hyperboloids; ihre Diameter schneiden beide Directricen der Congruenzen; sobald diese zusammenfallen, werden die Diameter zu Asymptoten. Rückt eine Directrix ins Unendliche, so geht das Hyperboloid in ein Paraboloid über.

10. Im Vorstehenden sind die hauptsächlichsten Resultate des in den *Proceedings of the royal society* enthaltenen Aufsatzes wiedergegeben. Die grossen Folgerungen, die aus der neuen Betrachtungsweise der Raumgeometrie entspringen, sind sowohl für die Geometrie selbst, als auch namentlich für die Anwendungen derselben auf Physik und Mechanik von bedeutender Tragweite. Eine weitere Discussion namentlich auch unter Erweiterung des Grades der Gleichung soll hier nicht vorgenommen werden. Ich werde darauf zurückkommen bei einer andern Gelegenheit, und namentlich hierbei die Anwendungen hervorzuheben suchen.

V.

Ueber Integrale zweiter Gattung und die Werthermittelung der ϑ-Function.

Von Dr. G. Roch,
Docent an der Universität Halle.

In einer früheren Notiz habe ich gezeigt, wie man die Integrale dritter und zweiter Gattung vermöge der Riemann'schen Principien auf einem sehr einfachen Wege durch ϑ-Functionen ausgedrückt erhalten kann.

Ein Integral zweiter Gattung, welches nur in einem Punkte der Fläche T unendlich erster Ordnung wird, enthält, ausser einer additiven Constanten, nur noch zwei willkürliche Constanten. Ist δ in dem Punkte, wo das Integral unendlich ist, Null erster Ordnung, so ist das Integral daselbst nur um Endliches von $\frac{A}{\delta}$ unterschieden; diese Grösse A ist eine der willkürlichen Constanten; ausserdem sind noch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln, oder (bei elliptischen Functionen, wo $p=1$) einer der beiden Periodicitätsmoduln willkürlich (p. 183, Jahrg. X d. Zeitschr.). Sei u ein endlich bleibendes Integral, w ein Integral zweiter Gattung, welches nur in einem Punkte unendlich erster Ordnung ist, so sind daher alle Integrale zweiter Gattung, die mit w gleichzeitig unendlich erster Ordnung sind, von der Form:

$$Aw + Bu + Const;$$

man kann die A und B auch bestimmen durch Angabe beider Periodicitätsmoduln.

Die Integrale zweiter Gattung, welche in Verzweigungspunkten unendlich sind, können auch sehr leicht durch Differentiation der endlich bleibenden Integrale erhalten werden. Dies ist schon von Jacobi (Crelle, Journ. Bd. 36, p. 56) zur Bestimmung von $\vartheta(0)$ benutzt worden; der dortige Gedankengang ist jedoch ziemlich complicirt; Riemann (Abhdlgn. §. 25) hat schon angegeben, dass man auf dieselbe Weise die Werthe der ϑ-Function

für höhere Abel'sche Transcendenten erhalten kann. Es ist daher wohl zunächst von Interesse, die Bestimmung für elliptische Functionen in einer leicht der Verallgemeinerung fähigen Form zu kennen.

Mittlerweile ist diese Bestimmung für die Rosenhain'schen Transcendenten in einer sehr ausgezeichneten Arbeit des Herrn Dr. Thomie geliefert worden; ich selbst, schon längere Zeit mit Arbeiten der Art beschäftigt, vermag diese Bestimmung noch etwas einfacher, wenn auch auf ähnliche Weise, zu liefern, und will daran die Bestimmung für beliebige ultraelliptische Functionen anschliessen.

I.

Elliptische Transcendenten.

Es sei

$$u = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z.1-z.1-k^2 z}},\ v = \frac{\pi i u}{2k},\ lg q = -\pi\frac{K'}{K}.$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nv}.$$

Wir legen die Querschnitte wie im Jahrgang X dieser Zeitschrift, wonach $\vartheta_3(v) = 0$ für $z = \frac{1}{k^2}$.

In diesem Punkte ist

$$\frac{du}{dk^2} = \frac{1}{4}\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{z.(1-z)(1-k^2 z)^3}}$$

unendlich erster Ordnung.

Ebenso

$$\frac{dv}{dk^2} = \frac{\pi i}{2K}\frac{du}{dk} - \frac{\pi i u}{2K^2}\frac{dK}{dk^2}.$$

Die Grössen $\frac{dv}{dk^2}$ und $\frac{dlg\,\vartheta_3(v)}{dv}$ sind gleichzeitig unendlich erster Ordnung und haben die aus der Tabelle ersichtlichen Periodicitätsmoduln:

	(a),	(b)
$\frac{dv}{dk^2}$,	0,	$\frac{dlg q}{dk^2}$
$\frac{dlg\,\vartheta_3(v)}{dv}$,	0,	-2.

Nach dem in der Einleitung Gesagten ist daher:

$$\text{1)}\qquad \frac{dlg\,\vartheta_3(v)}{dv} = -2 \cdot \frac{1}{\frac{dlg q}{dk^2}} \cdot \frac{dv}{dk^2};$$

denn diese Functionen stimmen in den beiden Periodicitätsmoduln überein; und da $\vartheta'_3(v)$ und das von $z=0$ angenommene Integral $\frac{dv}{dk^2}$ in $z=0$ gleichzeitig verschwinden, so ist keine additive Constante hinzuzufügen.

Untersucht man die Werthe in der Nähe von $z=\frac{1}{k^2}$; setzen wir $z=\frac{1}{k^2}+\zeta$, $v=v\left(\frac{1}{k^2}\right)+\delta$; dann sind

$$\frac{d\lg\vartheta_3(v)}{dv}=\frac{1}{\delta},\quad \frac{dv}{dk^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi i}{2K}\int_{\frac{1}{k^2}}^{z}\frac{z\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)^3}}$$

bei blosser Berücksichtigung der Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\delta}$; jetzt ergiebt sich, wenn $\sqrt{z.(1-z)(1-k^2z)}$ durch $\sqrt{\frac{1}{k^2}\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)(1-k^2z)}$,

$\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)^3}$ „ $\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)(1-k^2z)^3}$

ersetzt werden,

$$\frac{dv}{dk^2}=+\frac{1}{2}\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{1}{k^3k'}\cdot\frac{1}{\sqrt{\zeta}},$$

$$\delta=+\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{k}{k_1}\cdot\sqrt{\zeta},$$

und die Vergleichung der Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$ in 1) liefert die bekannte Gleichung:

$$\frac{dk^2}{d\lg q}=+\frac{4K^2k^2k'^2}{\pi^2}.$$

Wird 1) nach z differentiirt und dann $z=0$ gesetzt, so darf $\frac{d^2\lg\vartheta_3(v)}{dv^2}$ durch $\frac{\vartheta''(v)}{\vartheta(0)}=4\frac{d\lg\vartheta(v)}{d\lg q}$ ersetzt werden.

Ferner ist

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dv}{dk^2}\right)=\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{1}{4}\frac{z}{\sqrt{z.1-z.1-k^2z}}-\frac{\pi i}{2K^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z.1-z.1-k^2z}}\cdot\frac{dK}{dk^2};$$

und die Ausführung liefert

$$\frac{d\lg\vartheta_3(v)}{d\lg q}=\frac{1}{2K}\frac{dK}{dk^2}\cdot\frac{dk^2}{d\lg q},\text{ oder}$$

$$\vartheta_3(0)=c.\sqrt{K}, \tag{2}$$

wo c von $\lg q$ unabhängig ist. Man kennt den Werth dieses Zahlenfactors. Betrachtungen anderer Art liefern $c=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Man kann auch von dem allgemeineren elliptischen Integral ausgehen:

$$u=\int_a^z\frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(c-c)(z-\partial)}},\quad K=\int_{z=a}^{z=b}du,\quad K'i=\int_{z=b}^{z=c}du$$

$$v=\frac{\pi i u}{2K},\ \lg q=-\pi\frac{K'}{K}.$$

Jetzt sind die Verzweigungswerthe a, b, c, ∂ an die Stelle von $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$ getreten und man kann jede der Grössen $a \ldots \partial$ einzeln als Function von q betrachten. Jetzt $\vartheta_3(v)$ Null für $z=c$ und die vorigen Betrachtungen ergeben:

$$3)\qquad \frac{\vartheta'_3(v)}{\vartheta_3(v)} = -2\frac{dc}{dlgq}\cdot\frac{dv}{dc} = -2\frac{dc}{dlgq}\left(\frac{\pi i}{2K}\frac{du}{dc} - \frac{\pi i u}{2K^2}\frac{dK}{dc}\right).$$

In der Nähe von $z=c$, für $z=c+\zeta$ ist

$$v = v(c) + \delta,\ \frac{\vartheta'_3(v)}{\vartheta_3(v)} = \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{dv}{dc} = -\frac{\pi i}{2K}\frac{1}{\sqrt{(c-a)(c-b)(c-\partial)}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}};\ \delta = \frac{\pi i}{K}\frac{\delta}{\sqrt{(c-a)(c-b)(c-\partial)}},$$

und daher:

$$4)\qquad \frac{dc}{dlgq} = -\frac{K^2(c-a)(c-b)(c-\partial)}{\pi^2}.$$

Man kann als Argument v der ϑ-Function auch das von einem andern Verzweigungspunkt, etwa b, erstreckte Integral

$$v = \int_{z=b}^{z=z} dv$$

nehmen. Dann wird $\vartheta_3(v)$ gleich Null in $z=\partial$, da

$$v(\partial) - v(b) \equiv v(c) - v(a),$$

und es ist

$$5)\qquad \frac{\vartheta'_3(v)}{\vartheta_3(v)} = -2\frac{dv}{d\delta} : \frac{dlgq}{d\partial} = -2\frac{d\partial}{dlgq}\left(\frac{\pi i}{2K}\frac{du}{d\partial} - \frac{\pi i u}{2K^2}\frac{dK}{d\partial}\right).$$

Dadurch entsteht:

$$6)\qquad \frac{d\partial}{dlgq} = -\frac{K^2(\partial-a)(\partial-b)(\partial-c)}{\pi^2}.$$

Ferner giebt die Differentiation von 3), wenn dann $z=a$ gesetzt wird ($v=0$ für $z=a$):

$$\frac{\vartheta''_3(0)}{\vartheta_3(v)} = -2\frac{dc}{dlgq}\left(\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{K}{\pi i(a-c)} - \frac{1}{K}\frac{dK}{dt}\right),$$

oder:

$$7)\qquad \vartheta_3(v) = C\sqrt{K}\cdot\sqrt[4]{c-a}.$$

Die Constante C kann noch von a, b, ∂ abhängen. Nehmen wir als Argument der ϑ-Function das von $z=b$ an erstreckte Integral, so giebt die Formel 5) ebenso wie 3) durch Differentiation:

$$\frac{\vartheta''_3(0)}{\vartheta_3(v)} = -2\frac{d\partial}{dlgq}\left(\frac{\pi i}{2K}\cdot\frac{K}{\pi i(b-\partial)} - \frac{1}{K}\frac{dK}{d\partial}\right),$$

oder:

$$8)\qquad \vartheta_3(v) = C_1\sqrt{K}\cdot\sqrt[4]{b-\partial}.$$

Hätten wir $z=c$, und dann $z=\partial$ als Anfangspunkte des Integrales v genommen, so würden wir wieder 7) und 8) erhalten.

C ist von c, C_1 von ∂ unabhängig; ebenso muss C von a und C_1 von b unabhängig sein vermöge der letzteren Bemerkung; die Formeln 7) und 8) liefern daher:

$$9) \qquad \vartheta_3(v) = A.\sqrt{K}.\sqrt[4]{(c-a)(b-\partial)}.$$

Die Vergleichung mit den früheren Formeln ($a=0$, $b=1$ etc.) ergiebt $A=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. $\vartheta_3(v)$ wird immer mehr 1, je mehr q der Null sich nähert. Setzen wir nun a nahezu $=b$, so wird immer genauer

$$K=\tfrac{1}{2}\int\frac{dz}{(z-a)\sqrt{(a-c)(a-d)}}$$

um $z=a$ herumgenommen, oder $K=\frac{\pi i}{\sqrt{(a-c)(a-d)}}$. Ferner wächst K' ins Unendliche, so dass $lg\, q=-\infty$ wird. Daher muss für $a=b$ sich ergeben $\vartheta_3(v)=1$, oder $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

II.

Vierfach periodische Functionen.

Ich will in diesen Entwickelungen im Allgemeinen von den Bezeichnungen Gebrauch machen, wie sie nach Riemann's Vorgange in der Abhandlung von Prym gebraucht sind. Wir haben zwei gleichverzweigte endlich bleibende Integrale

$$u_1=\int\frac{dz}{\sqrt{(z-k)(z-h)(z-l)(z-k_1)(z-h_1)(z-l_1)}}=\int\frac{dz}{s},\ w_2=\int\frac{z\,dz}{s}.$$

Als Argumente der ϑ-Function

$$\vartheta(u_1,u_2)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, e^{m^2a_{11}+2mna_{12}+n^2a_{22}+mu_1+2nu_2},$$

führen wir die Integrale ein:

$$u_1=\int\frac{\varphi_1(z)\,dz}{s},\quad u_2=\int\frac{\varphi_2(z)\,dz}{s},$$

$$\varphi_1(z)=a_1+b_1z;\quad \varphi_2(z)=a_2+b_2z.$$

In einer andern Notiz habe ich gezeigt, wie sich die Integrale dritter Gattung durch ϑ-Functionen ausdrücken lassen.

Die endlich bleibenden Integrale, welche wie s verzweigt sind, sind alle in der Form enthalten

$$av_1+bu_2$$

und sind durch Angabe zweier Periodicitätsmoduln bestimmt. Die Integrale zweiter Gattung, welche in einem Punkte unendlich 1. Ordnung sind, enthalten noch eine willkürliche Constante, welche durch Angabe eines dritten

Periodicitätsmoduls bestimmt ist. Diese Integrale sind also durch Angabe dreier Periodicitätsmoduln bestimmt. Die Integrale

$$\frac{dw_1}{dk} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dz}{s.(z-k)}, \quad \frac{dw_2}{dk} = \tfrac{1}{2}\int \frac{z\,dz}{s(z-k)}$$

sind in $z=k$ unendlich 1. Ordnung, ebenso die Integrale

$$\frac{du_1}{dk} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\varphi_1(z)\,dz}{s(z-k)} + \int \frac{\left(\frac{da_1}{dk} + z\frac{db_1}{dk}\right)dz}{s}$$

und

$$\frac{du_2}{dk} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\varphi_2(z)\,dz}{s(z-k)} + \int \frac{\left(\frac{da_2}{dk} + z\frac{db_2}{dk}\right)dz}{s}.$$

Die Periodicitätsmoduln der u_1, u_2 an den vier Querschnitten $(a_1), (a_2), (b_1), (b)$ sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

	(a_1)	(a_2)	(b_1)	(b_2)
u_1	πi	0	a_{11}	a_{12}
u_2	0	πi	a_{21}	a_{22}.

$$a_{12} = a_{21}$$

Daher haben $\frac{du_1}{dk}, \frac{du_2}{dk}$ die Periodicitätsmoduln:

	(a_1)	(a_2)	(b_1)	(b_2)
$\frac{du_1}{dk}$	0	0	$\frac{da_{11}}{dk}$	$\frac{da_{12}}{dk}$
$\frac{du_2}{dk}$	0	0	$\frac{da_{21}}{dk}$	$\frac{da_{22}}{dk}$.

Der Ausdruck

$$lg\,\frac{\vartheta(u_1 + u'_1 - \alpha_1,\ u_2 + u'_2 - \alpha_2)}{\vartheta(u_1 + u'_1 - \beta_1,\ u_2 + u'_2 - \beta_2)} = lg\,Q$$

kann sowohl als Function der oberen Grenze z der Integrale u_1, u_2, als auch als Function der Grenze z_1 von u'_1 und u'_2 betrachtet werden. Q ist im ersteren Falle Null, wenn der Punkt (u_1, u_2) nach (α_1, α_2), unendlich, wenn derselbe nach (β_1, β_2) fällt; die Periodicitätsmoduln von $lg\,Q$ sind 0, oder ganze Vielfache von $2\pi i$ an (a_1) und (a_2), $2(\alpha_1-\beta_1)$, $2(\alpha_2-\beta_2)$ an (b_1) und (b_2) resp.; ganz dieselben Eigenschaften hat $lg\,Q$ als Function von (u'_1, u'_2) und es ist daher $lg\,Q$ die Summe zweier gleich gebauten Integrale 3. Gattung, deren Bau ich anderwärts angegeben habe.

Lassen wir jetzt α_1, α_2 und β_1, β_2 nahezu auf einander fallen, so ist $lg\,Q$ mit

$$\frac{d}{da}[lg\,\vartheta(u_1 + u'_1 - \alpha_1,\ u_2 + u'_2 - \alpha_2)].da$$

identisch, wenn wir das z des Punktes (α_1, α_2) mit a bezeichnen. Die Grösse: $\vartheta(u_1+u'_1-\alpha_1, u_2+u'_2-\alpha_2)$ bezeichnen wir kürzer mit $\vartheta(u+u'-\alpha)$; dann ist:

$$10) \quad \frac{d\lg\vartheta(u+u'-a)}{du_1}\varphi_1(a)+\frac{d\lg\vartheta(u+u'-a)}{du_2}\varphi_2(a)$$

ein Integral zweiter Gattung, welches wir für den Fall untersuchen, dass $a = k$.

Sowohl $\frac{d\lg\vartheta}{du_1}$, als $\frac{d\lg\vartheta}{du_2}$ haben zu beiden Seiten der Querschnitte (a_1), (a_2) gleiche Werthe; dagegen sind -2 und Null die Periodicitätsmoduln von $\frac{d\lg\vartheta}{du_1}$, 0 und -2 die von $\frac{d\lg\vartheta}{du_2}$ an (b_1) und (b_2) resp., sowohl wenn man diese Grössen als Function von z, als auch wenn man sie als Function von z_1 betrachtet. Unsere Grösse 10) hat also an (b_1), (b_2) die Periodicitätsmoduln

$$-2\varphi_1(k), \quad -2\varphi_2(k).$$

Nach dem in diesem Capitel über Integrale zweiter Gattung Gesagten folgt hieraus, dass sich die Grösse 10) in der Form sowohl

$$c_1.\frac{d(u_1+u'_1)}{dk}, \text{ als auch } c_2.\frac{d(u_2+u'_2)}{dk}$$

ausdrücken lässt. Je nachdem man die Moduln an (b_1) oder (b_2) bestimmt, erhält man:

$$11) \begin{cases} \frac{d\lg\vartheta[u+u'+u(k)]}{du_1}\varphi_1(k)+\frac{d\lg\vartheta[u+u'+u(k)]}{du_2}\varphi_2(k) \\ = -2\frac{d(u_1+u'_1)}{dk}.\frac{\varphi_1(k)}{\frac{da_{11}}{dk}} = -2\frac{d(u_1+u'_1)}{dk}\frac{\varphi_2(k)}{\frac{da_{12}}{dk}} \\ = -2\frac{d(u_2+u'_2)}{dk}.\frac{\varphi_1(k)}{\frac{da_{21}}{dk}} = -2\frac{d(u_2+u'_2)}{dk}\frac{\varphi_2(k)}{\frac{da_{22}}{dk}}. \end{cases}$$

Bringt man z in die Nähe von k, $z = k+\zeta$, so wird

$$u_1 = u_1(k)+\delta_1, \quad u_2 = u_2(k)+\delta_2$$

$$\delta_1 = \frac{2\varphi_1(k)}{\sqrt{(k-h)(k-l)(k-k_1)(k-h_1)(k-l_1)}}, \sqrt{(z-k)} = \frac{2\varphi_1(k)}{\Pi\sqrt{(k-k_i)}}\sqrt{(z-k)}$$

$$\delta_2 = \frac{2\varphi_2(k)}{\Pi\sqrt{(k-k_i)}}\sqrt{(z-k)}.$$

Durch $\Pi(k-k_i)$ soll das Product $(k-h)(k-l)\ldots(k-l_1)$ bezeichnet werden; ähnlich in andern Fällen durch $\Pi(h-k_i)$ das Product von $(h-k)(h-l)\ldots(h-l_1)$ etc.

Für $z = k+\zeta$ ist ferner die linke Seite von 11) gleich:

$$\frac{\frac{d\vartheta}{du_1}\varphi_1(k)+\frac{d\vartheta}{du_2}\varphi_2(k)}{\frac{d\vartheta}{du_1}\delta_1+\frac{d\vartheta}{du_2}\delta_2}\frac{\Pi\sqrt{(k-k_i)}}{2\sqrt{(z-k)}}.$$

Die Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$ in $\frac{du_1}{dk}$ ist:

$$\frac{\varphi_1(k)}{2\Pi\sqrt{(k-k_i)}}\int\frac{dz}{\sqrt{z-k}^3}=\frac{-\varphi_1(k)}{4\Pi\sqrt{(k-k_i)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z-k}};$$

aus den Gleichungen 11) folgt daher:

$$12)\quad \frac{da_{11}}{dk}=\frac{4\varphi_1^2(k)}{\Pi(k-k_i)};\ \frac{da_{12}}{dk}=\frac{4\varphi_1(k)\varphi_2(k)}{\Pi(k-k_i)},\ \frac{da_{22}}{dk}=\frac{4\varphi_2^2(k)}{\Pi(k-k_i)}$$

analog der Gleichung 4).

Die Gleichung 11) kann vermöge der Proportionen:

$$13)\qquad \varphi_1(k):\varphi_2(k)=\frac{da_{11}}{dk}:\frac{da_{12}}{dk}=\frac{da_{12}}{dk}:\frac{da_{22}}{dk}$$

auch geschrieben werden:

$$14)\quad \begin{cases} -2\left(\frac{du_1}{dk}+\frac{du'_1}{dk}\right)=\left(\frac{da_{11}}{dk}\frac{dlg\vartheta}{du_1}+\frac{da_{12}}{dk}\frac{dlg\vartheta}{du_2}\right)+Const, \\ -2\left(\frac{du_2}{dk}+\frac{du'_2}{dk}\right)=\left(\frac{da_{12}}{dk}\frac{dlg\vartheta}{du_1}+\frac{da_{22}}{dk}\frac{dlg\vartheta}{du_2}\right)+Const. \end{cases}$$

Die zwei Argumente der ϑ-Function sind

$$u_1+u'_1-u_1(k),\quad u_2+u'_2-u_2(k).$$

Es folgt nun aus den Werthen der u_1, u_2 in den 6 Verzweigungspunkten, wie sie in der Abhandlung von Prym p. 36 angegeben sind, dass erstens immer

$$[u_1(k)+u_1(h)+u_1(l),\ u_2(k)+u_2(h)+u_2(l)]$$
$$\equiv[u_1(k_1)+u_1(h_1)+u_1(l_1),\ u_2(k_1)+u_2(h_1)+u_2(l_1)]$$

(vergl. auch Prym p. 10). Ferner folgt, dass es drei solche Verzweigungspunkte k, h, l giebt, für welche diese Summen congruent Null sind. Dann ist

$$\vartheta'_1[u(k)+u(h)+u(l)]=\vartheta'_2[u(k)+u(h)+u(l)]=0$$

und $\frac{d^2 lg\vartheta}{du_1^2}$ ist mit $\frac{d^2\vartheta}{du_1^2}\cdot\frac{1}{\vartheta}$ identisch etc.

Differentiiren wir jetzt die erste Gleichung in 14) nach z und z_1 gleichzeitig, dabei dz_1 und dz so von einander abhängen lassend, dass

$$\frac{du_2}{dz}dz+\frac{du'_2}{dz_1}dz_1=0$$

ist, so wird sich nun das erste der beiden Argumente der ϑ-Function, nämlich $u_1+u'_1-u_1(k)$ ändern, während $u_2+u'_2-u(k)$ constant bleibt, und es ergiebt sich aus 14):

$$-2\frac{d}{dk}\left(\frac{du_1}{dz}dz+\frac{du'_1}{dz_1}dz_1\right)=\left(\frac{da_{11}}{dk}\frac{d^2lg\vartheta}{du_1^2}+\frac{da_{12}}{dk}\frac{d^2lg\vartheta}{du_1du_2}\right)\left(\frac{du_1}{dz}dz+\frac{du'_1}{dz_1}dz_1\right)$$
$$\frac{du_2}{dz}dz+\frac{du'_2}{dz_1}dz_1=0.$$

Die Differentialquotienten nach k sind nicht auf dz und dz_1, oder deren Verhältniss $-\varphi_2(z_1):\varphi_2(z)$ auszudehnen.

Jetzt differentiiren wir die zweite der Gleichungen 14) nach z und z_1 und setzen:

$$\frac{du_1}{dz}dz + \frac{du'_1}{dz_1}dz_1 = 0$$

$$-2\frac{d}{dk}\left(\frac{du_2}{dz}dz + \frac{du'_2}{dz_1}dz_1\right) = \left(\frac{da_{12}}{dk}\frac{d^2 lg\,\vartheta}{du_1 du_2} + \frac{da_{22}}{dk}\frac{d^2 lg\,\vartheta}{du_2^2}\right)\left(\frac{du_2}{dz}dz + \frac{du'_2}{dz_1}dz\right).$$

Führen wir die Verhältnisse $dz : dz_1$ in diese beiden so erhaltenen Gleichungen ein, so entsteht durch Addition:

$$\frac{da_{11}}{dk}\frac{d^2 lg\,\vartheta}{du_1^2} + 2\frac{da_{12}}{dk}\frac{d^2 lg\,\vartheta}{du_1 du_2} + \frac{da_{22}}{dk}\frac{d^2 lg\,\vartheta}{du_2^2} = -2\frac{\frac{d}{dk}\left(\frac{du_1}{dz}\frac{du'_2}{dz_1} - \frac{du_2}{dz}\frac{du'_1}{dz_1}\right)}{\left(\frac{du_1}{dz}\frac{du'_2}{dz_1} - \frac{du_2}{dz}\frac{du'_1}{dz_1}\right)}.$$

Wir lassen jetzt u nach h, u' nach l fallen, setzen dann

$$\frac{d^2\vartheta}{du_1^2} = 4\frac{d\vartheta(v,0)}{da_{11}} \text{ u. s. w.}$$

und erhalten dadurch:

$$\frac{dlg\,\vartheta}{dk} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{dlg\left(\frac{du_1}{dz}\frac{du'_2}{dz_1} - \frac{du_2}{dz}\frac{du'_1}{dz_1}\right)}{dk}\right)_{z=h,\ z_1=l}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{d_1 lg\,[\varphi_1(h)\,\varphi_2(l) - \varphi_2(h)\,\varphi_1(l)]}{dk} + \tfrac{1}{4}\frac{dlg[(h-k)\,(l-k)]}{dk}.$$

Ebenso hätte man von den Verzweigungspunkten h oder l statt von k ausgehen können; es ist

$$\varphi_1(h)\,\varphi_2(l) - \varphi_2(h)\,\varphi_1(l) = (a_1 b_2 - b_1 a_2)(l-h);$$

die letzte Gleichung liefert daher:

$$lg\,\vartheta = c.\sqrt[4]{(h-k)\ (l-k)\ (h-l)} : \sqrt{(a_1 b_2 - b_1 a_2)},$$

wo c von h, k und l unabhängig ist; man hätte auch die drei Punkte h_1, k_1, l_1 nehmen können und dies würde geben:

$$15)\ lg\,\vartheta = c\sqrt[4]{(h-k)(k-l)(l-h)(h_1-k_1)(k_1-l_1)(l_1-h_1)} : \sqrt{(a_1 b_2 - b_1 a_2)},$$

wo c von allen 6 Verzweigungspunkten unabhängig ist, also eine blosse Zahlenconstante bezeichnet.

Diese Grösse $\sqrt{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ kann auch, wie bei den elliptischen Functionen durch K, so in diesem Falle durch die Periodicitätsmoduln der Integrale w_1, w_2 an (a_1), (a_2) ausgedrückt werden.

Sind A'_1, A''_1, die Moduln von w_1, A'_2, A''_2 die von w_2 (siehe Prym p. 23), so ist

$$a_1 A'_1 + b_1 A'_2 = \pi i; \quad a_2 A'_1 + b_2 A'_2 = 0;$$
$$a_1 A''_1 + b_1 A''_2 = 0; \quad a_2 A''_1 + b_2 A''_2 = \pi i;$$

hieraus folgt

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \frac{-\pi^2}{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2},$$

oder:

$$16)\ \vartheta(0,0) = c\sqrt[4]{[(k-h)(h-l)(l-k)(h_1-k_1)(k_1-l_1)(l_1-h_1)]}.\sqrt{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2}.$$

Man kann nun wieder Verzweigungspunkte so einander nähern, dass die

Periodicitätsmoduln an den $(b_1), (b_2)$ dem absoluten Werthe nach grösser und grösser werden.

Bei der von Prym gewählten Anordnung der Querschnitte kann man die sechs Verzweigungspunkte

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{1}{\mu^2}, \quad \infty$$

bezeichnen:

$$h_1, \quad h, \quad k_1, \quad l, \quad l_1, \quad k,$$

weil dann in der That

$$[u_1(h) + u_1(k) + u_1(l) + u_2(h) + \ldots] \equiv (0, 0)$$

ist (siehe Prym p. 38). Lassen wir h mit k_1, l_1 mit k zusammenfallen (in der Bezeichnung des Herrn Prym: $\varkappa = 1$, $\frac{1}{\mu} = \infty$), so entsteht $\pi . c$ als Werth der rechten Seite von 16). Die Grössen a_{11}, a_{12}, a_{22} werden immer mehr und mehr negativ unendlich, so dass $\vartheta(0,0) = 1$ wird. Dies giebt

$$c = \frac{1}{\pi}. \tag{17}$$

Man kann aus den Formeln 11) auch noch andere Formen für $\frac{dlg\vartheta}{dk}$ herleiten.

Bezeichnen wir vorübergehend einmal

$$\varphi_1(k)\frac{dlg\vartheta(u+u'+uk)}{du_1} + \varphi_2(k)\frac{dlg\vartheta[u+u'+u(k)]}{du_2} = U,$$

so folgt durch Differentiation von 11) nach z und z_1:

$$\varphi_1(z)\frac{\partial U}{\partial u_1} + \varphi_2(z)\frac{dU}{du_2} = -2\left(S\frac{d}{dk}\frac{du_i}{dz}\right)\frac{\varphi_p(k)}{\frac{da_{i,r}}{dk}},$$

$$\varphi_1(z_1)\frac{dU}{du_1} + \varphi_2(z_1)\frac{dU}{du_2} = -2\left(S_1\frac{d}{dk}\frac{du'_i}{dz_1}\right)\frac{\varphi_p(k)}{\frac{da_{i,r}}{dk}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{k-z_1}{z-z_1}$ und $\frac{z-k}{z-z_1}$, so entsteht durch Addition, da:

$$\frac{1}{z-z_1}[\varphi_i(z)(k-z_1) + \varphi_i(z_1)(z-k)] = \varphi_i(k)$$

mit Benutzung der Werthe für $\frac{da_{i,k}}{dr}$ folgende Gleichung:

$$\frac{dlg\vartheta\,[u(h)+u(l)+uk]}{dk} = -\frac{1}{2\varphi_i(k)}\left(\frac{da_i}{dk} + k\frac{db_i}{dk}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_1-k} + \frac{1}{z-k}\right)$$
$$- \frac{b_i}{4}\frac{1}{\varphi_i(k)}$$

oder:

$$\frac{dlg\vartheta\,[u(h)+u(l)+uk]}{dk} = -\frac{1}{2}\frac{dlg\varphi_i(k)}{dk} + \frac{b_i}{4}.\frac{1}{\varphi_i(k)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_1-k} + \frac{1}{z-k}\right). \tag{18}$$

Setzt man hier $i=1$ und $=2$, so entsteht durch Subtraction:

$$19)\qquad \frac{\varphi_2(k)\,d\varphi_1(k)-\varphi_1(k)\,d\varphi_2(k)}{dk}=\tfrac{1}{2}(a_2 b_1-a_1 b_2).$$

Aus 18) kann man auch herleiten:

$$\frac{d\lg\vartheta[u(h)+u(l)+u(k)]}{dk}-\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{k-h}+\frac{1}{k-l}\right)=-\tfrac{1}{2}\frac{d\lg(b_2 a_1-b_1 a_2)}{dk}$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_1(k)\,db_2-\varphi_2(k)\,db_1}{(b_2 a_1-b_1 a_2)\,dk}=-\tfrac{1}{2}\frac{d\lg(a_2 b_1-a_1 b_2)}{dk}-\frac{1}{4k}$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_1(k)\,da_2-\varphi_2(k)\,da_1}{[a_2\varphi_1(k)-a_1\varphi_2(k)]\,dk};$$

um diese Gleichungen zu erhalten, braucht man nur die in 18) enthaltenen Gleichungen mit $a_i\varphi_i(k)$ resp. oder mit $\varphi_i(k)$ resp. zu multipliciren und zu subtrahiren. Die Vergleichung dieser Formen mit 15) liefert dann:

$$20)\quad \varphi_1(k)\frac{db_2}{dk}-\varphi_2(k)\frac{db_1}{dk}=0,\quad \varphi_1(k)\frac{da_2}{dk}-\varphi_2(k)\frac{da_1}{dk}=\tfrac{1}{2}(a_2 b_1-a_1 b_2).$$

Dieselben Rechnungen führen auch bei beliebigem p zur Bestimmung von ϑ. Es müssen jedoch einige Betrachtungen über den Bau der Abel'schen Functionen bei hyperelliptischen Integralen und über die Charakteristiken derselben vorhergehen. Diese Betrachtungen, sowie die Durchführung der Bestimmung von ϑ soll in einer baldigst zu liefernden Fortsetzung geschehen.

Kleinere Mittheilungen.

I. Note über zwei geometrische Probleme.

Bezeichnen wir die orthogonalen Coordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks ABC durch x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 und die eines ausserhalb des Dreiecks liegenden Punktes mit ξ, η, so erhalten wir für die Coordinaten der Fusspunkte der aus dem Punkt ξ, η auf die Seiten BC, CA, AB gefällten Perpendikel die folgenden Werthe:

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} x^{(i)} &= \frac{b_i^2 \xi - a_i b_i \eta - a_i c_i}{a_i^2 + b_i^2} \\ y^{(i)} &= \frac{-a_i b_i \xi + a_i^2 \eta - b_i c_i}{a_i^2 + b_i^2} \end{aligned} \right. \text{(für } i = 1,2,3),$$

wenn wir der Kürze halber:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} y_2 - y_3 = a_1, & -(x_2 - x_3) = b_1, & x_2 y_3 - x_3 y_2 = c_1 \\ y_3 - y_1 = a_2, & -(x_3 - x_1) = b_2, & x_3 y_1 - x_1 y_3 = c_2 \\ y_1 - y_2 = a_3, & -(x_1 - x_2) = b_3, & x_1 y_2 - x_2 y_1 = c_3 \end{array} \right.$$

setzen.

Wir suchen nun den Flächeninhalt F des durch die drei Fusspunkte bestimmten Dreiecks. Bekanntlich ist dann.

$$\pm 2F = \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} & y^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} & y^{(2)} \\ 1 & x^{(3)} & y^{(3)} \end{vmatrix}$$

und wenn wir hierin die Werthe aus 1) für $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ etc. setzen, erhalten wir:

$$\pm 2F = \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2).(a_2^2 + b_2^2).(a_3^2 + b_3^2)} \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2, & b_1^2 \xi - a_1 b_1 \eta - a_1 c_1, & -a_1 b_1 \xi + a_1^2 \eta - b_1 c_1 \\ a_2^2 + b_2^2, & b_2^2 \xi - a_2 b_2 \eta - a_2 c_2, & -a_2 b_2 \xi + a_2^2 \eta - b_2 c_2 \\ a_3^2 + b_3^2, & b_3^2 \xi - a_3 b_3 \eta - a_3 c_3, & -a_3 b_3 \xi + a_3^2 \eta - b_3 c_3 \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir nun in der rechts stehenden Determinante die erste Verticalreihe nach und nach mit ξ und η und ziehen sie dann von der zweiten respective dritten Verticalreihe ab, so haben wir noch, indem wir die folgenden Abkürzungen einführen:

$$3)\quad a_1^2+b_1^2=s_1^2,\quad a_2^2+b_2^2=s_2^2,\quad a_3^2+b_3^2=s_3^2,$$

$$4)\quad \begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\Delta,\quad \begin{vmatrix}1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\\ 1 & \xi & \eta\end{vmatrix}=\Delta_1,\quad \begin{vmatrix}1 & x_3 & y_3\\ 1 & \xi & \eta\\ 1 & x_1 & y_1\end{vmatrix}=\Delta_2,$$

$$\begin{vmatrix}1 & \xi & \eta\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}=\Delta_3,$$

$$\pm 2F=\frac{1}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}\begin{vmatrix}s_1^2 & a_1\Delta_1 & b_1\Delta_1\\ s_2^2 & -a_2\Delta_2 & -b_2\Delta_2\\ s_3^2 & a_3\Delta_3 & b_3\Delta_3\end{vmatrix},$$

oder

$$5)\quad \pm 2F=\frac{1}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}\{-s_1^2\Delta_2\Delta_3(a_2b_3-a_3b_2)+s_2^2\Delta_3\Delta_1(a_3b_1-a_1b_3)$$
$$-s_3^2\Delta_1\Delta_2(a_2b_1-a_1b_2)\}.$$

Durch Anwendung eines bekannten Satzes über minore Determinanten aus der reciprokal Determinante, oder auch durch Einsetzung der Werthe von a_1, a_2 etc. finden wir:

$$a_2b_3-a_3b_2=a_3b_1-a_1b_3=a_1b_2-a_2b_1=\Delta,$$

weshalb die Gleichung 5) in die folgende übergeht:

$$8)\quad \pm 2F=\frac{\Delta}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}\{-s_1^2\Delta_2\Delta_3+s_2^2\Delta_3\Delta_1-s_3^2\Delta_1\Delta_2\}.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck lässt sich noch ferner reduciren, wenn wir s_1, s_2, s_3 mittelst 3) und 2) durch x_1, y_1 etc. ausdrücken und beachten, dass:

$$\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3=\Delta$$

ist, wir erhalten dann:

$$6)\quad \pm 2F=\frac{\Delta}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}\{\Delta[(x_1^2+y_1^2)\Delta_1-(x_2^2+y_2^2)\Delta_2+(x_3^2+y_3^2)\Delta_3]$$
$$-[x_1\Delta_1-x_2\Delta_2+x_3\Delta_3]^2-[y_1\Delta_1-y_2\Delta_2+y_3\Delta_3]^2\}.$$

Wir können uns ferner leicht überzeugen, dass

$$x_1\Delta_1-x_2\Delta_2+x_3\Delta_3=\xi\Delta,$$
$$y_1\Delta_1-y_2\Delta_2+y_3\Delta_3=\eta\Delta$$

ist, weshalb die Gleichung 6) in folgende übergeht:

$$7)\quad \pm 2F=\frac{\Delta^2}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}\{(x_1^2+y_1^2)\Delta_1-(x_2^2+y_2^2)\Delta_2+(x_3^2+y_3^2)\Delta_3$$
$$-(\xi^2+\eta^2)\Delta\}.$$

Setzen wir endlich für Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 ihre Werthe aus 4), so erhalten wir den Flächeninhalt des durch die drei Fusspunkte gebildeten Dreiecks unter der folgenden bemerkenswerthen Form:

$$8)\qquad \pm 2F = \frac{1}{s_1^2 s_2^2 s_3^2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \\ 1 & \xi^2+\eta^2 & \xi & \eta \end{vmatrix},$$

wobei s_1, s_2, s_3 die drei Seiten des durch die Punkte $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ bestimmten Dreiecks bedeuten.

Die geometrische Interpretation des erhaltenen Ausdruckes ergibt sich unmittelbar aus 7).

Sollen nun die drei Fusspunkte in gerader Linie liegen, so muss $F=0$ werden, da aber der Natur der Aufgabe gemäss die erste Determinante der rechten Seite der Gleichung 8) nicht verschwinden kann, so ist die einzige Bedingung dafür:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 \\ 1 & \xi^2+\eta^2 & \xi & \eta \end{vmatrix} = 0,$$

welche Gleichung bekanntlich den durch die Punkte A, B, C gehenden Kreis repräsentirt. Es folgt daher der bekannte Satz:

„Wenn aus einem Punkt des einem gegebenen Dreieck umschriebenen Kreises auf die drei Seiten desselben Senkrechte errichtet werden, so liegen die drei Fusspunkte in einer Geraden."

2. Die Uebertragung des vorher betrachteten Problemes auf den Raum besteht in Folgendem:

Wenn die orthogonalen Coordinaten der Eckpunkte eines Tetraeders $ABCD$ $(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ x_3, y_3, z_3;\ x_4, y_4, z_4)$ und die eines Punktes (ξ, η, ζ) gegeben sind, so wollen wir das Volumen desjenigen Tetraeders bestimmen, dessen Ecken die Fusspunkte der aus dem Punkt ξ, η, ζ auf die Tetraederebenen gefällten Perpendikel sind.

Bezeichnen wir das fragliche Volumen mit V und die Coordinaten des der Tetraederecke (x_i, y_i, z_i) gegenüberliegenden Fusspunktes mit $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}$ und setzen noch:

$$9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \Delta,\quad \begin{matrix} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_i} = a_i, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial y_i} = b_i, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial z_i} = c_i, \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = d_1,$$

$$-\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = d_2 \text{ etc. etc.},$$

so erhalten wir bekanntlich für das Volumen des Fusspunktentetraeders:

$$\pm 6V = \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ 1 & x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \\ 1 & x^{(4)} & y^{(4)} & z^{(4)} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

und für die Coordinaten der Fusspunkte die folgenden Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} x^{(i)} &= \frac{(b_i^2+c_i^2)\xi - a_i b_i \eta - a_i c_i \zeta - a_i d_i}{a_i^2+b_i^2+c_i^2} \\ y^{(i)} &= \frac{-a_i b_i \xi + (a_i^2+c_i^2)\eta - b_i c_i \zeta - b_i d_i}{a_i^2+b_i^2+c_i^2}. \\ z^{(i)} &= \frac{-a_i c_i \xi - b_i c_i \eta + (a_i^2+b_i^2)\zeta - c_i d_i}{a_i^2+b_i^2+c_i^2} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Wenn wir ferner in 10) für $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}$ etc. etc. die Werthe aus 11) einsetzen und die Determinante auf ähnliche Weise, wie vorher, behandeln, so ist:

$$\pm 6V = \frac{1}{F_1^2 F_2^2 F_3^2 F_4^2} \begin{vmatrix} F_1^2 & a_1 \Delta_1 & b_1 \Delta_1 & c_1 \Delta_1 \\ F_2^2 & a_2 \Delta_2 & b_2 \Delta_2 & c_2 \Delta_2 \\ F_3^2 & a_3 \Delta_3 & b_3 \Delta_3 & c_3 \Delta_3 \\ F_4^2 & a_4 \Delta_4 & b_4 \Delta_4 & c_4 \Delta_4 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

indem wir:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i = F_i^2, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \Delta_3, \tag{14}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta_4$$

setzen. Aus 12) folgt noch ferner:

$$\pm 6V = \frac{1}{F_1^2 F_2^2 F_3^2 F_4^2} \left\{ F_1^2 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - F_2^2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + F_3^2 \Delta_4 \Delta_1 \Delta_2 \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - F_4^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\},$$

da aber nach dem schon vorher erwähnten Satze über die minoren Determinanten aus der reciprokal Determinante, die im vorstehenden Ausdruck vorkommenden vier Determinanten, mit abwechselnden Vorzeichen genommen, unter sich gleich nämlich $= \Delta^2$ sind, so erhalten wir endlich:

$$\pm 6V = \frac{\Delta^2}{F_1^2 F_2^2 F_3^2 F_4^2} \{ F_1^2 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + F_2^2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_1 + F_3^2 \Delta_4 \Delta_1 \Delta_2 + F_4^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \}. \tag{15}$$

F_i bedeutet den doppelten Flächeninhalt der der Ecke (x_i, y_i, z_i) gegenüberliegenden Tetraederfläche.

3. Die Bedingung, dass die vier Fusspunkte in einer Ebene liegen, ist bekanntlich $V=0$; dieselbe geht wegen 15) über in:

$$16) \quad F_1^2 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 + F_2^2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_1 + F_3^2 \Delta_4 \Delta_1 \Delta_2 + F_4^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf ξ, η, ζ vom dritten Grad, weshalb die Gleichung 16) eine Fläche dritter Ordnung darstellt, wenn ξ, η, ζ als laufende Coordinaten betrachtet werden. — Diese Fläche wurde von den Herren Cayley (Liouville Journal 1ier *série* T. IX, p. 285), Painvin (Crelle Journal Bd. 63, p. 88, Theoréme XVII), Schläffli (Philos. Trans. Vol. 153 [1863], p. 235) und Fiedler (Salmon-Fiedler Anal. Geom. d. Raumes, II. Theil, p. 421, Beispiel) betrachtet, nach Schläffli, der in seiner Abhandlung a. a. O. eine Eintheilung der Flächen dritter Ordnung in Species gibt, gehört sie zu XVI, 1 (a. a. O. p. 236).

Die Fläche 16) enthält die sechs Kanten des Tetraeders; die Eckpunkte desselben sind ihre Doppelpunkte. Legen wir durch die sechs Kanten des Tetraeders Tangentialebenen an die Fläche, so schneiden sich je zwei derselben, die den gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders entsprechen, in einer Geraden, die auf der Fläche dritter Ordnung liegt, und die drei Geraden, die wir auf diese Weise erhalten, liegen in einer Ebene, deren Gleichung

$$17) \quad \frac{\Delta_1}{F_1^2} + \frac{\Delta_2}{F_2^2} + \frac{\Delta_3}{F_3^2} + \frac{\Delta_4}{F_4^2} = 0$$

ist (Cayley).

Die vier aus den Eckpunkten des Tetraeders an die Fläche gelegten Berührungskegel schneiden die respectiven Gegenflächen des Tetraeders in solchen vier Kegelschnitten, die ein und derselben Fläche zweiter Ordnung angehören, die dem Tetraeder umschrieben ist. Die Tangentenebenen dieser letztern in den Eckpunkten des Tetraeders schneiden die Gegenflächen in vier Geraden, welche in einer Ebene liegen (Fiedler). Diese Ebene ist genau die Ebene 17).

Durch jede Kante des Tetraeders geht ausser den zwei Seitenflächen, die eben diese Kante bilden, auch noch die Tangentialebene, die die Fläche längs dieser Kante berührt, es gehen somit durch jede Kante des Tetraeders drei Ebenen. Construiren wir nun zu je drei solchen Ebenen die vierte harmonische, so erhalten wir sechs neue Ebenen, die mit den sechs Tangentialebenen zwölf ausmachen. Von diesen zwölf Ebenen schneiden sich viermal sechs je in einem Punkt; wir stellen ihre Gleichungen in Folgendem zusammen:



$$18)\quad \begin{cases} F_1^2\Delta_1 - F_2^2\Delta_2 = 0 \\ F_3^2\Delta_4 - F_4^2\Delta_3 = 0 \\ F_3^2\Delta_1 + F_1^2\Delta_3 = 0 \\ F_4^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_4 = 0 \\ F_3^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_3 = 0 \\ F_1^2\Delta_4 + F_4^2\Delta_1 = 0 \end{cases} \qquad 19)\quad \begin{cases} F_1^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_1 = 0 \\ F_3^2\Delta_4 + F_4^2\Delta_3 = 0 \\ F_3^2\Delta_1 - F_1^2\Delta_3 = 0 \\ F_4^2\Delta_2 - F_2^2\Delta_4 = 0 \\ F_3^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_3 = 0 \\ F_1^2\Delta_4 + F_4^2\Delta_1 = 0 \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} F_1^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_1 = 0 \\ F_3^2\Delta_4 + F_4^2\Delta_3 = 0 \\ F_3^2\Delta_1 + F_1^2\Delta_3 = 0 \\ F_4^2\Delta_2 + F_2^2\Delta_4 = 0 \\ F_3^2\Delta_2 - F_2^2\Delta_3 = 0 \\ F_1^2\Delta_4 - F_4^2\Delta_1 = 0 \end{cases} \qquad 21)\quad \begin{cases} F_1^2\Delta_2 - F_2^2\Delta_1 = 0 \\ F_3^2\Delta_4 - F_4^2\Delta_3 = 0 \\ F_3^2\Delta_1 - F_1^2\Delta_3 = 0 \\ F_4^2\Delta_2 - F_2^2\Delta_4 = 0 \\ F_3^2\Delta_2 - F_2^2\Delta_3 = 0 \\ F_1^2\Delta_4 - F_4^2\Delta_1 = 0 \end{cases}$$

Diese vier Punkte bestimmen ein Tetraeder; den ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen entsprechen die folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \begin{cases} \frac{\Delta_1}{F_1^2} + \frac{\Delta_2}{F_2^2} - \frac{\Delta_3}{F_3^2} - \frac{\Delta_4}{F_4^2} = 0 \\ \frac{\Delta_1}{F_1^2} - \frac{\Delta_2}{F_2^2} + \frac{\Delta_3}{F_3^2} - \frac{\Delta_4}{F_4^2} = 0 \\ \frac{\Delta_1}{F_1^2} - \frac{\Delta_2}{F_2^2} - \frac{\Delta_3}{F_3^2} + \frac{\Delta_4}{F_4^2} = 0 \\ \frac{\Delta_1}{F_1^2} + \frac{\Delta_2}{F_2^2} + \frac{\Delta_3}{F_3^2} + \frac{\Delta_4}{F_4^2} = 0 \end{cases}$$

Pesth, den 30. November 1865. Dr. E. v. HUNYADY.

II. Ueber eine Determinante bestimmter Integrale.

Im VI. Bande dieser Zeitschrift ist S. 300 eine Determinante bestimmter Integrale aufgestellt, welche eine Erweiterung des bekannten Theorems von Legendre über die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung enthält. Die betreffende Determinante ergab sich einfach durch Ausdehnung der Gleichung für den Inhalt eines Ellipsoids von 3 auf n Variabele. Die „*Mém. couronnées p. l'ac. de Bruxelles*" enthalten in t. XIV eine analoge Ausdehnung für den Flächeninhalt eines Ellipsoids, wodurch sich eine Determinante von Integralen ergiebt, welche Catalan für wesentlich veschieden von derjenigen hält, die dem verallgemeinerten Ausdruck für das Volumen eines Ellipsoides entspricht. Es lässt sich indessen leicht nachweisen, dass die erste Determinante, und zwar in ihrer einfachsten Form, sich aus der zweiten herleiten lässt, was den Gegenstand der folgenden Zeilen bildet.

Setzt man zur Abkürzung:

$$1)\quad \begin{cases} \psi(z) = (z-u^2)(z-u_1^2)\;\ldots\;(z-u_n^2), \\ \varphi(z) = (z-a^2)(z-a_1^2)\;\ldots\;(z-a_n^2), \end{cases}$$

so folgt durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$2)\qquad \frac{(z-u^2)(z-u_1^2)\ldots\ldots(z-u_n^2)}{(z-a^2)(z-a_1^2)\ldots\ldots(z-a_n^2)}=1+\sum_{r=0}^{r=n}\frac{1}{z-a_r^2}\frac{\psi(a_r^2)}{\varphi'(a_r^2)},$$

wo rechts einfach a und u statt a_0 und u_0 zu setzen ist. Die Quantitäten $a, a_1, \ldots\ldots a_n$ seien wesentlich positiv und allgemein $a_m > a_{m+1}$; also:

$$3)\qquad a > a_1 > a_2 \ldots\ldots > a_{n-1} > a_n.$$

Setzt man in 2) $z = u_p^2$, so folgt:

$$4)\qquad -1=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{1}{u_p^2-a_r^2}\frac{\psi(a_r^2)}{\varphi'(a_r^2)},$$

für $p=0, 1, \ldots\ldots n$. Sind die $n+1$ Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{u^2-a^2}+\dfrac{x_1^2}{u^2-a_1^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u^2-a_n^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{u_1^2-a^2}+\dfrac{x_1^2}{u_1^2-a_1^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_1^2-a_n^2}=1, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{x^2}{u_n^2-a^2}+\dfrac{x_1^2}{u_n^2-a_1^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_n^2-a_n^2}=1, \end{cases}$$

gegeben, so folgt mittelst der Gleichung 4):

$$6)\quad x_r^2=-\frac{\psi(a_r^2)}{\varphi'(a_r^2)}=-\frac{(a_r^2-u^2)(a_r^2-u_1^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_r^2-u_n^2)}{(a_r^2-a_1^2)\ldots(a_r^2-a_{r-1}^2)(a_r^2-a_{r+1}^2)\ldots(a_r^2-u_n^2)}.$$

Wegen der Annahme über die Werthe von $a, a_1, \ldots a_n$ geben die Gleichungen 5) nur dann für $x, x_1, \ldots x_n$ reelle Werthe, wenn die Bedingungen stattfinden:

$$7)\qquad u > a > u_1 > a_1 > u_2 > a_2 > \ldots a_{n-1} > u_n > a_n.$$

Aus 6) findet man leicht:

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_p}=-u_p\frac{x_r}{a_r^2-u_p^2},$$

$$\sum_{r=0}^{r=n}\frac{\partial x_r}{\partial u_p}\frac{\partial x_r}{\partial u_q}=\frac{u_p u_q}{u_q^2-u_p^2}\sum_{r=0}^{r=n}\left\{\frac{x_r^2}{u_p^2-a_r^2}-\frac{x_r^2}{u_q^2-a_r^2}\right\},$$

d. i. nach 5):

$$8)\qquad \sum_{r=0}^{r=n}\frac{\partial x_r}{\partial u_p}\frac{\partial x_r}{\partial u_q}=0.$$

Differentiirt man die Gleichung 2) nach z, setzt darauf $z=u_p^2$, so folgt:

$$9)\qquad \frac{\psi'(u_p^2)}{\varphi(u_p^2)}=-\sum_{r=0}^{r=n}\frac{1}{(u_p^2-a_r^2)^2}\frac{\psi(a_r^2)}{\varphi'(a_r^2)}.$$

Da nun nach 6):

$$\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_p}\right)^2=\frac{u_p^2 x_r^2}{(u_p^2-a_r^2)^2}=-u_p^2\frac{1}{(u_p^2-a_r^2)^2}\frac{\psi(a_r^2)}{\varphi'(a_r^2)},$$

so lässt sich die Gleichung 9) auch schreiben:

$$9)\qquad \sum_{r=0}^{r=n}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_p}\right)^2=u_p^2\frac{\psi'(u_p^2)}{\varphi(u_p^2)}.$$

Sei:

$$\text{10)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \\ & & \cdot\ \cdot & \\ \frac{\partial x}{\partial u_n} & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \Delta,$$

oder:

$$\text{11)}\qquad \Delta = U\frac{\partial x}{\partial u} + U_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + U_n\frac{\partial x_n}{\partial u}.$$

Für das Quadrat von Δ folgt:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & & b_{0,n} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & & b_{1,n} \\ & & \cdot\ \cdot & \\ b_{n,0} & b_{n,1} & & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

wo: $b_{p,q} = \Sigma \frac{\partial x_r}{\partial x_p}\frac{\partial x_r}{\partial q}$. Nach 8) folgt $b_{p,q} = 0,\ p \gtrless q$. Hieraus folgt: $\Delta^2 = b_{0,0}\,.\,b_{1,0}\ldots.\,b_{n,n}$. In Δ^2 ist also $b_{1,1}\,.\,b_{2,2}\ldots b_{n,n}$ der Factor von $b_{0,0}$. Wegen der Gleichung 11) ist aber der Factor von $b_{0,0}$ in Δ^2 auch gleich $U^2 + U_1^2 + \ldots + U_n^2$. Setzt man diese Factoren einander gleich, so ergiebt sich die Relation:

$$U^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2 = b_{1,1}\,.\,b_{2,2}\,.\,b_{n,n},$$

oder, da nach 9) und 10):

$$b_{p,p} = \sum_{r=0}^{r=n}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_p}\right)^2 = u_p^2\,\frac{\psi'(u_p^2)}{\varphi(u_p^2)},$$

so folgt:

$$\text{12)}\qquad U^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2 = (u_1 u_2 \ldots u_n)^2\,\frac{\psi'(u_1^2)\,\psi'(u_2^2)\ldots\psi'(u_n^2)}{\varphi(u_1^2)\,\varphi(u_2^2)\ldots\varphi(u_n^2)}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$\text{13)}\qquad \begin{cases} \Delta_1 = \sqrt{(a^2-u_1^2)(u_1^2-a_1^2)\ldots(u_1^2-a_n^2)}, \\ \Delta_2 = \sqrt{(a^2-u_2^2)(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2)\ldots(u_2^2-a_n^2)}, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Delta_p = \sqrt{(a^2-u_p^2)\ldots(a_{p-1}^2-u_p^2)(u_p^2-a_p^2)\ldots(u_p^2-a_n^2)}, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Delta_n = \sqrt{(a^2-u_n^2)\ldots.(a_{n-1}^2-u_n^2)(u_n^2-a_n^2)}, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen 1):

$$\text{14)}\qquad \varphi(u_1^2)\,\varphi(u_2^2)\ldots\varphi(u_n^2) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_n)^2.$$

Es ist ferner: $\varphi'(u_1^2)\,\varphi'(u_2^2)\ldots.\varphi'(u_n^2) =$

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(u^2-u_1^2)\ldots(u^2-u_n^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_n^2 & u_{n-1}^2 & u_1^2 \\ u_n^{2n-2} & u_{n-1}^{2n-2} & u_1^{2n-2} \end{vmatrix}^2.$$

Mittelst dieser Gleichung und 14) folgt aus 12):

$$\sqrt{(U^2+U_1^2+\ldots+U_n^2)}=$$

$$15)\quad \frac{u_1u_2\ldots u_n\sqrt{(u^2-u_1^2)(u^2-u_2^2)\ldots(u^2-u_n^2)}}{\varDelta_1\varDelta_2\ldots\varDelta_n}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ u_n^2 & u_{n-1}^2 & u_1^2\\ u_n^{2n-1} & u_{n-1}^{2n-2} & u_1^{2n-2}\end{vmatrix}.$$

Sieht man in den Gleichungen 5) x als Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ an, so hat man folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}+\ldots+\frac{\partial x}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_n}=\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_n}+\ldots+\frac{\partial x}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_n}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 11) geben:

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}=-\frac{U_1}{U},\quad \frac{\partial x}{\partial x_2}=-\frac{U_2}{U},\ldots\ \frac{\partial x}{\partial x_n}=-\frac{U_n}{U}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, mit Rücksicht auf den Werth von U:

$$16)\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial x}{\partial x_n}\right)^2\right\}}=\sqrt{(U^2+U_1^2+\ldots+U_n^2)}.$$

In dem $n$fachen Integrale:

$$17)\quad V=\int\ldots\int\partial x_1\ldots\partial x_n\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial x}{\partial x_n}\right)^2\right\}}$$

sei die Integration über alle positiven Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ auszudehnen, welche der Bedingung genügen:

$$18)\quad \frac{x_1^2}{u^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{u^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u^2-a_n^2}\leqq 1,$$

x ist durch die Gleichung bestimmt:

$$19)\quad \frac{x^2}{u^2-a^2}+\frac{x_1^2}{u^2-a_1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u^2-a_n^2}=1.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial x_p}=-\frac{x_p}{x}\,\frac{u^2-a^2}{u^2-a_1^2}.$$

Die Gleichung 17) wird hierdurch:

$$V=\int\ldots\int\partial x_1\ldots\partial x_n\sqrt{\frac{\frac{x^2}{u^2-a^2}-x_1^2\frac{u^2-a^2}{(u^2-a_1^2)^2}-\ldots-x_n^2\frac{u^2-a^2}{(u^2-a_n^2)^2}}{\frac{x^2}{u^2-a^2}}}.$$

Setzt man hierin für $\frac{x^2}{u^2-a^2}$ seinen Werth aus 19), ferner:

$$\frac{x_1}{\sqrt{(u^2-a_1^2)}}=y_1,\ldots\ \frac{x_n}{\sqrt{(u^2-a_n^2)}}=y_n,$$

so folgt:

$$20)\quad \frac{V}{\sqrt{(u^2-a_1^2)\ldots(u^2-a_n^2)}}=\int\ldots\int\partial y_1\ldots\partial y_n\sqrt{\frac{1-z_1^2y_1^2-\ldots-z_n^2y_n^2}{1-y_1^2-\ldots-y_n^2}},$$

wo allgemein:

$$21)\quad z_r^2=\frac{a^2-a_r^2}{u^2-a_r^2}$$

und die Integration über alle positiven Werthe von $y_1, \ldots y_n$ auszudehnen ist, welche der Bedingung genügen:

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{n-1}^2\leqq 1.$$

Führt man in dem $n$fachen Integrale der Gleichung 17) mittelst der Gleichungen 5) $u_1, u_2, \ldots u_n$ als Integrationsvariabeln ein, so folgt mit Rücksicht auf 16):

$$V=\int\ldots\int\sqrt{(U^2+U_1^2+\ldots+U_n^2)}\,\partial u_1\ldots\partial u_n.$$

Die Grenzen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind respective $(a_1, a), (a_2, a_1)\ldots(a_{n-1}, a_n)$. Substituirt man für $\sqrt{(U^2+U_1^2+\ldots+U_n^2)}$ seinen Werth aus 15), so giebt der vorstehende Werth von V, in Verbindung mit der Gleichung 20):

$$22)\quad \begin{vmatrix} A_{n,0} & A_{n-1,0} & A_{1,0} \\ A_{n,1} & A_{n-1,1} & A_{1,1} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ A_{n,n-1} & A_{n-1,n-1} & A_{1,n-1}\end{vmatrix}=$$

$$\int\ldots\int\frac{\partial y_1\,\partial y_2\ldots\partial y_n}{y_{u+1}}\sqrt{(1-z_1^2y_1^2-z_2^2y_2^2-\ldots-z_n^2y_n^2)}.$$

In der Determinante links ist zur Abkürzung gesetzt:

$$23)\quad \begin{aligned}
&\int_{a_n}^{a_{n-1}}\sqrt{\frac{u^2-u_n^2}{u^2-a_n^2}}\cdot\frac{u_n^{2p+1}\,\partial u_n}{\Delta_n}=A_{n,p},\\
&\int_{a_{n+1}}^{a_{n-2}}\sqrt{\frac{u^2-u_{n-1}^2}{u^2-a_{n-1}^2}}\cdot\frac{u_{n-1}^{2p+1}\,\partial u_{n-1}}{\Delta_{n-1}}=A_{n-1,p},\\
&\qquad\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\int_{a_1}^{a_1}\sqrt{\frac{u^2-u_1^2}{u^2-a_1^2}}\cdot\frac{u_1^{2p+1}}{\Delta_1}\,\partial u_1=A_{1,p}.
\end{aligned}$$

$$\Delta_r=\sqrt{(a^2-u_r^2)\ldots(a_{r+1}^2-u_r^2)(u_r^2-a_r^2)\ldots(u_r^2-a_n^2)}.$$

Die Integration in dem $n$fachen Integrale auf der rechten Seite der Gleichung 22) bezieht sich auf alle positiven Werthe von $y_1\ldots y_n$, welche der Bedingung genügen:

$$24)\quad y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{n+1}^2=1.$$

Dieses $n$fache Integral ist schon mehrfach auf ein einfaches reducirt worden*), weshalb eine weitere Entwickelung desselben hier unterbleiben

*) Man vergleiche z. B. Schlömilch: Analytische Studien. Zweite Abtheilung, p. 192.

möge. In der Gleichung 22) ist nach 7) u der einzigen Bedingung $u > a$ unterworfen. Man kann also u unbegrenzt wachsen lassen, dann verschwindet allgemein nach 21):

$$z_r^2 = \frac{a^2 - a_r^2}{u^2 - a_n^2}.$$

Setzt man noch $a_n = 0$, so geht die Gleichung 22) über in:

$$25)\quad \begin{vmatrix} B_{n,0} & B_{n-1,0} & B_{1,0} \\ B_{n,1} & B_{n-1,1} & B_{1,1} \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ B_{n,n-1} & B_{n-1,n-1} & B_{1,n-1} \end{vmatrix} = \int \ldots \int \frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_n}{y_{n+1}},$$

wo:

$$\int_0^{a_{n-1}} \frac{u_n^{2p}}{\sqrt{R_n}} \partial u_n = B_{n,p}, \quad \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u_{n-1}^{2p}}{\sqrt{R_{n-1}}} \partial u_{n-1} = B_{n-1,p},$$

$$\int_{a_{n-2}}^{a_{n-3}} \frac{u_{n-2}^{2p}}{\sqrt{R_{n-1}}} \partial u_{n-2} = B_{n-2,p} \ldots \int_{a_1}^{a} \frac{u_1^{2p}}{\sqrt{R_1}} \partial u_1 = B_{1,p}.$$

$$R_p = (a^2 - u_p^2) \ldots (a_{p-1}^2 - u_p^2)(u_p^2 - a_p^2) \ldots (u_p^2 - a_{n-1}^2),$$
$$R_n = (a^2 - u_n^2) \ldots (a_{n-1}^2 - u_n^2).$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung 25) ist gleich:

$$\frac{(\sqrt{\pi})^{n+1}}{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \dfrac{1}{1.3.5\ldots(2m-1)} & n = 2m, \\ \dfrac{\pi^{m+1}}{2^{2m+1}.1.2.3\ldots m} & n = 2m+1. \end{cases}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in t. VI, p. 300 gegebenen überein, wenn dort $n-1$ statt n gesetzt wird.

Dr. A. Enneper.

III. Ueber einige elliptische Integrale.

Es seien k, k' positive, echte Brüche, so dass: $k^2 + k'^2 = 1$. Man setze mit Jacobi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 \varphi)}} = K', \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\vartheta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos 2nx, \quad \vartheta_3(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} \cos 2nx,$$

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1} q^{(n-\frac{1}{2})^2} \sin(2n-1)x, \quad \vartheta_2(x) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} \cos(2n-1)x.$$

Für das elliptische Integral dritter Gattung findet dann folgende Gleichung statt:

$$\frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{k^2 \sin am \frac{2Ka}{\pi} . \cos am \frac{2Ka}{\pi} \varDelta am \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 am \frac{2Kz}{\pi}}{1-k^2 \sin^2 am \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 am \frac{2Kz}{\pi}} \partial z =$$

$$x \frac{\partial}{\partial a} \log \vartheta(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}.$$

Setzt man hierin $x = \frac{\pi}{2}$, $am \frac{2Kz}{\pi} = \varphi$, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-k^2 \sin^2 am \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \partial \varphi = -2K \frac{\partial}{\partial a} \log \vartheta(a).$$

Integrirt man diese Gleichung nach a zwischen den Grenzen 0 und a, setzt:

$$\sqrt{k} \sin am \frac{2Ka}{\pi} = \frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}, \quad \frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)} = \frac{\vartheta(a)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\vartheta(a)}{\vartheta_3(0)},$$

so folgt:

$$1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left\{1-k . \left(\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\right)^2 . \sin^2\varphi\right\}}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \partial\varphi = -K \log\left\{\frac{1}{k'}\left(\frac{\vartheta(a)}{\vartheta_3(0)}\right)^2\right\}.$$

In dieser Gleichung lassen sich durch besondere Annahmen für a die Functionen $\vartheta(a)$, $\vartheta_3(a)$ in Functionen von k und k' darstellen, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Für $a = \frac{\pi}{2}$ ist: $\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_2(0) = \sqrt{k} . \vartheta_3(0)$, $\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3(0)$. Die Gleichung 1) giebt in diesem Falle:

$$2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \partial\varphi = K \log k'.$$

Für $a = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} i \log q$ ist:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} i \log q) = \vartheta_2(\tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_3(0),$$
$$\vartheta\ (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} i \log q) = \vartheta_3(\tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} \sqrt{k}\, \vartheta_3(0).$$

Mit Rücksicht auf den Werth von q folgt aus 1):

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \partial\varphi = -K \log \sqrt{\frac{k}{k'}} - \frac{\pi}{4} K'.$$

Für $a = \frac{1}{4}\pi$ hat man:

$$\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta_3(0)\, k'^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-k'}{2}},$$
$$\vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta_3(0)\, k'^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1+k'}{2}}.$$

Die Gleichung 1) giebt nach einfachen Reductionen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos^2\varphi + k' \sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2} K \log \frac{2k'^{\frac{3}{2}}}{1+k'}.$$

Nimmt man in 1) $a = \frac{1}{4} i \log q$, so folgt:

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{4} i \log q) = -i\, q^{-\frac{1}{16}} k^{\frac{1}{8}} \sqrt[4]{\frac{1-k}{2}} \,.\, \vartheta_3(0),$$

$$\vartheta(\tfrac{1}{4} i \log q) = \quad q^{-\frac{1}{16}} k^{\frac{1}{8}} \sqrt[4]{\frac{1-k}{2}}\, \vartheta_3(0),$$

also:

$$3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+k\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi = K \log\left(\frac{k'}{k^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{2}{1-k}}\,.\, q^{\frac{1}{8}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} K \,.\, \log 2 \frac{1+k}{\sqrt{k}} - \frac{\pi}{8} K'.$$

Die Annahme: $a = \frac{1}{4}(\pi + i \log q)$ giebt:

$$q^{\frac{1}{16}} e^{\frac{i\pi}{8}} \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{4} i \log q\right) = \vartheta_3(0)\,(kk')^{\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\sqrt{(1+k)} - i\sqrt{(1-k)}}{2}},$$

$$q^{\frac{1}{16}} e^{\frac{i\pi}{8}} \vartheta\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{4} i \log q\right) = \vartheta_3(0)\,.\,(kk')^{\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\sqrt{(1+k)} + i\sqrt{(1-k)}}{2}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left\{1 + k\frac{\sqrt{(1+k)} - i\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)} + i\sqrt{(1-k)}}\sin^2\varphi\right\}}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi =$$

$$K \log \frac{k'}{(kk')^{\frac{1}{4}}} q^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{(1+k)} + i\sqrt{(1-k)}}.$$

Trennt man in dieser Gleichung die reellen und imaginären Theile, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(k'^2 + k^2\cos^4\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi = K \log \frac{2k'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}} - \tfrac{1}{4}\pi K',$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctang}\left(\frac{1+k\sin^2\varphi}{1-k\sin^2\varphi}\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\right)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{4} K.$$

Die letzte Gleichung ergiebt sich auch unmittelbar mittelst der Substitution:

$$4)\qquad \sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Für $a = \frac{\pi}{8}$ findet man:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)} = \left\{\frac{1+\sqrt{k'}}{2}\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{16}} . \left\{1+\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{4}} . \left\{\frac{\sqrt{(1+k')}-(1-\sqrt{k'})}{2}\right\}^{\frac{1}{4}},$$

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)} = \left\{\frac{1+\sqrt{k'}}{2}.\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{16}} . \left\{1+\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{4}} . \left\{\frac{\sqrt{(1-k')}-(1-\sqrt{k'})}{2}\right\}^{\frac{1}{4}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log\left\{1-k\frac{\sqrt{(1-k')}-(1-\sqrt{k'})}{\sqrt{(1+k')}-(1-\sqrt{k'})}\sin^2\varphi\right\}}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi =$$

$$-K.\log\left\{\frac{1+\sqrt{k'}}{2}\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{8}} . \left\{1+\sqrt{k'}\right\}^{\frac{1}{4}} . \frac{\sqrt{(1+k')}-(1-\sqrt{k'})}{2k'}.$$

Wendet man auf die Gleichung 3) die Substitution 4) an, so folgt mittelst der Gleichung 2):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-k\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}K\log 2\frac{1-k}{\sqrt{k}} - \frac{\pi}{8}K'.$$

Dr. A. Enneper.

IV. Note über einen Satz der algebraischen Curven.

Im letzten Hefte des X. Bandes dieser Zeitschrift (p. 503) kommt Herr Eckardt auf einen von ihm schon im IX. Bande (p. 34) bewiesenen Satz zurück. — Der in Rede stehende Satz wurde meines Wissens zuerst von A. Müller (Grundgesetze der Configuration der algebr. Curv. Denkschr. d. k. k. A. d. W. zu Wien, Bd. XIX, p. 377) aufgestellt und zunächst nur für Linien dritter Ordnung bewiesen, für welch speciellen Fall auch ich einen kurzen Beweis gab (1862), der in einer Abhandlung über Curven dritter Ordnung in den Schriften der ungarischen Akademie der Wissenschaften erschien. — Schliesslich habe ich diesen Satz in seiner Allgemeinheit in meiner Inaugural-Dissertation (1864, Ueber die fundamentalen Eigenschaften der algebr. Curv. etc., Art. 24, 25. Göttingen, Vandenhoeck & Rupprecht) wieder aufgenommen und davon nachstehenden Beweis gegeben, der seiner Kürze wegen hier Raum finden möge.

Ist:

$$1)\qquad A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\ldots+a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots + a_ny^n = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve von der Ordnung n, bezogen auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y, so geht selbe durch die Substitution

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega$$

in eine Gleichung von folgender Form über:

$$2)\qquad A + A_1 r + A_2 r^2 \ldots + A_n r^n = 0,$$

in welcher das Gesetz für die Bildung der Coefficienten $A_1, A_2 \ldots A_n$ sofort erhellt; insbesondere ist

$$A_n = a_0 \cos^n \omega + a_1 \cos^{n-1} \omega \sin \omega + \ldots + a_n \sin^n \omega.$$

Bezeichnen wir die n Wurzeln der Gleichung 2) mit $r_1, r_2 \ldots r_n$, so folgt aus derselben

$$3)\qquad r_1 r_2 \ldots r_n = (-1)^n \frac{A}{A_n}.$$

Nehmen wir ferner von beiden Seiten den natürlichen Logarithmus und differentiiren nach ω, so erhalten wir

$$4)\qquad \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\omega} + \frac{1}{r_2}\frac{dr_2}{d\omega} + \ldots + \frac{1}{r_n}\frac{dr_n}{d\omega} = -\frac{\frac{dA_n}{d\omega}}{A_n},$$

indem wir überlegen, dass sowohl $r_1, r_2 \ldots r_n$, als wie A_n Functionen von ω sind.

Bemerken wir, dass für jeden Punkt der Curve, dessen Polarcoordinaten r, ω sind, mit völliger Allgemeinheit folgende Relation besteht:

$$5)\qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega} = \operatorname{cotg}(\tau - \omega)$$

(vergl. Schlömilch Comp. d. höh. Anal., Bd. I, p. 102, 3), in welcher τ denjenigen Winkel bedeutet, den die im Punkte (r, ω) gezogene Tangente mit der positiven Richtung der Axe bildet, so geht, wenn wir die Winkel, welche die Tangenten in den Punkten $(r_1, \omega_1), (r_2, \omega_2) \ldots (r_n, \omega_n)$ der Curve mit der positiven Axe bilden der Reihe nach mit $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ bezeichnen, die Gleichung 4) in folgende über:

$$6)\qquad \operatorname{cotg}(\tau_1 - \omega) + \operatorname{cotg}(\tau_2 - \omega) + \ldots + \operatorname{cotg}(\tau_n - \omega) = -\frac{\frac{dA_n}{d\omega}}{A_n},$$

entwickeln wir endlich den rechten Theil dieser Gleichung und setzen dann $\omega = 0$, so haben wir

$$7)\qquad \operatorname{cotg} \tau_1 + \operatorname{cotg} \tau_2 + \ldots + \operatorname{cotg} \tau_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

d. i. der zu beweisende Satz in der von Müller ausgesprochenen Weise:

> „Die Summe der Cotangenten derjenigen n Winkel, die eine zu einer Curve n^{ter} Ordnung gezogene Transversale mit der Curve bildet, ist gleich der Summe der Cotangenten derjenigen n Winkel, welche die n Asymptoten der Curve mit derselben Transversale bilden."

Der rechte Theil der Gleichung 6) hat schon an und für sich eine geometrische Bedeutung. Es ist nämlich, wenn wir die Neigung des zur Transversalenrichtung ω gehörigen geradlinigen Durchmessers der Curve gegen die Transversale mit Θ bezeichnen

$$-\frac{\frac{dA_n}{d\omega}}{A_n} = n \, cotg \, \Theta$$ (vergl. Inaug.-Dissert., Art. 13),

weshalb die Gleichung 6) noch die folgende Form annimmt:

$$8) \qquad \frac{1}{n}\{cotg(\tau_1-\omega)+cotg(\tau_2-\omega)+\ldots+cotg(\tau_n-\omega)\}=cotg\,\Theta,$$

es lässt sich daher der vorige Satz auch noch so aussprechen:

„Ziehen wir in der Ebene einer Linie der Ordnung n eine Transversale, die die Curve in n Punkten schneidet und in den Durchschnittspunkten die Tangenten zur Curve hat, so ist das arithmetische Mittel der Cotangenten derjenigen Winkel, die die Tangenten mit der Transversale bilden, gleich der Cotangente desjenigen Winkels, den der zu dieser Transversale gehörige geradlinige Durchmesser mit derselben bildet."

Die Gleichung 6) gibt unmittelbar folgenden Satz:

„Es ist die Summe der Cotangenten der im vorhergehenden Satze erwähnten n Winkel constant, wie wir auch die Transversale parallel zu sich selbst verschieben."

Pesth, den 14. December 1865. Dr. E. v. Hunyady.

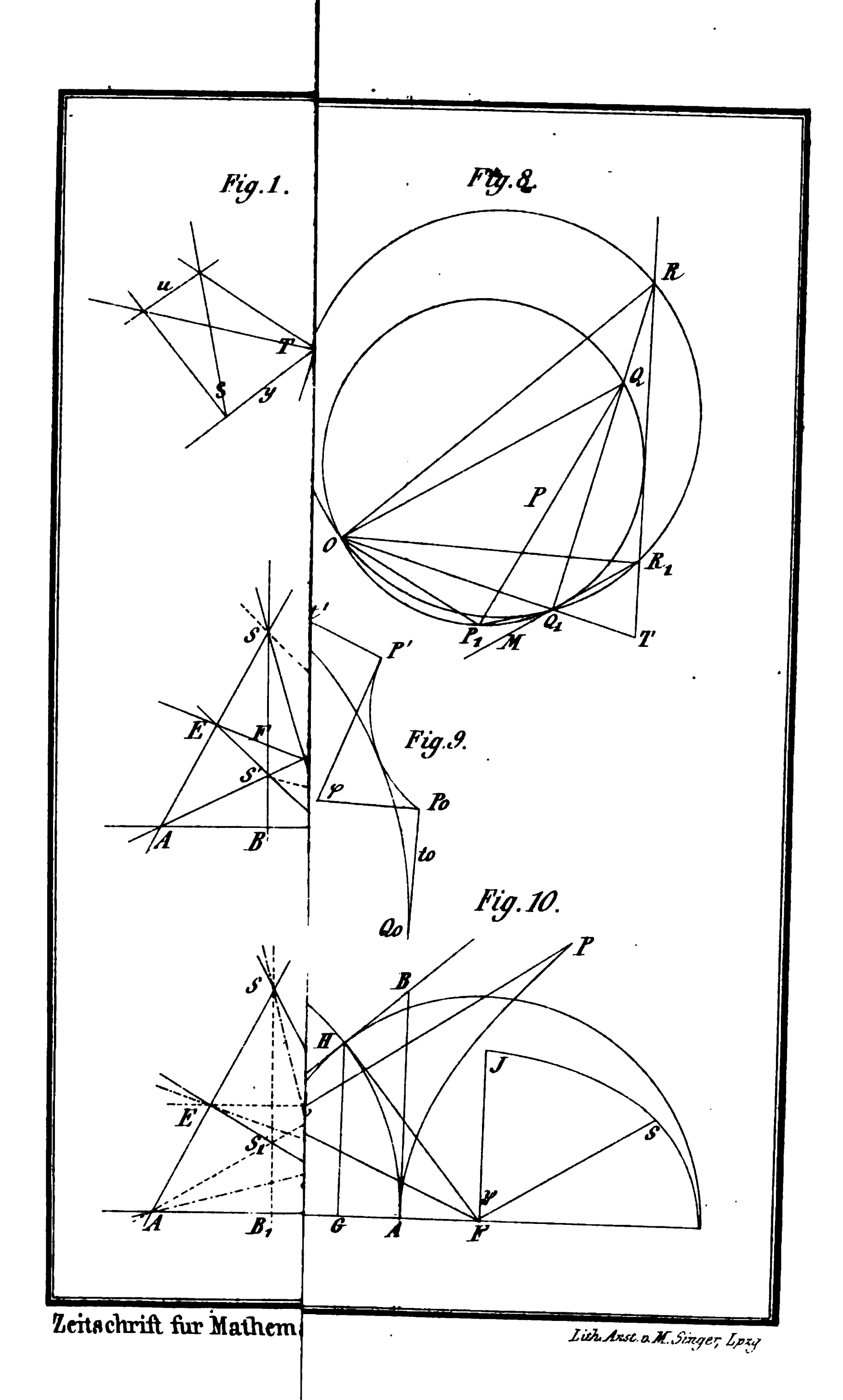
V. Ueber die Darstellung des Aluminiums.

Das Aluminium hat sehr schätzbare Eigenschaften, welche es für viele Verwendungen tauglich machen; es wird von Säuren, ausser von Chlorwasserstoffsäure, nur wenig angegriffen, hält sich sehr gut, selbst an feuchter Luft (ich habe ein Stück Aluminiumblech über ein Jahr in einem sehr feuchten Wandschranke aufbewahrt, ohne dass sich die Oberfläche des Bleches merklich oxydirt hätte), es lässt sich leicht zu Blech und Draht verarbeiten etc. Der hohe Preis, den dieses Metall jetzt noch besitzt, steht vielen für dasselbe vorgeschlagenen Anwendungen und der Auffindung neuer Verwendungen entgegen, zu deren Ausmittelung grössere Quantitäten des genannten Metalls erforderlich wären.

Der hohe Preis des bis jetzt im Handel vorgekommenen Aluminiums rührt von der nothgedrungenen Verwendung des Natriums bei der Reduction des Aluminiums her. Das Doppelsalz von Chloraluminium mit Chlornatrium oder der Kryolith (Fluoraluminiumnatrium) wurden durch Natrium reducirt, um das Aluminium zu gewinnen. Nun hat vor Kurzem Basset die wichtige Mittheilung gemacht (Dingler, polyt. Journ., Bd. 173, S. 359), dass Zink statt Natrium bei der Aluminiumerzeugung angewendet werden könne. Diese werthvolle Entdeckung ist von mehreren deutschen Chemikern bestätigt worden (deutsche Industr. Ztg. 1865, 358; Dingler, polyt. Journ., Bd. 177, S. 327), welche auf Grund ihrer Versuche in der Angabe

übereinstimmen, dass Chloraluminiumnatrium durch Zink reducirt werden könne, es sei aber zur Reduction eine höhere Temperatur, als bei Anwendung des Natriums, und daher viel Vorsicht nöthig.

Nach dem polyt. Centralbl. 1865, 1015 hat Dr. Dullo eine dort ausführlich beschriebene Methode angegeben, um das Chloraluminiumnatrium aus eisen- und sandfreiem Thon herzustellen, er hat das Doppelsalz hierauf mit Zink reducirt und eine angenäherte Berechnung über die Herstellungskosten ausgeführt, die den muthmasslichen zukünftigen Preis des durch Zink reducirten Aluminiums anzugeben gestattet. Genannter Chemiker spricht sich dahin aus, dass das so dargestellte Aluminium im Preise kaum höher zu stehen kommen würde, als das Kupfer. So ist denn nun gegründete Hoffnung vorhanden, dass der Thon wirklich in die Classe der Metallerze gerechnet werden darf, indem man aus ihm ein Metall herzustellen im Stande ist, dessen Eigenschaften und Preis sich in gleicher Weise zu technischen Anwendungen empfehlen. Dr. Kahl.


Fig. 1.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Zeitschrift für Mathem.
Lith. Anst. v. M. Singer, Lpzg.

VI.

Ueber Maxima und Minima geometrischer Figuren. Satz über die Linie des grössten Flächeninhaltes auf einer beliebigen Fläche. Satz über Polyeder-Maxima.

Von

Dr. THEODOR BERNER zu Berlin.

I.

Eine Curve C auf einer Fläche F soll eine Linie des grössten Flächeninhalts heissen, wenn sich von derselben allenthalben durch eine innerhalb gewisser Grenzen willkürliche zweite Curve C_1 ein Segment abschneiden lässt, welches, wenn man die Curve C_1, die Endpunkte des zu dem Segment gehörigen Bogens der Curve C, und die Länge des letzteren constant lässt, ein Maximum des Flächeninhalts hat.

Hat man auf einer gegebenen Fläche F eine solche Curve C, so kann man, um die Bedingungen aufzufinden, denen sie genügt, statt der Fläche F diejenige abwickelbare substituiren, welche entsteht als die Umhüllungsfläche sämmtlicher Ebenen, die die Fläche F in Punkten der Curve C berühren, oder kurz, man kann die Fläche F ersetzen durch die ihr längs der Curve C umschriebene abwickelbare Fläche. Denn schneidet man durch eine Curve C_1 ein Segment ab und lässt man den Bogen C dieses Segments variiren, indem man seine Endpunkte festhält und seine Länge constant setzt, so muss, da das Flächenstück ein Maximum ist, die Variation*) desselben Null sein. Nun fällt aber für unendlich kleine Entfernungen in der Nähe der Curve C die Fläche F mit der längs C berührenden abwickelbaren zusammen. Da sich nun die Variation nur auf un-

*) Ich gebrauche dieses Wort in rein geometrischem Sinne.



endlich kleine Entfernungen bezieht, so ist die Variation eines auf der abwickelbaren Fläche zwischen der Curve C und einer beliebigen, durch die Schnittpunkte von C und C_1 auf der Abwickelbaren gezogenen Curve C_2 enthaltenen Flächenstücks ebenfalls Null. Also ist für die Curve C auch auf der abwickelbaren Fläche die nothwendige Bedingung einer Linie des grössten Flächeninhalts erfüllt. Da man nun C_1 auf der Fläche F beliebig nahe an C annehmen kann, so sieht man ein, dass, wenn man die Curve C_2 auf der abwickelbaren Fläche auf derselben Seite von C annimmt, auf welcher C_1 liegt, durch hinreichende Annäherung von C_2 an C das auf der abwickelbaren Fläche liegende Segment wirklich zu einem Maximum in dem oben erklärten Sinne gemacht werden kann.

Also ist die Curve C auch auf der abwickelbaren Fläche Linie grössten Flächeninhalts. Man breite nun die abwickelbare Fläche auf eine Ebene aus, dann muss die erhaltene Curve jene Eigenschaft noch besitzen, dass, wenn man durch eine beliebige Curve ein Segment abschneidet, dasselbe ein Maximum des Inhalts hat bei constanter Bogenlänge, denn alle linearen und Flächengrössen bleiben beim Abwickeln unverändert. Nun giebt es aber in der Ebene nur Eine solche Curve, das ist der Kreis. Man erhält also den folgenden Satz:

1. Wenn man an eine Fläche längs einer auf ihr gezogenen Linie grössten Inhalts die einhüllende abwickelbare Fläche legt, und diese auf eine Ebene abwickelt, so verwandelt sich die Linie grössten Flächeninhalts in einen Kreis.

Da alle Radien eines Kreises gleich sind und senkrecht auf der Peripherie stehen, da ferner zwei unendlich nahe derselben, wenn man den Kreis wieder aufwickelt in eine Tangentialebene der abwickelbaren Fläche oder, was dasselbe ist, in eine Tangentialebene der Fläche F zu liegen kommen, und auch dann noch senkrecht auf der Curve C stehen, so kann man diesem Satze noch eine andere Form geben:

Durch einen Punkt der Raumcurve C geht nämlich eine unendliche Schaar von Normalen, deren Gesammtheit die Normalebene der Curve bildet. Wenn man aber überhaupt nur Curven betrachtet, welche in der Fläche F liegen, so kann man gewissermassen sagen, die Curve C habe in Bezug auf die Constructionsfläche F nur Eine Normalrichtung, nämlich diejenige, bei welcher, im ersten Moment wenigstens, die Fläche F nicht verlassen wird. D. h. von sämmtlichen Normalen kann man in Bezug auf die Fläche F nur diejenige beibehalten, welche die Fläche F tangirt. Man verfährt ja gerade so mit den ebenen Curven: Durch jeden Punkt eines als Raumcurve aufgefassten Kegelschnitts gehen unendlich viele Normalen, fasst man ihn dagegen als ebene Curve auf, so behält man von all den normalen Richtungen, welche von jenem Punkte ausgehen, nur diejenige, welche innerhalb des Constructionsfeldes, der Ebene, bleibt, ein Umstand, der nicht nur darin

seinen Grund hat, dass die Ebene zugleich Schmiegungsebene für alle Punkte des Kegelschnitts ist.

Fasst man daher nur diejenigen Normalen der Curve C ins Auge, welche zugleich Tangenten der Fläche F sind, so ist schon oben gezeigt, dass je 2 derselben, die, einander unendlich nah, in einer Tangentialebene der Fläche liegen, sich in einem Punkte schneiden,*) und dass die abgeschnittenen Stücke auf beiden Normalen constant sind für die ganze Curve C.

Nennt man den Schnittpunkt der beiden Normalen Krümmungsmittelpunkt der Curve C in Bezug auf die Fläche F, die Stücke der Normalen von diesem Punkte bis zur Curve: Krümmungsradius von C in Bezug auf F, oder auch: Tangentialen Krümmungsradius, so kann man den Satz 1) folgendermassen aussprechen:

2. Bei jeder Linie grössten Flächeninhalts C auf einer Fläche F ist der tangentiale Krümmungsradius, oder der Krümmungsradius von C in Bezug auf F constant.

Nennt man den Hauptkrümmungsradius der Curve r, so drückt sich der tangentiale Krümmungsradius aus durch $\frac{r}{\cos\varphi}$, wo $\cos\varphi$ der Neigungswinkel der Fläche F gegen die Schmiegungsebene der Curve im betrachteten Punkte ist. Mithin ist für jede Linie grössten Inhalts

$$\frac{r}{\cos\varphi} = Const.$$

Hieraus lassen sich mehrere Folgerungen ziehen. Setzt man nämlich r constant, so ist auch φ constant, und umgekehrt. r ist aber constant nur für den Kreis und die Schraubenlinie.

Man kann also Folgendes aussprechen:

Wenn die Schmiegungsebene einer Linie grössten Flächeninhalts von der Fläche, auf der sie liegt, unter constantem Winkel geschnitten wird, so ist die Linie ein Kreis oder eine Schraubenlinie.

Wenn ein Kreis oder eine Schraubenlinie Linie grössten Flächeninhalts für eine beliebige Fläche ist, so schneidet diese Fläche die Ebene des Kreises

*) Um Missverständnissen vorzubeugen, muss ich bemerken, dass 2 unendlich nahe tangentiale Normalen sich eigentlich nur schneiden würden, wenn die Curve C eine Krümmungslinie wäre. Will man ganz streng zu Werke gehen, so muss man nicht von ihrem Schnittpunkte, sondern von dem Punkte ihrer kürzesten Entfernung reden. Da aber diese kürzeste Entfernung eine unendlich kleine Grösse 2. Ordnung ist, wenn die Entfernung der Punkte von der 1. Ordnung ist, so entstehen im Texte keine Fehler. Ich wollte hier nur der falschen Vorstellung begegnen, als umhüllten etwa sämmtliche Tangentialnormalen eine Raumcurve. Der Punkt der kürzesten Entfernung ist derjenige, in welchem ein auf der Schmiegungsebene im Mittelpunkte der ersten Krümmung errichtetes Loth die Tangentialebene trifft.

resp. die Schmiegungsebene der Schraubenlinie unter constantem Winkel.

Wenn ein Kreis oder eine Schraubenlinie auf einer Fläche liegen, welche die Ebene des Kreises resp. die Schmiegungsebene der Schraubenlinie unter constantem Winkel schneidet, so ist der Kreis, resp. die Schraubenlinie, Linie grössten Flächeninhalts auf der Fläche.

Wenn aber die Ebene eines Kreises eine Fläche unter constantem Winkel schneidet, so ist der Kreis Krümmungslinie, und umgekehrt. Daraus folgt:

Wenn ein Kreis Krümmungslinie für eine Fläche ist, so ist er auch Linie des grössten Flächeninhalts für dieselbe, und umgekehrt.

Hiernach sind z. B. sämmtliche Kreise der auf einer Rotationsfläche liegenden Kreisschaar, ebenso sämmtliche Krümmungslinien der Dupinschen Cyclide Linien des grössten Flächeninhalts. Die Reihe der merkwürdigen Eigenschaften, welche der Transformation durch reciproke Radii Vectoren zukommen, vermehrt sich noch um den Satz, dass jeder Kreis, welcher eine Linie grössten Flächeninhalts ist, diese Eigenschaft durch die Transformation nicht verliert.

Die Linien grössten Flächeninhalts behalten ihren Charakter bei jeder Art von Verbiegung der Fläche, gerade so wie das Gaussische Krümmungsmaass. Denn alle linearen und Flächengrössen bleiben dabei ungeändert. Daher entsprechen z. B. bei den auf die Kugel abwickelbaren Flächen die Linien grössten Flächeninhalts den Kreisen auf der Kugel.

Ferner ist hierdurch bewiesen:

3. Der tangentiale Krümmungsradius bleibt bei einer Verbiegung der Fläche constant.

Aus dem Satze 1) folgt eine praktische Näherungsconstruction für die Linien grössten Flächeninhalts, welche im Stande ist, sowohl den Gang des dort gegebenen Beweises aufzuhellen, als auch den Verlauf dieser Linien anschaulich zu machen.

Man zeichne zwei concentrische Kreise, welche nur einen schmalen ringförmigen Streifen Papiers zwischen sich lassen, der indessen noch breit genug sein muss, um keine seitlichen Verbiegungen zu gestatten. Diesen Streifen schneide man aus, schneide ihn an einer Stelle in radialer Richtung auf und verbinde eine grössere Anzahl solcher Streifen in der Weise, dass sich der Kreis öfter wiederholt, ohne jemals zu schliessen. (D. h. so, dass, wenn man den Streifen frei hängen lässt, derselbe die Gestalt einer Schraubenlinie annimmt.) Einen solchen Streifen, den man nach beiden Seiten hin beliebig verlängern kann, klebe man, von sei-

ner Mitte anfangend, möglichst anschliessend auf das Modell der Fläche auf, so verzeichnet derselbe auf demselben eine Linie grössten Flächeninhalts.

Nimmt man einen geradlinigen Streifen, so ist der Radius des Kreises unendlich, und man erhält auf der Fläche eine kürzeste Linie,*) welche als einfacher Grenzfall der Linien grössten Flächeninhalts gelten muss. Jene enthält 2 Constanten, diese ausserdem noch den Radius, also im Ganzen 3 Constanten.

Handelt es sich darum, auf einer Fläche eine Figur zu finden, welche bei gegebenem Totalumfang ein Maximum des Flächeninhalts hat, so ist offenbar die nothwendige Bedingung, dass die begrenzende Linie eine Linie grössten Flächeninhalts sei. Dieselbe muss ferner nach einmaligem Umlaufe in sich zurückkehren, und zwar in denselben Punkt mit derselben Tangentialrichtung. Dies sind im Allgemeinen 2 Bedingungen. Wenn auch der Umfang gegeben ist, so hat man 3 Bedingungen zur Bestimmung der 3 Constanten. Oder: Es giebt auf einer gegebenen Fläche nur eine endliche Anzahl geschlossener Curven von gegebener Länge, die ein Maximum des Flächeninhalts einschliessen. Eine Ausnahme hiervon machen solche Fälle, bei denen eine jener 3 Bedingungen sich von selbst erfüllt durch die beiden anderen.

Hierher gehören z. B.: Die Ebene, die Kugel und sämmtliche Kegelflächen. Während im Allgemeinen die Linien grössten Flächeninhalts unendlich lang sind, giebt es auf diesen Flächen keine einzige unendlich lange Linie dieser Art. Auf der Ebene und der Kugel sind sämmtliche Linien grössten Flächeninhalts Kreise, während dieselben auch auf den Kegelflächen, durch einfaches Aufwickeln eines Kreises erhalten, stets schliessen, so lange der Radius dieses Kreises endlich bleibt. (Für den Fall, dass dieser unendlich wird, gehen die Linien in kürzeste Linien über und werden dann allerdings unendlich lang, sowohl auf den Kegelflächen, als auch schon in der Ebene.)

Zu bemerken ist noch, dass wir in der zu Anfang gegebenen Beweisführung keinerlei Voraussetzung über die Natur der Fläche F gemacht haben.**) F braucht daher durchaus nicht stetig gekrümmt zu sein.

*) Man hat nämlich dann $\frac{r}{\cos\varphi} = \infty$, also entweder $r = \infty$, das giebt eine gerade Linie, oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$, das giebt eine Linie, deren Schmiegungsebene senkrecht auf der Fläche steht. Das sind in der That die einzigen beiden Sorten von kürzesten Linien auf einer Fläche.

**) Wenigstens dehnt sich jener Beweis sofort auch auf den Fall von Discontinuitäten aus, wenn man von der umschriebenen abwickelbaren Fläche überhaupt nur eine schmale Zone in der Nähe der Curve C in Betracht zieht. Will man jeden Einwurf beseitigen, so setze man an Stelle des discontinuirlichen plötzlich erfolgenden Uebergangs der Fläche einen ähnlichen continuirlichen, aber sehr schnell erfolgenden Uebergang.

Man erhält z. B. für ein jedes Polyeder durch Aufwickelung des Streifens ebenfalls die Linie des grössten Flächeninhalts.

Durch eine einfache Betrachtung findet man noch folgenden Satz:

4. Auf jeder Rotationsfläche berühren die Linien grössten Flächeninhalts abwechselnd 2 Parallelkreise.

Die vorliegenden Sätze können als Basis dienen für die Untersuchung der isoperimetrischen Probleme auf beliebigen Flächen, wobei die kürzesten Linien die Rolle der in den entsprechenden Problemen für die Ebene vorkommenden Geraden, und die Linien grössten Flächeninhalts die Rolle der Kreise übernehmen würden. Um jedoch die Aufgaben dieser Art angreifen zu können, bedarf man noch einiger vorbereitender Sätze. Ich behalte die Entwickelung derselben einer späteren Arbeit vor, und gehe zu einem Problem verwandter Natur über.

II.

1. Wenn man die Schaar der Ebenen betrachtet, welche von einem beliebig begrenzten Körper ein Segment von constantem Volumen abschneiden, so werden dieselben von der von ihnen umhüllten krummen Fläche in den Schwerpunkten der aus ihnen durch die Begrenzung des Körpers ausgeschnittenen Figuren berührt.

Sind diese Figuren überschlagen, wie dies z. B. in der Regel eintreten wird, wenn man als Begrenzung des Körpers eine algebraische Fläche betrachtet, so hängt die Bestimmung des Schwerpunktes davon ab, wie man den Inhalt der gleichfalls überschlagenen abgeschnittenen Raumfigur definirt. Man kann sich dabei entweder auf ein bestimmtes Stück der ganzen Raumfigur beschränken und dies constant setzen, oder einzelne der Theile positiv, andere negativ zählen, der Satz bleibt stets richtig, vorausgesetzt dass man die Schwerpunktsbestimmung danach einrichtet.

Man beweist diesen Satz*) leicht in folgender Weise. Man lasse die Ebene, welche das constante Stück abschneidet, in eine unendlich nahe Lage übergehen, ohne dass sich der Inhalt des Segmentes ändert. Dies geschieht offenbar, wenn man die Ebene um eine in ihr selbst liegende und durch den Schwerpunkt der Schnittfigur gehende Gerade unendlich wenig dreht. Denn dann ist die Veränderung des Volumens des abgeschnittenen Stückes um eine unendlich kleine Grösse 2. Ordnung verschieden von dem Volumen des Stückes eines Rotationskörpers, welchen das als unverändert gedachte Polygon bei dieser Rotation erzeugen würde. Der Inhalt eines solchen Stückes Rotationskörpers ist aber, da die Rotationsaxe durch den Schwerpunkt geht, nach dem Guldin'schen Satze $= 0$. Also wird eine

*) Ich entdecke nachträglich, dass sich derselbe bereits in einer Steiner'schen Abhandlung findet. Ein Beweis ist dort nicht gegeben.

jede Ebene von einer ihr unendlich nahen, welche ein ebenso grosses Segment abschneidet, in einer durch den Schwerpunkt der Schnittfigur gehenden Geraden geschnitten. Nimmt man rings herum alle unendlich nahen Ebenen, welche ein constantes Segment abschneiden, so erhält man als Rotationsaxen sämmtliche durch den Schwerpunkt der Schnittfigur gehende Geraden. Nun ist aber der Berührungspunkt einer Ebene mit einer von ihr umhüllten Fläche derjenige Punkt, in welchem sie von sämmtlichen unendlich nahen Ebenen der Schaar geschnitten wird. Also ist hiermit jener Satz bewiesen.

Als Beispiele können dienen:

Wenn man von einer Fläche 2. Grades durch eine Ebene ein constantes Segment abschneidet, so umhüllt diese Ebene eine neue Fläche (2. Grades), welche die Ebenen der umhüllenden Schaar in den Mittelpunkten der entstehenden Kegelschnitte berührt.

Spricht man diesen Satz für die Ebene aus und lässt die Curve 2. Grades in 2 Gerade zerfallen, so kommt man auf einen bekannten Satz über die Asymptoten der Hyperbel.

2. Wenn man alle Ebenen aufsucht, welche von einer beliebigen (auch unstetig gekrümmten) Fläche A ein Flächenstück (Calotte) von constantem Flächeninhalt abschneiden, so umhüllen dieselben eine gewisse Fläche B. Jede Ebene der Schaar wird von der Fläche B berührt in dem Schwerpunkte der unendlich schmalen Zone, welche auf der Fläche A zwischen der betrachteten Ebene und einer ihr unendlich nahen parallelen Ebene liegt.

Statt den Schwerpunkt dieser Zone zu nehmen, kann man auch den Schwerpunkt des Umfanges der ausgeschnittenen Figur nehmen, indem man vorher an die einzelnen Punkte desselben Massen setzt, welche $\frac{1}{\sin\alpha}$ proportional sind, wo α der Neigungswinkel der Fläche gegen die Ebene in dem betreffenden Punkte ist.

3. Wenn man alle Ebenen aufsucht, welche aus einer beliebigen Fläche eine ebene Figur von constantem Flächeninhalt ausschneiden, so gilt der vorige Lehrsatz mit der Veränderung, dass man statt der auf der gegebenen Fläche liegenden unendlich schmalen Zone die Projection derselben auf die betrachtete Ebene nehmen muss.

Statt den Schwerpunkt dieser Projection zu nehmen, kann man auch den Schwerpunkt des Umfanges der ausgeschnittenen Figur nehmen, indem man an die einzelnen Punkte desselben Massen setzt, welche $\cot\alpha$ proportional sind.

Der Beweis für die Sätze 2) und 3) kann ähnlich geführt werden, wie der für 1). Es ist in beiden Fällen nicht schwer zu zeigen, dass bei einer unendlich kleinen Drehung um den Schwerpunkt das betreffende Stück constant bleibt. Durch Combination von 2) und 3) erhält man den für das Folgende wesentlichen Satz:

4. Wenn man alle Ebenen aufsucht, welche von einem durch eine beliebige Fläche A begrenzten Körper ein Stück so abschneiden, dass die Gesammtoberfläche des übrig bleibenden Körpers constant ist, so umhüllen dieselben eine gewisse Fläche B. Die Fläche B berührt eine Ebene der Schaar in dem Schwerpunkte eines Flächenringes, der sich zusammensetzt aus einer unendlich schmalen Zone, die auf der Fläche A zwischen der betrachteten Ebene und einer ihr unendlich nahen parallelen Ebene liegt, und der Projection dieser Zone auf die betrachtete Ebene. An Stelle dieses Schwerpunktes kann man auch setzen den Schwerpunkt des Umfanges der Schnittfigur, wenn man an die einzelnen Punkte desselben Massen setzt, die proportional sind $cot\frac{\alpha}{2}$, wo α der Neigungswinkel der Fläche gegen die Ebene in dem betreffenden Punkte ist, und zwar so gemessen, dass die Halbirungslinie desselben in das Innere des übrig bleibenden Körpers fällt.

Die 4 aufgestellten Sätze lassen sich gemeinschaftlich so aussprechen:

5. Man gehe von einer Ebene der Schaar zu einer ihr unendlich nahen parallelen Ebene über, suche den Schwerpunkt des Raum- oder Flächenstückes, um welches sich das constant gesetzte Raum- oder Flächenstück hierbei ändert, dann ist dieser Punkt derjenige, in welchem die Ebene der Schaar die umhüllte Fläche berührt.

Im Falle des Satzes 1) tritt hierbei die Vereinfachung ein, dass man für den Schwerpunkt der unendlich dünnen Scheibe, welche zwischen den beiden parallelen Ebenen liegt, unmittelbar den Schwerpunkt der Schnittfigur setzen kann. In dieser Form haben wir den Satz oben ausgesprochen.

Es sei hier noch bemerkt, dass die Gesammtmasse des unendlich schmalen Raum- oder Flächenstückes offenbar proportional ist der Entfernung der beiden parallelen Ebenen von einander, und dass daher die Verhältnisse der Massen, welche man in den 4 verschiedenen, in 1) bis 4) erwähnten Schwerpunkten vereinigt denken kann, unabhängig sind von der Entfernung der beiden parallelen

Ebenen. Wo es daher nur auf die Verhältnisse der in den verschiedenen Schwerpunkten vereinigt zu denkenden Massen ankommt, ist die Distanz der unendlich nahen parallelen Ebenen gleichgültig. Diese Bemerkung wird für das Folgende wichtig sein.

Ich habe die vorhergehenden Sätze nur so weit entwickelt, als nothwendig erschien zu der Anwendung, die ich davon machen will.

Man kann sich die Aufgabe stellen, einen Raum durch n Ebenen so zu begrenzen, dass die Oberfläche des entstehenden Polyeders eine gegebene Grösse habe und sein Inhalt ein Maximum werde.*) Hierbei können einzelne der Ebenen Bedingungen unterworfen sein; die folgenden Sätze beziehen sich nur auf solche unter den Ebenen, welche vollkommen frei sind.

Ich nehme an, man habe ein solches Polyeder. Man lasse eine seiner freien Ebenen so variiren, dass die Oberfläche constant bleibt, so kann dies nach dem 4. Satze dieses Abschnittes nur so geschehen, dass man die Ebene um den Schwerpunkt des Umfanges der in ihr liegenden, durch die Kanten des Polyeders gebildeten Figur dreht, wobei in jedem Punkte des Umfanges die Masse $cot\frac{\alpha}{2}$ liegt, wenn α den betreffenden Kantenwinkel bezeichnet.

Ist nun das Polyeder wirklich ein Maximum, so darf sich hierbei sein Inhalt nicht ändern. Der Inhalt des Polyeders ändert sich aber nach Satz 1) dann nicht, wenn die Ebene um den Schwerpunkt der Fläche der in ihr liegenden Figur gedreht wird. Daher erhält man als ersten Satz über die Polyeder-Maxima

> **6. Bei einem Polyeder-Maximum fällt der Schwerpunkt jeder freien Seitenfläche zusammen mit dem Schwerpunkte der dieselbe begrenzenden Kanten, wenn man an jeden Punkt einer Kante die Masse $cot\frac{\alpha}{2}$ setzt, wo α der entsprechende Kantenwinkel ist.**

---

*) Diese Aufgabe ist vollkommen bestimmt, denn nimmt man einen festen Punkt O im Raume an und bezeichnet als positiv diejenige Seite einer jeden Ebene, auf welcher der Punkt O liegt, so kann man den Inhalt eines Polyeders definiren als denjenigen Raum, welcher zugleich auf der positiven Seite sämmtlicher Ebenen liegt, und als seine Oberfläche alle diejenigen Theile von Ebenen, welche den so definirten Inhalt vom übrigen Raume trennen. Ist O fest, so ist hierbei jede Zweideutigkeit unmöglich. Nach dieser Definition ändert eine neu hinzukommende Ebene Nichts an dem Inhalte eines Polyeders, wenn derselbe schon ganz auf der positiven Seite der neuen Ebene liegt. Ebenso wenig ändert sie die Oberfläche, denn sie begegnet dann derselben gar nicht. Durch eine solche Beschränkung auf eine der Kernfiguren des Polyeders vermeidet man die überschlagenen Polyeder, welche sich für diese Art von Aufgaben nicht eignen.

Man betrachte nun 2 beliebige freie Seitenflächen des Polyeders und lasse beide so variiren, dass sie sich selbst parallel bleiben, und dass die Oberfläche des Polyeders constant bleibt. Bezeichnet man dann mit d_1 die Variation (in geometrischem Sinne) der Oberfläche, welche durch das Variiren der ersten Ebene entsteht, mit d_2 die entsprechende Grösse für die zweite Ebene, so muss die gesammte Veränderung der Oberfläche

$$d_1 + d_2 = 0$$

sein.

Da das Polyeder nun ein Maximum ist, so muss das hierbei entstehende Increment des Inhalts ebenfalls null sein. Auch dieses setzt sich aus 2 Theilen D_1 und D_2 zusammen. Man hat also:

$$D_1 + D_2 = 0.$$

Denkt man sich jetzt die beiden Ebenen von einander unabhängig variirend, so sind die dadurch entstehenden Incremente der Oberfläche d'_1 und d'_2 und des Inhalts D'_1 und D'_2 nach der bei dem Satze 5) gegebenen Anmerkung den vorigen proportional, so dass man hat:

$$\frac{d_1}{d'_1} = \frac{D_1}{D'_1} \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{d'_2} = \frac{D_2}{D'_2}$$

oder:

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d'_1}{D'_1} \quad \text{„} \quad \frac{d_2}{D_2} = \frac{d'_2}{D'_2}.$$

Da nun aus den obigen Relationen folgt:

$$d_2 = -d_1 \text{ und } D_2 = -D_1,$$

so erhält man:

$$\frac{d'_1}{D'_1} = \frac{d'_2}{D'_2}.$$

Nun muss man aber nach Satz 5) gerade von den in dieser Gleichung stehenden Incrementen die Schwerpunkte nehmen. Vereinigt man also in dem jedesmaligen Schwerpunkte eine dem Inhalte des Incrementes, zu dem er gehört, proportionale Masse, so sagt die letzte Gleichung Folgendes aus:

> Es fällt nicht nur für jede freie Ebene des Polyeder-Maximum der Schwerpunkt der Seitenfläche mit dem der Kanten (wo jede Kante mit $cot\frac{\alpha}{2}$ multiplicirt ist) zusammen, sondern es ist auch das Verhältniss der beiden in diesen Schwerpunkten vereinigt zu denkenden Massen ein constantes, für jede 2 freien Ebenen, das heisst für alle freien Ebenen des Polyeders.

Anstatt die Massen der Incremente zu nehmen, kann man, da es sich nur um das Verhältniss je zweier Massen handelt, für das Increment des Inhaltes die Seitenfläche des Polyeders und für das der Oberfläche den Umfang dieser Seitenfläche, versehen mit den Coefficienten $cot\frac{\alpha}{2}$ substituiren. Man zieht dann aus dem Vorhergehenden die Folgerung:

Wenn man von zweien jener Punkte, in denen je ein Flächen- und ein Kantenschwerpunkt zusammenfallen, wiederum den Schwerpunkt nimmt, indem man einmal die von den Flächen herrührenden Massen, ein zweites Mal die von den Kanten herrührenden annimmt, so fallen die beiden so erhaltenen Punkte wiederum zusammen. Da ferner auch das Verhältniss der beiden in diesem neuen Punkte vereinigt zu denkenden Massen wiederum denselben constanten Werth hat, so kann man in derselben Weise weiter gehen und erhält so folgenden Satz:

7. Nimmt man eine beliebige Anzahl freier Seitenflächen eines Maximumpolyeders, so fällt der Schwerpunkt derselben stets mit dem Schwerpunkte sämmtlicher jene Flächen begrenzender Kanten zusammen, wenn man jede Kante multiplicirt mit der Cotangente des halben Kantenwinkels. Bildet eine Kante die Grenzlinie zwischen zweien der Flächen, so ist sie doppelt zu zählen.

Dieser Satz entspricht dem über die Maximumflächen, dass $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ constant sein muss, wenn ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bezeichnen. In der That kann $\cot\frac{\alpha}{2}$ als eine Art von Krümmungsmaass des Polyeders in dem Punkte der Kante betrachtet werden,*) und indem diese Krümmung für alle Punkte der Oberfläche, welche nicht den Kanten angehören, null wird, ist der definirte Kantenschwerpunkt eine Art Krümmungsschwerpunkt der gesammten Oberfläche des Polyeders. Man muss indessen dabei nicht an das Gaussische Krümmungsmaass denken, sondern an das von Sophie Germain, dessen Ausdruck $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ ist.

Man kann eine beliebige Fläche auffassen als die Grenze eines Polyeders mit unendlich kleinen, nahezu rechteckigen und nahezu ebenen Seitenflächen, dessen Kanten aus den Krümmungslinien bestehen. Sei $ABCD$ ein kleines aus lauter Krümmungslinien gebildetes Rechteck. Man nehme innerhalb desselben und auf der Fläche einen Punkt O an, und fälle von

*) Treffen in einem Punkte O der Ebene zwei gerade Linien unter dem Winkel α zusammen, und man trägt von O aus auf denselben zwei gleiche Stücke OA und OB ab, und errichtet auf den Geraden die Normalen AM und BM, welche sich in M schneiden, so ist $AM = BM = OA\,tg\frac{\alpha}{2}$. Ist OA constant, so spielt AM die Rolle eines Krümmungsradius, welcher $tg\frac{\alpha}{2}$ proportional ist. Die Krümmung ist der reciproke Werth davon und daher $\cot\frac{\alpha}{2}$ proportional.

diesem aus Lothe, die wir als Kanten jenes Polyeders betrachten, und deren Längen (im Kreise herum gehend) sein mögen a, b, a', b'. Dann ist der Inhalt der ganzen Figur $(a+a').(b+b')$. a und a' sind Sehnen in dem einen Hauptkrümmungskreise mit dem Radius ϱ_1. Daraus folgt, dass der Winkel, den a und a' bei O machen, gleich ist $\pi - \frac{a+a'}{2\varrho_1}$. Nahezu ebenso gross sind aber die Winkel, welchen die in den Kanten b und b' zusammenstossenden Polyederflächen mit einander machen.

Soll also das Polyeder ein Maximum sein, so müssen auf den Kanten b und b' in jedem Punkte Massen angebracht werden, welche proportional sind $\cot \frac{\pi - \frac{a+a'}{2\varrho_1}}{2}$, und da a und a' sehr klein sind, so kann man hierfür setzen $\frac{a+a'}{4\varrho_1}$. Da nun die beiden Kanten die Längen b und b' haben, so liegt auf ihnen beiden die Gesammtmasse $\frac{(a+a')(b+b')}{4\varrho_1}$. Ganz ebenso findet man, dass auf den Kanten a und a' im Ganzen die Masse liegt $\frac{(a+a')(b+b')}{4\varrho_2}$.

Da ferner das ganze Rechteck $ABCD$ unendlich klein ist, so kann man diese Masse gleichmässig darauf vertheilen. Denn wenn nachher die Punkte A, B, C, D an die Stelle von O treten, so wird gerade die ganze Fläche doppelt bedeckt. Dann liegt also auf dem ganzen Rechteck $ABCD$ die Masse

$$\frac{(a+a')(b+b')}{2\varrho_1} + \frac{(a+a')(b+b')}{2\varrho_2}.$$

Da der Inhalt des Rechtecks gleich $(a+a')(b+b')$ ist, so liegt also auf der Flächeneinheit der Maximumfläche eine Masse die proportional ist $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$, und der Satz 7) sagt nun aus, dass der Schwerpunkt eines beliebigen freien Theils der Fläche zusammenfällt mit dem Schwerpunkte desselben Theiles, wenn man in jedem Punkte auf der Flächeneinheit die Masse $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ anbringt. Oder: Der Schwerpunkt eines beliebigen freien Theiles der Fläche fällt zusammen mit dem Krümmungsschwerpunkte desselben Theiles. Ein solches Zusammenfallen der beiden Schwerpunkte für jeden beliebigen freien Flächentheil ist aber nur dann möglich, wenn $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ constant ist.

Diese letzte Entwickelung (über die Maximumflächen) macht übrigens keinen Anspruch auf Strenge. Ich wollte die Weitläufigkeit vermeiden,

welche von einem strengen Grenzübergang unzertrennlich ist, und nur die Aehnlichkeit jenes Kantenschwerpunktes mit dem Krümmungsschwerpunkte der Flächen nachweisen. Ferner scheint mir der Umstand, dass aus jenem Satze 7) sich die charakteristische Eigenschaft der Maximumflächen ableiten lässt, dafür zu sprechen, dass der Satz 7) schon sämmtliche nothwendige Bedingungen der Polyeder-Maxima enthält, d. h. sämmtliche, welche analytisch durch das Verschwinden der ersten Variation gegeben werden.

Berlin, im Juni 1865.

VII.

Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft.

Von

Dr. HERMANN SCHEFFLER,
Herzoglich Braunschweig'scher Baurath.

---

1. Vorbemerkungen. Die Grundprincipien der Mechanik und die unmittelbar daraus hervorgehenden Resultate sind zwar grossentheils aufgeklärt und zum Bewusstsein des grossen Publicums gekommen, so dass jeder einigermaassen wissenschaftlich Gebildete in den meisten der häufig vorkommenden einfachen Erscheinungen sofort die mechanischen Gründe erkennt, und von den Grundgesetzen behuf Lösung praktischer Aufgaben einen leichten und sichern Gebrauch macht; allein dessen ungeachtet giebt es noch mechanische Gesetze, welche im höchsten Grade einfach sind und in den täglichsten Erscheinungen auftreten, ohne doch ein gehöriges Verständniss gefunden zu haben. Jedermann kennt das Parallellogramm der Kräfte und der Geschwindigkeiten und weiss dasselbe sachgemäss anzuwenden; es waltet kein Zweifel über dessen Bedeutung ob. Wird einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung ertheilt, so nimmt er, indem er der resultirenden Mittelrichtung folgt, beide Geschwindigkeiten in den betreffenden Richtungen

zugleich an. Die eine Geschwindigkeit hebt also die andere nicht auf, ändert sie überhaupt nicht, sondern verbindet sich mit ihr. Ebenso kennt wohl Mancher das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte und weiss demzufolge, dass ein System von bewegten Massen, auf welches sich keine neue Arbeit entwickelt, fortwährend dieselbe lebendige Kraft behält, dass sich aber die lebendige Kraft eines Systems, auf welches sich im Laufe der Zeit eine Arbeit entwickelt, nothwendig ändert. Wird also ein geworfener Körper der Schwere überlassen, so verändert sich vermöge der Entwicklung der Arbeit dieser Schwere seine lebendige Kraft. Derselbe nimmt mithin unausgesetzt eine andere Geschwindigkeit an; vermöge des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten behält dieser Körper aber in der ursprünglichen Wurfrichtung fortwährend die constante Wurfgeschwindigkeit bei und es setzt sich mit dieser die aus der Wirkung der Schwere hervorgehende beschleunigte Geschwindigkeit in verticaler Richtung zusammen, so dass der Körper eine Curve durchläuft.

Solche Thatsachen sind hinreichend klar; dasselbe lässt sich jedoch von manchen ganz gewöhnlichen Erscheinungen nicht sagen. Schon die Centrifugalkraft in ihrem einfachsten Auftreten hat etwas unaufgeklärtes Räthselhaftes an sich. Es giebt kein Lehrbuch der Mechanik, in welchem nicht von der Arbeit gesprochen würde, welche die Centrifugalkraft (von Anderen Centripetalkraft genannt) auf den im Kreise rotirenden Körper entwickelt, indem sie ihn dem Mittelpunkte des Kreises nähert. Auch die Mechanik des Himmels kennt nur diese Vorstellung und deducirt sehr bestimmt die aus der Anziehung des Centralkörpers, z. B. der Erde, dieser wahren Centrifugalkraft des Mondes, hervorgehende Arbeit, welche dem Monde eine Fallgeschwindigkeit gegen die Erde verleiht. Wie geht es nun zu, dass, wenn auf einen im Kreise rotirenden Körper durch die Centrifugalkraft fortwährend Arbeit entwickelt wird, seine Geschwindigkeit, also seine lebendige Kraft, constant bleiben kann, da doch der vorhin betrachtete geworfene Körper unter einer solchen fortwährenden Entwicklung von Arbeit unablässig seine Geschwindigkeit verändert? Wo bleibt die Arbeit der Centrifugalkraft, da doch nach Grundanschauungen der Mechanik keine Arbeit verschwinden, auch nur Arbeit durch Arbeit oder durch eine äquivalente lebendige Kraft vernichtet werden kann, oder jede Arbeitsentwicklung ein bestimmtes Quantum lebendiger Kraft zur Erscheinung bringen muss?

Noch viel unsicherer, ja sogar widersprechend und zum Theil ganz irrthümlich sind die herrschenden Ansichten über die Erscheinungen, welche der Kreisel, das rollende Rad, das aus gezogenen Geschützen geworfene Geschoss darbietet. Hier, kann man sagen, hört für das grosse Publicum jede Erkenntniss auf und es beginnt ein Gebiet des Wunderbaren.

Warum ein schief stehender Kreisel nicht fällt, warum ein rotirender Ring sich Kräften, welche seine Rotationsaxe zu drehen streben, mit namhafter Kraft widersetzt, selbst wenn Drehung um seinen Schwerpunkt bezweckt wird, warum ein auf seiner untersten Spitze tanzender Kreisel durch eine gegen seinen höchsten Punkt wirkende horizontale Kraft selbst auf rauher Unterfläche leicht verschoben wird, ohne umgeworfen zu werden, warum eine rotirende Spitzkugel trotz namhafter Seiten- und Verdrehungskräfte ihre Bahn mit so grosser Starrheit innehält und warum sie durch hinreichend starke Kräfte dieser Art so sonderbar gegen ihre Flugbahn abgelenkt wird, dünkt Vielen räthselhaft und wird von Manchen sogar geläugnet, indem die Letzteren vorgeben, der rotirende Körper, da er ein im Gleichgewichte befindliches System darstelle, verhalte sich gegen äussere Kräfte gerade so, wie ein nicht rotirender, eine Ansicht, welche auf einer schweren Täuschung beruht.

Durch den im Archive für Mathematik und Physik von Grunert, Bd. 25, abgedruckten Artikel habe ich das Sachverhältniss in Beziehung auf die rotirenden Körper aufzuklären gesucht. Einige Schriften über die Ablenkung der Spitzkugeln, welche mir in dieser Zeit zu Gesicht gekommen sind, belehren mich jedoch, dass man sich hierüber an vielen Orten noch sehr im Dunkeln befindet. Aus diesem Grunde, und da der erwähnte Artikel in Beziehung auf die Grundeigenschaften der Erscheinung nicht erschöpfend ist, sehe ich mich veranlasst, den Gegenstand, der sowohl in theoretischer, wie in praktischer Hinsicht von besonderer Bedeutung ist, hier etwas ausführlicher zu erörtern.

Diese Erörterung erstreckt sich auf ein Gebiet der Mechanik, welches einen ganz bestimmten Charakter trägt, nämlich auf die Concurrenz von todten Kräften (welche keine Arbeit verrichten) mit Arbeitsgrössen oder lebendigen Kräften. Auf den ersten Blick erscheint es gewagt, von einer Zusammenwirkung oder Zusammensetzung todter mit lebendigen Kräften zu reden, da beide ungleichartige Dinge sind. Die todte Kraft ist ein ruhender Druck, die lebendige Kraft oder Arbeit dagegen ist der Effect, welcher durch die Wirkung einer Kraft über einen gewissen Weg entsteht, welcher also nothwendig Bewegung voraussetzt und demzufolge durch ein Produkt aus einer Kraft in einen Weg dargestellt wird. Hiernach erscheint eine todte Kraft etwa wie eine Linie, eine Arbeit dagegen wie eine Fläche. Wenngleich nach ihrer Einheit völlig ungleichartig, so stehen doch Kraft und Arbeit ebenso wie Linie und Fläche vermöge des Gesetzes, nach welchem sich die Letztere aus der Ersteren erzeugt, auch wieder in einer gesetzlichen Beziehung zu einander. Da nämlich Arbeit durch die Bewegung von Kraft entsteht, so kann Kraft auch als der Nullpunkt oder Nullwerth von Arbeit, wie die Linie als ein Nullwerth der Flächen, nämlich als eine Fläche von unendlich geringer Breite angesehen werden.

Todte Kraft trägt hiernach einen doppelten Charakter. Einmal bildet sie eine ganz besondere, von Arbeit ganz verschiedene Grössenart; andererseits stellt sie eine unendlich kleine Arbeit dar, vertritt also das Anfangsglied der Arbeitsgrössen. Da todte Kraft bei der letzteren Auffassung als ein mit den Arbeitsgrössen völlig gleichartiger mechanischer Effect erscheint, so muss dieselbe auch eine Zusammensetzung mit Arbeitsgrössen principiell zulassen.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass ein Stoss, welcher in unendlich kleiner Zeit eine endliche Arbeit, also in endlicher Zeit eine unendliche Arbeit entwickelt, nichts Anderes ist, als eine unendlich grosse Arbeitsgrösse, welche nur unendlich kleine Zeit thätig ist. Demnach verhält sich todte Kraft zu Arbeit ebenso wie Arbeit zu Stoss, und es ist klar, dass auch der Stoss als eine mit Arbeit gleichartige Grösse aufgefasst und mit Arbeitsgrössen zusammengesetzt werden kann.

Diese Zusammenwirkung todter Kräfte mit lebendigen Kräften erzeugt ebenso eigenthümliche Erscheinungen, wie die Zusammenwirkung von Stössen mit lebendigen Kräften. Die letzteren Erscheinungen sind schon besser studirt als die ersteren; wir werden daher besonders diesen unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

Centrifugalkraft.

2. Das Wesen der Centrifugalkraft. Die Centrifugalkraft oder Fliehkraft, worunter wir die in der Richtung des Krümmungsradius wirkende Kraft, welche auch wohl Centripetalkraft genannt wird, nicht aber die Tangentialkraft, welche Letztere bei gleichförmiger Geschwindigkeit des rotirenden Körpers überhaupt nicht existirt, verstehen, wird gewöhnlich folgendermaassen nachgewiesen.

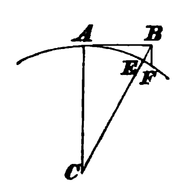


Fig. 1.

Wenn sich ein Körper vom Gewichte w vom Punkte A aus (Fig. 1) mit der Geschwindigkeit v in dem Kreise AE vom Radius r fortbewegt, so würde derselbe, wenn er nicht durch den Druck der starren Curve AE oder eines in C befestigten Fadens zu der Kreisbahn genöthigt wäre, sich in einer gegebenen Zeit längs der Tangente von A nach B bewegen. Vermöge der auf ihn wirkenden Centrifugalkraft f weicht der Körper von der geraden Linie ab. Bald wird gesagt, die Abweichung liege in der von B nach dem Krümmungsmittelpunkte C gezogenen Linie BC, welche mit AB einen spitzen Winkel ABC bildet, der Körper komme also nach E; bald heisst es, die Abweichung erfolge normal zu AB, der Körper gelange also nach F. Beide Annahmen führen zwar bei unendlicher Verkleinerung des Weges AB zu demselben Resultate, sie stellen jedoch in mathematischem Sinne die Sache nicht genau dar; denn im ersteren Falle würde

$AE < AB$ sein, die Geschwindigkeit des Körpers würde sich also vermindern; im letzteren Falle dagegen würde $AF > AB$ sein, seine Geschwindigkeit würde sich also vermehren, was Beides nicht der Fall ist. Sachgemässer ist es, indem man vom Polygone zur Curve übergeht, nach Fig. 2 vorzustellen, dass, wenn der Körper in der Seite $A'A$ bei A anlangt, er ohne fremden Einfluss sich in der Richtung $A'AB$ nach B um das Stück $AB = A'A$ bewegen würde. Da er nun genöthigt wird, sich in der Seite AE nach E zu bewegen, so weicht er von B nach E in der Richtung BE ab. Diese Richtung BE steht normal auf der Halbirungslinie AG des Winkels BAE, ist also parallel der von A nach dem Mittelpunkte des Polygons gezogenen Linie AC. Jetzt ist BAE ein gleichschenkliges Dreieck oder $AE = AB$ und die Geschwindigkeit des Körpers ändert sich nicht. Diese Constanz der Geschwindigkeit oder der lebendigen Kraft des Körpers entspringt daraus, dass die Centrifugalkraft unter einem wenig spitzen Winkel ABE gegen die Bewegungsrichtung wirkt und demgemäss von der lebendigen Kraft des Körpers gerade so viel vernichtet, als sie durch ihre eigene Wirkung längs des Weges BE erzeugt.

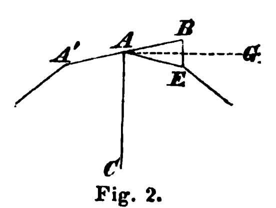


Fig. 2.

Bei genugsamer Verkleinerung des Weges AB kommen alle drei Constructionen auf Eins heraus und der Werth der Centrifugalkraft f bestimmt sich durch dieselbe Rechnung. Ist nämlich u die Geschwindigkeit, welche der Körper durch die Wirkung dieser Kraft längs der Linie BE in dem Augenblicke erlangt, wo er von B in dem Punkte E ankommt, und bezeichnet man die Länge AB mit a und die Länge BE mit b, auch die Geschwindigkeit, welche die Schwere in der Zeiteinheit ertheilt, mit g, so ist die Arbeit der Centrifugalkraft auf dem Wege BE

$$bf = \frac{w}{2g} u^2, \quad \text{also } f = \frac{w}{2g} \frac{u^2}{b}.$$

Ist t die Zeit, während welcher der Körper von A bis E gelangt, während welcher derselbe also bei geradliniger Bewegung von A nach B gelangen würde und während welcher die Centrifugalkraft f durch den Weg BE wirkt, so hat man $AB = a = v.t$, $BE = b = \frac{u}{2}.t$, also $u = 2v\frac{b}{a}$. Da endlich $b : a = a : 2r$, also $\frac{a^2}{b} = 2r$ ist, so ergiebt sich

$$f = \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Durch diese Ableitung finden wir den Werth der Centrifugalkraft f. Die Arbeit bf, welche diese Kraft in der Zeit t verrichtet, ist, weil man $b = \frac{a^2}{2r} = \frac{v^2 t^2}{2r}$ hat, $\quad bf = \frac{w}{2g} \frac{v^4}{r^2} t^2.$

Diese ganze Rechnung hat nur Giltigkeit für einen unendlich kleinen Zeitraum, also nur, indem man dt für t setzt. Der Werth f der Centrifugalkraft ist hiervon ganz unabhängig, die Arbeit aber, welche diese Kraft in der unendlich kleinen Zeit dt verrichtet, also das Element dieser Arbeit, wird, wenn man die Arbeit mit U bezeichnet,

$$dU = \frac{w}{2g} \frac{v^4}{r^2} dt^2.$$

Für eine endliche Zeit T ergiebt sich für diese Arbeit der Werth

$$U = \frac{w}{2g} \frac{v^4}{r^2} \int_0^T dt^2 = \frac{w}{2g} \frac{v^4}{r^2} dt \int_0^T dt = \frac{w}{2g} \frac{v^4}{r^2} T\, dt.$$

Die Arbeit der Centrifugalkraft ist hiernach selbst in endlicher Zeit, da sie als das Product einer endlichen Grösse in das Zeitelement dt erscheint, unendlich klein. Da alle diese Formeln erst dann volle Giltigkeit erlangen, wenn das Zeitelement $dt = 0$ wird, so folgt sogar ganz unzweifelhaft, dass die Arbeit der Centrifugalkraft in jeder Zeit vollkommen null ist, oder dass diese Kraft überhaupt keine Arbeit verrichtet.

Wir sehen also, die Centrifugalkraft beeinflusst den sich bewegenden Körper, ohne Arbeit zu verrichten; sie manifestirt nur eine Tendenz zur Arbeit, sie erscheint einerseits als todte Kraft und andererseits in ihrer Verbindung mit der lebendigen Kraft des Körpers als eine unendlich kleine lebendige Kraft.

Dass man die Gesetze einer Kraft, welche effectiv keine Arbeit verrichtet, doch aus einer Darstellung ableitet, in welcher die Verrichtung von Arbeit den nothwendigen Ausgangspunkt bildet, mag auf den ersten Blick befremden, erläutert sich aber ebenso wie so viele Gesetze, welche man vermittelst der Differentialrechnung aus der Vergleichung unendlich kleiner Grössen, nämlich aus der Betrachtung der Erscheinung in ihrer stetigen Entwicklung vollkommen sicher findet. Die Arbeit der Centrifugalkraft in unendlich kleiner Zeit dt ist nicht eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, sondern eine solche zweiter Ordnung, also immer unendlich viel mal kleiner, als ein Product in dt. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass die Centrifugalkraft nur als todte Kraft mit der Tendenz zur Arbeit besteht, also gar keine wirkliche Arbeit hervorbringt, dass aber dessen ungeachtet diese Tendenz zur Arbeit oder der Werth der Centrifugalkraft als todte Kraft aus den Gesetzen der Bewegung in unendlich kleinen Zeiträumen abstrahirt werden kann.

Was die Richtung der Centrifugalkraft gegen die Bewegungsrichtung des rotirenden Körpers betrifft, so kann man, da eine wirkliche Arbeit, also eine Bewegung des Angriffspunktes dieser Kraft parallel zu ihrer Wirkungsrichtung durchaus nicht vorkommt, nur sagen, die

Centrifugalkraft stehe im mathematischen Sinne *normal auf der Bewegungsrichtung* des davon afficirten Körpers.

Worin besteht nun die *Wirkung* der Centrifugalkraft? Lediglich in der *Ablenkung* des in tangentialer Richtung fortstrebenden Körpers von seiner Bahn, ohne irgend eine Aenderung seiner Geschwindigkeit oder seiner lebendigen Kraft.

Wir erkennen hieraus, dass, um einen mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Körper aus seiner Richtung *abzulenken*, *Kraft* erforderlich ist, und dass diese Kraft *normal zur Bewegungsrichtung* des Körpers wirken muss, also die bekannte *Centrifugalkraft* f ist.

Während man nach der gewöhnlichen Auffassung die *Centrifugalkraft* f als Ergebniss der *Kreisbewegung* entstehen sieht, erscheint uns jetzt die *Kreisbewegung* als das Ergebniss der Einwirkung der normal auf die Bahn eines Körpers wirkenden Kraft f.

Bezeichnet man in Fig. 3 den Winkel $DBD' = ACA'$, um welchen der Körper A in der Zeit t von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, mit α, so ist $AA' = vt = \alpha r$. Hieraus ergiebt sich, da nach der Formel für f

$$r = \frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{f}$$

ist,

Fig. 3.

$$\alpha = \frac{vt}{r} = \frac{g}{w} \cdot \frac{ft}{v},$$

und die Ablenkung in der *Zeiteinheit* beträgt

$$\alpha_1 = \frac{g}{w} \cdot \frac{f}{v}.$$

Die Ablenkung α, welche ein Körper durch die normal zu seiner Bahn wirkende Kraft f erleidet, steht also *mit dieser Kraft* f *in directem*, *mit der Geschwindigkeit* v *in indirectem* und *mit der Zeit* t *der Einwirkung in directem Verhältnisse*. Der Körper beschreibt dabei eine Kreislinie vom Radius $\frac{w}{g} \cdot \frac{v^2}{f}$. Hieraus folgt, dass, wenn auf einen Körper von gegebener Geschwindigkeit v die halbe Kraft doppelt so lange oder die doppelte Kraft halb so lange wirkt, er dieselbe Ablenkung erleidet (ohne jedoch dieselbe *Kreislinie* zu durchlaufen). Es entspricht dies dem Uebergange aus der Richtung AB in die Richtung BA' durch irgend einen der an beiden Linien tangenten Kreisbögen AA' oder A_1A_1' oder A_2A_2' (Fig. 4).

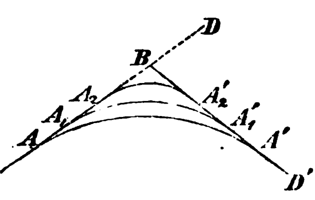


Fig. 4.

Ist die Zeit t, während welcher die Kraft f wirkt, unendlich klein $= dt$, so ist auch der Ablenkungswinkel unendlich klein $= d\alpha$ und man hat

$$d\alpha = \frac{g}{w} \frac{f}{v} dt.$$

Ist nun die Kraft f mit der Zeit t variabel, so wird die Ablenkung in der Zeit t

$$\alpha = \frac{g}{v\,w} \int f\,dt.$$

Der Körper beschreibt alsdann eine Curve, dessen Krümmungshalbmesser in dem Augenblicke, wo die normal auf der Bahn wirkende Ablenkungskraft den Werth f hat, durch

$$r = \frac{w}{g} \frac{v^2}{f}$$

dargestellt ist.

Um den Körper in der Zeit t um den Winkel α von seiner Bewegungsrichtung abzulenken, ist nach Vorstehendem eine normal zu dieser Bewegungsrichtung wirkende Kraft f von dem Betrage

$$f = \frac{w}{g} \frac{v}{t} \alpha$$

erforderlich. Um also in unendlich kleiner Zeit dt die unendlich kleine Ablenkung $d\alpha$ zu erzeugen, bedarf es der Kraft

$$f = \frac{w}{g} v \frac{d\alpha}{dt}.$$

Setzt man, wie vorhin, die Ablenkung pro Zeiteinheit $= \alpha_1$, so dass $\alpha = \alpha_1 t$ und $d\alpha = \alpha_1 dt$ ist, so ergiebt sich der beachtenswerthe Ausdruck

$$f = \frac{w}{g} v \alpha_1.$$

Derselbe lehrt die Normalkraft f kennen, welche fähig ist, den Körper vom Gewichte w und von der Geschwindigkeit v in jeder Zeiteinheit um die Winkelgrösse α_1 aus seiner Bahnrichtung abzulenken.

Wir bemerken noch, dass, wenn ein Körper von einer constanten Fortschrittskraft f' und zugleich von einer normal gegen seine Bewegungsrichtung wirkenden constanten Centrifugalkraft f getrieben wird, er gleichzeitig beschleunigt und abgelenkt wird, und zwar dergestalt, dass er eine logarithmische Spirale beschreibt. Denn vermöge der constanten Fortschrittskraft f' ist seine Geschwindigkeit $v = \frac{g f'}{w} t$ und die Länge des von ihm in der Zeit t zurückgelegten Curvenbogens $s = \frac{g f'}{2 w} t^2 = \frac{w}{2 g f'} v^2$, so dass man auch $v^2 = \frac{2 g f'}{w} s$ hat. Da nun nach Obigem der Krümmungshalbmesser r den Werth $\frac{w}{g f} v^2$ besitzt, so besteht

zwischen diesem Krümmungshalbmesser und dem Curvenbogen die interessante Beziehung

$$r = 2\frac{f'}{f}s.$$

Diese Beziehung entspricht einer logarithmischen Spirale

$$\varrho = \frac{f}{2f'}e^{\frac{2f'\varphi}{f}}.$$

3. Imaginäre Arbeit. Man kann die Thätigkeit, welche eine Kraft f entwickelt, indem sie auf einen normal zu ihrer Richtung sich bewegenden Punkt wirkt, die imaginäre Arbeit dieser Kraft nennen, wogegen die Thätigkeit, welche eine Kraft entwickelt, indem sich ihr Angriffspunkt in ihrer Richtung bewegt, eine reelle Arbeit ist.

Nimmt man als Maass der imaginären Arbeit das Product aus f in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt normal zu ihrer Richtung beschreibt, und bezeichnet diese Arbeit mit I, so hat man bei constanter Kraft f, wenn a der Weg des Angriffspunktes ist, $I = af = vtf$ und bei variabler Kraft $I = v\int f\,dt$. In beiden Fällen ist die Ablenkung α, welche durch die imaginäre Arbeit I hervorgebracht wird,

$$\alpha = \frac{g}{w}\cdot\frac{I}{v^2}.$$

Die lebendige Kraft des mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Körpers ist $\frac{wv^2}{g}$; bezeichnet man dieselbe mit L, so ergiebt sich

$$\alpha = \frac{I}{L}.$$

Der Ablenkungswinkel stellt also das Verhältniss der imaginären Arbeit der Centrifugalkraft zu der lebendigen Kraft des bewegten Körpers dar, oder es verhält sich in Fig. 3 der Radius CA der Kreisbahn zu dem Bogen AA', welchen der Körper A in einer gewissen Zeit durchläuft, wie die lebendige Kraft L des Körpers zu der in dieser Zeit entwickelten imaginären Arbeit der auf den Körper angebrachten Kraft.

Für eine unendlich kleine Ablenkung kann man $\alpha = tang\,\alpha$, also $I = L\,tang\,\alpha$ setzen. Es verhält sich alsdann in Fig. 5 AB zu AC wie I zu L.

Fig. 5.

Macht man jetzt BD normal auf CB, so verhält sich auch

$$DA : AB = AB : AC = I : L.$$

Misst man also in der Bewegungsrichtung AB des Körpers eine Länge AB ab, welche dessen lebendige Kraft L darstellt und nimmt normal darauf AD gleich einer unendlich kleinen imaginären Arbeit der Centrifugalkraft, so erscheint die wirkliche Bewegung, welche der Körper durch die Einwirkung jener imaginären Arbeit an-

nimmt, in der Richtung DB oder in der Richtung der Tangente an A' als die Resultante der Zusammensetzung der beiden rechtwinkligen Kräfte I und L.

Wird der Körper A ausser von Centrifugalkräften f, d. h. von Kräften, welche normal zu seiner Bahn wirken, von anderen angegriffen, welche parallel zu seiner Bahn wirken, also reelle Arbeit verrichten, so wird die Geschwindigkeit v variabel. Die obige Grundbeziehung zwischen v, f und r bleibt alsdann bestehen, die Ablenkung wird

$$\alpha = \frac{g}{w}\int \frac{f}{v}\,dt,$$

die imaginäre Arbeit der Centrifugalkraft oder überhaupt aller normal zur Bahn wirkenden Kräfte wird

$$I = \int v\,f\,dt,$$

und die einfache Beziehung zwischen α, I und der lebendigen Kraft L des Körpers kann wegen der Veränderlichkeit von L nicht mehr stattfinden.

Wenn der Körper A ein System von materiellen Punkten, also ein ausgedehnter Körper ist, auf welchen keine reelle Arbeit entwickelt wird, dessen lebendige Kraft also keine Aenderung erleidet, so werden seine verschiedenen Punkte im Allgemeinen verschiedene Geschwindigkeiten haben, und man kann die Bewegung desselben in jedem Augenblicke als einen gleichförmigen Fortschritt seines Schwerpunktes, combinirt mit einer gleichförmigen Drehung um diesen Schwerpunkt ansehen. Beschreibt nun der Schwerpunkt eine krummlinige Bahn, so bestehen zwischen der Krümmung dieser Curve oder der Ablenkung der Schwerpunktsbewegung und der nach dem Krümmungsmittelpunkte dieser Curve wirkenden Gesammtcentrifugalkraft die vorstehenden gesetzlichen Beziehungen, wobei w das Gesammtgewicht des Körpers und v seine Schwerpunktsgeschwindigkeit vertritt. Für die Drehung um den Schwerpunkt gelten in Beziehung zu den einzelnen materiellen Punkten des Körpers und deren Umlaufsgeschwindigkeiten um den Schwerpunkt, sowie hinsichtlich der Centrifugalkräfte, welche auf jeden dieser Punkte in der Richtung nach dem Schwerpunkte wirken, ebenfalls die obigen Gesetze. Hierdurch wird die Centrifugalkraft für jeden materiellen Punkt des Körpers in zwei Kräfte zerlegt, von welchen die eine gegen den Mittelpunkt der Schwerpunktsbewegung und die andere gegen den Schwerpunkt gerichtet ist. Offenbar müssen die ersteren Kräfte mit der vom Mittelpunkte der Schwerpunktsbewegung ausgehenden Kraft und die letzteren Kräfte müssen unter sich im Gleichgewichte sein. Die Bedingung dieses Gleichgewichts führt also zur Kenntniss der Spannungen, welche zwischen dem Gesammtkörper und dem Mittelpunkte seiner Schwerpunktsbewegung herrschen, sowie zur Kenntniss

der inneren Spannungen zwischen den materiellen Punkten des Körpers selbst.

Ausserdem kann man aber auch die absolute Bewegung jedes materiellen Punktes mit einem Male betrachten und nach der Krümmung der Bahn und der absoluten Geschwindigkeit des betreffenden Punktes die Grösse und Richtung der Centrifugalkraft ermitteln, welche auf diesen Punkt wirkt.

Jetzt muss aber die Veränderlichkeit, welche die absolute Geschwindigkeit v dieses Punktes (in Folge der entstehenden inneren Spannungen) möglicherweise besitzen kann, gehörig berücksichtigt werden, um daraus die in der Richtung der Bahn dieses Punktes wirksamen Kräfte, welche reelle Arbeit verrichten und jene Veränderlichkeit herbeiführen, zu bestimmen. Alle diese Kräfte zusammengenommen müssen mit der von aussen auf den Körper angebrachten (durch den Mittelpunkt der Schwerpunktsbahn wirkenden) Centrifugalkraft im Gleichgewichte sein. Da aber die Kräfte, welche reelle Arbeit verrichten oder parallel zu den Bahnen der einzelnen Punkte wirken, für sich im Gleichgewichte sind, indem vorausgesetzt ist, dass die gesammte lebendige Kraft des Körpers constant bleibt, also partielle Vermehrungen durch partielle Verminderungen ausgeglichen werden, so folgt, dass auch die Centrifugalkräfte, welche nach Maassgabe der absoluten Bewegung der einzelnen Punkte imaginäre Arbeit verrichten, für sich (einschliesslich der von dem festen Mittelpunkte der Schwerpunktsbewegung oder von einer starren Schwerpunktsbahn ausgehenden Kraft) im Gleichgewichte sein müssen.

Die Formulirung der hieraus sich ergebenden Beziehungen überlasse ich dem Leser, da es mir gegenwärtig mehr um eine anschauliche qualitative, als um eine vollständige quantitative Analyse der betreffenden Grundgesetze zu thun ist.

Das Wesentliche bei diesen Erscheinungen ist, dass die erwähnten Centrifugalkräfte keine reelle, sondern nur imaginäre Arbeit verrichten, und demzufolge weder die Gesammtgeschwindigkeit des Körpers, noch die Geschwindigkeiten seiner einzelnen Punkte ändern, vielmehr lediglich Ablenkungen dieser Punkte aus ihren Bahnrichtungen bewirken, dass also die etwaigen Aenderungen, welche die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Körpers erleiden, auf der reellen Arbeit der inneren Spannungen beruhen. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn die Verbindung der materiellen Punkte unter sich zu einem Körper und mit äusseren festen Punkten oder Linien zu einem Körpersystem von der Art ist, dass die Bänder des Systems keine Spannungen parallel zur Bahn der einzelnen Punkte vermitteln können, die absolute Geschwindigkeit jedes materiellen Punktes nothwendig constant bleiben muss, so dass alsdann nur Centrifugalkräfte mit imaginä-

ren Arbeiten auftreten können. Hieraus ergiebt sich sofort die Erklärung einiger hauptsächlichen Erscheinungen.

Angenommen, der Körper DE, welcher aus zwei gleich schweren, durch eine massenlose Stange verbundenen materiellen Punkten D, E besteht (Fig 6), werde mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AA_1 geworfen, und von A_1 an werde sein Schwerpunkt A_1 gezwungen, die Kreislinie $A_1 A_2 A_3$ zu durchlaufen, was entweder durch den Widerstand einer festen Leitbahn $A_1 A_2 A_3$ oder durch die Spannung eines in C befestigten Fadens CA_1 geschehen kann. Beim Eintritte des Punktes A in die Kreislinie strebt jede der beiden Massen D und E mit gleicher Geschwindigkeit v vorwärts, und da der Innehaltung dieser Geschwindigkeit kein Hinderniss entgegensteht, so wird jede Masse einen gleich grossen Kreis $D_1 D_2 D_3$ und $E_1 E_2 E_3$ resp. um den Mittelpunkt F und G beschreiben. Die Centrifugalkraft, welche auf D_2 wirkt, ist alsdann der auf E_2 wirkenden der Grösse und Richtung nach gleich; beide werden also durch den im gemeinschaftlichen Schwerpunkte A_2 in entgegengesetzter Richtung wirkenden Widerstand der Leitbahn oder des Fadens CA_2 im Gleichgewichte erhalten. Der Körper DE rückt also auch in der Kreisbahn parallel mit sich selbst und mit unveränderter Geschwindigkeit aller seiner Theile fort und würde, wenn er bei A_3 von diesem Zwange befreit würde, ebenfalls parallel, also ohne Umdrehung um seinen Schwerpunkt, in der Richtung $A_3 A_4$ davon eilen.

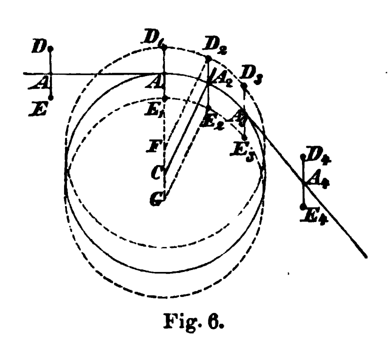


Fig. 6.

Damit der vorstehende, in seinem Schwerpunkte gefesselte Körper eine Kreisbahn nach Fig. 7 dergestalt durchlaufe, dass er sich stets nach dem Centrum C kehrt, muss schon beim Eintritte in die Kreisbahn die obere Masse D_1 eine dem Verhältnisse von CD_1 zu CE_1 entsprechende grössere Geschwindigkeit als die untere Masse E_1 haben. In diesem Falle setzen beide Massen ihre Bewegung in den concentrischen Kreisbahnen von verschiedenen Radien CD_1 und CE_1 fort. Sie erzeugen hierbei allerdings verschiedene Centrifugalkräfte; da jedoch diese Kräfte D_2, E_2 immer nach demselben Centrum C gerichtet sind, so werden sie durch den im Schwerpunkte A_2 wirkenden Widerstand im Gleichgewichte erhalten. Verliesse dieser Körper die Kreisbahn bei A_3, so würde zwar sein Schwerpunkt

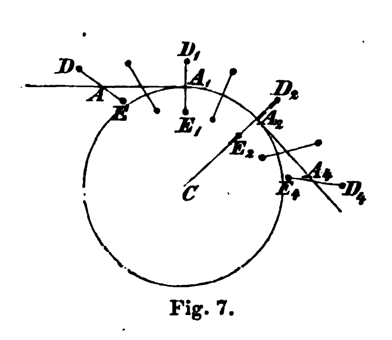


Fig. 7.

in gerader Linie $A_2 A_4$ davon eilen, der Körper würde sich aber um diesen Schwerpunkt gleichförmig drehen und hierdurch bewirken, dass jede seiner Massen fortwährend die nämliche absolute Geschwindigkeit beibehielte. Es ist klar, dass, um den letzteren Bewegungszustand in der Kreisbahn zu erzeugen, der Körper DE entweder als ein um sich selbst rotirender bei A_1 ankommen oder vermittelst einer schon bei C beginnenden steifen Stange CD_1, an welcher D_1 und E_1 befestigt sind, in Rotation um den Punkt C versetzt sein muss.

4. Zusammengesetzte Centrifugalkraft. Betrachten wir jetzt einen Fall zusammengesetzter Centrifugalkraft. Der Körper A (Fig. 8) sei vermittelst der beiden Fäden BA und DA an die beiden festen Punkte B und D geheftet und schwinge in dem Kreise, dessen Radius $CA = r$ ist, mit der Tangentialgeschwindigkeit v um die Axe BD. Die Centrifugalkraft $f = \frac{w}{g}\frac{v^2}{r}$, welche in der Richtung des Radius AC wirksam ist, bildet die Resultante AF zweier Componenten AG und AH, welche in den Linien AB und AD liegen. Setzt man $AB = a$, $AD = b$, Winkel $ABC = \alpha$ und $ADC = \beta$, so werden die beiden Componenten AG und AH, wenn man dieselben resp. mit f' und f'' bezeichnet,

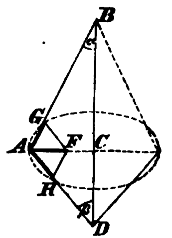


Fig. 8.

$$f' = f\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{w}{g}\frac{v^2}{a}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)},$$

$$f'' = f\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{w}{g}\frac{v^2}{b}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}.$$

Diese beiden Kräfte f' und f'' erscheinen also als Theile zweier Centrifugalkräfte $\frac{w}{g}\frac{v^2}{a}$ und $\frac{w}{g}\frac{v^2}{b}$, welche entstehen würden, wenn der Körper mit seiner Fluggeschwindigkeit resp. einen Kreis vom Radius $BA = a$ und $DA = b$ durchliefe. Diese Theile sind von den Winkeln α und β abhängig und sie werden der Einheit gleich, wenn der Winkel BAD, also auch $\alpha + \beta$, ein rechter wird.

Die vorstehende Betrachtung liefert den Schlüssel zu einigen interessanten Erscheinungen. Angenommen, in Fig. 9 rotire der gewichtslose Körper E von der Masse m um die Axe DB in dem Kreise vom Radius $DE = b$ mit der Geschwindigkeit v vermittelst des in D befestigten Fadens DE; es werde auf diesem Körper eine Kraft $IE = f'$ angebracht, welche stets normal gegen den Faden DE und gegen die Bahn des Körpers wirkt; welche Bewegung wird dieser Körper annehmen?

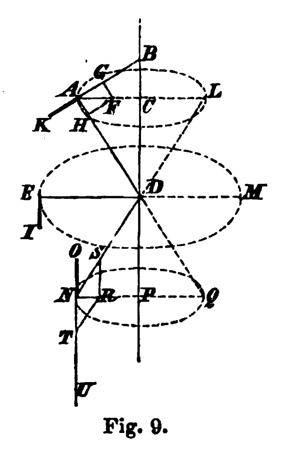


Fig. 9.

Derselbe wird aufsteigen und mit der Geschwindigkeit v in einem Kreise AL vom Radius $CA = r$ um die Axe DB rotiren. Der Radius dieses Kreises bestimmt sich durch die Bedingung, dass, wenn AG in der Ebene DAB normal auf DA gezogen und gleich f' gemacht, ferner $AH = f''$ gemacht wird, die Diagonale AF des über AG und AH entworfenen Rechteckes gleich $f = m\frac{v^2}{r}$ wird und normal auf der Axe DB steht. Da jetzt $\alpha + \beta = 90^0$, also $\sin\alpha = \cos\beta$ ist, so muss man haben, wenn $BA = a$ gesetzt wird,

$$f = \sqrt{f'^2 + f''^2} = m\frac{v^2}{r}, \quad f' = m\frac{v^2}{a}, \quad f'' = m\frac{v^2}{b}.$$

Dies giebt $a = \frac{mv^2}{f'}$ und

$$r = \frac{mv^2}{f} = \frac{mv^2}{\sqrt{f'^2 + \frac{m^2v^4}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Der Faden DE durchläuft also unter der Einwirkung der Centrifugalkraft f'' und der Kraft f', welche beide nur imaginäre Arbeit verrichten, die Kegelfläche DAL, und man erkennt, dass die Rotationsebene EM des Körpers E, welcher ohne den Einfluss der Kraft f' den Kreis EM durchlaufen würde, durch die auf dieser Ebene normal stehende Kraft f' selbst in Rotation um die Axe DB versetzt wird, nachdem sie in die Stellung einer Tangentialebene an der Kegelfläche DAL aufgerichtet worden ist.

Denken wir uns den Körper E der Schwere unterworfen, so wird das Gewicht $ON = w$ ihn herabziehen und bewirken, dass er in dem Kreise NQ vom Radius $PN = r$ um die verticale Axe DP rotirt. Der letztere Kreis bestimmt sich, wenn man $DN = a$ und Winkel $NDP = \alpha$ setzt, durch die Bedingung, dass die Diagonale $NR = f$ des über $NS = f'$ und $NT = f'' = w$ beschriebenen Parallelogrammes horizontal stehe. Man hat jetzt $\beta = 0$ und demnach

$$f' = \frac{w}{g}\frac{v^2}{a}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad f'' = \frac{f}{\tang\alpha} = w.$$

Hieraus folgt $f = w \tang\alpha$ und

$$DP = a\cos\alpha = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2} - \frac{v^2}{2g}.$$

In letzterem Fall ist es also die Schwere, welche der Rotationsebene des schwingenden Körpers eine Drehung um die verticale Axe verleiht, ohne dabei reelle Arbeit zu verrichten (ohne also auch die Geschwindigkeit des Körpers zu verändern).

Wir bemerken noch, dass, sobald in Fig. 8 der Faden AD normal auf BD steht, als $\beta = 90^0$ wird, $f' = 0$ und $f'' = \frac{w}{g}\frac{v^2}{b} = \frac{w}{g}\frac{v^2}{r}$ wird,

dass also dann nur der Faden CA, nicht aber der Faden BA, Spannung erhält.

Würde der Winkel β stumpf, so erhielte man für f' einen negativen Werth, d. h. der Faden BA würde alsdann nicht mehr gespannt, sondern comprimirt, müsste also in eine steife Stange verwandelt werden.

Gyralkraft.

5. Der Schwungring. Im Vorstehenden haben wir die Ablenkung eines Körpers aus seiner Fortschrittsrichtung durch die imaginäre Arbeit einer Kraft betrachtet; wir gehen jetzt zu der wichtigeren Untersuchung der Ablenkung der Drehungsaxe eines rotirenden Körpers über.

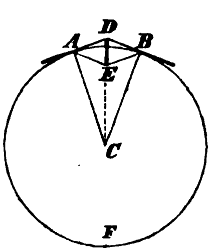


Fig. 10.

Zuvörderst stellen wir uns einen Ring ABF (Fig. 10) vom Radius r vor, welcher mit der Geschwindigkeit v um seinen Mittelpunkt C, mit welchem er in keiner materiellen Verbindung steht, rotirt. Einen solchen Ring nennen wir kurz einen Schwungring. Das Gewicht der Längeneinheit des Ringes sei w. Jedes Element des Umfanges desselben, wie AB, wird vermöge der Centrifugalkraft in der Richtung CD nach aussen getrieben; es ist aber kein radialer Faden vorhanden, welcher sich dieser Kraft widersetzen könnte; dieselbe wird mithin lediglich durch die Spannung aufgehoben, welche sich zwischen den Elementen des Ringes bei A und B in tangentialer Richtung äussert. Hiernach liegt die Tendenz vor, den Ring zu zerreissen. Diese zwischen den Elementen des Schwungringes sich erzeugende Spannung f' ergiebt sich, wenn man die auf das Stück AB wirkende Centrifugalkraft mit f und den sehr kleinen Winkel ACB mit φ bezeichnet, folgendermaassen.

Das Gewicht des Stückes AB ist $\varphi r w$, folglich die Centrifugalkraft $f = \frac{\varphi r w}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{\varphi w}{g} v^2$. Diese Centrifugalkraft ist die Resultante der bei A und B tangential wirkenden Spannungen f'. Demzufolge hat man $f = 2f' \sin \frac{\varphi}{2}$ und wegen der Kleinheit des Winkels φ wird $f = \varphi f'$. Setzt man hierin für f den vorhergehenden Werth, so ergiebt sich

$$f' = \frac{w}{g} v^2.$$

Die Tangentialspannung, welche in einem Schwungringe die Centrifugalkraft ersetzt, ist hiernach nur von der Geschwindigkeit v, nicht von dem Radius r des Ringes abhängig; ein kleines Schwungrad wird also bei gleichem Gewichte pro

Längeneinheit des Kranzes und bei gleicher Tangentialgeschwindigkeit ebenso leicht gesprengt, wie ein grosses.

Diese Tangentialspannung ist nach ihrem numerischen Werthe gleich der in der Längeneinheit des Ringes wohnenden lebendigen Kraft.

Jedes Element eines Schwungringes wird also nicht durch eine radial wirkende Centrifugalkraft f, sondern durch zwei an seinen Enden tangential wirkende Spannkräfte f' von seiner Bahn abgelenkt. Da diese Spannkräfte in der Richtung der Bewegung ihrer Angriffspunkte wirken, so verrichten sie reelle Arbeit; allein die Arbeit der einen ist positiv und die der andern negativ; beide heben sich also auf, und die reelle Gesammtarbeit beider bleibt null, wie bei der Centrifugalkraft.

Wenn die Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes $= \alpha$ ist, so erhält man für die Tangentialspannung den Ausdruck $f' = \frac{w}{g} \alpha^2 r^2$, so dass also diese Spannung bei gleicher Winkelgeschwindigkeit mit dem Quadrate des Radius wächst.

6. Lebendige Fortschrittskraft und lebendige Drehungskraft. Ehe wir weitergehen, heben wir hervor, dass in der Mechanik zwischen Fortschritts- und Drehungsbewegung unterschieden wird. Jede dieser beiden Bewegungsarten führt zu eigenthümlichen Erscheinungen und Gesetzen; es kann in vielfacher Beziehung nicht die eine durch die andere ersetzt, es kann nicht die eine in die andere verwandelt werden, ohne besondere Nebenwirkungen hervorzurufen; demzufolge ist die Unterscheidung beider in der Natur der Sache wohl begründet. Bei der lebendigen Kraft eines Körpers oder der in ihm angehäuften Arbeit wird jedoch auf die Richtungen, in welchen diese Kraft lebt, keine Rücksicht genommen; die Summe $\Sigma m v^2$ für alle materiellen Theilchen von der Masse m und Geschwindigkeit v stellt die lebendige Kraft des Körpers dar, gleichviel, ob die Geschwindigkeiten v gleiche oder verschiedene Richtungen haben. Für viele Zwecke ist es aber ebenso wichtig, die lebendige Fortschrittskraft von der lebendigen Drehungskraft zu unterscheiden, da Beide besondere Eigenschaften haben und einander im Allgemeinen nicht ersetzen können.

Zerlegen wir also die Bewegung jedes Theilchens eines Körpers in die Fortschrittsbewegung parallel zur Bewegung seines Schwerpunktes und in die Drehungsbewegung um diesen Schwerpunkt, so stellt die Summe der lebendigen Kräfte, welche die Theilchen in der Fortschrittsbewegung haben, die lebendige Fortschrittskraft des Körpers dar, wogegen die Summe der lebendigen Kräfte, welche die Theilchen in der Drehungsbewegung ha-

ben, die lebendige Drehungskraft darstellt. Die Summe Beider ist die gesammte lebendige Kraft des Körpers.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen diesen beiden Arten von lebendiger Kraft gehen aus Folgendem hervor. Vermöge der lebendigen Fortschrittskraft ist der Körper fähig, in der Fortschrittsrichtung wiederum lebendige Fortschrittskraft zu erzeugen, oder Fortschrittsarbeit zu entwickeln, sei es allmälig, sei es plötzlich durch Stoss. Wegen der häufigen Ausnutzung der letzteren Eigenschaft kann man die lebendige Fortschrittskraft auch Stosskraft nennen. Vermöge der lebendigen Drehungskraft ist der Körper fähig, wiederum lebendige Drehungskraft oder Drehungsarbeit zu entwickeln, und mit Rücksicht auf diese gewöhnliche Ausnutzung der lebendigen Drehungskraft der Schwungräder kann man diese lebendige Kraft auch Schwungkraft nennen. Wenngleich es nun wohl möglich ist, die lebendige Fortschrittskraft (z. B. durch schiefen Stoss) und auch die lebendige Drehungskraft theilweise in lebendige Fortschrittskraft und theilweise in lebendige Drehungskraft zu verwandeln, so ist es doch unmöglich, die lebendige Fortschrittskraft ausschliesslich in Drehungskraft, oder die lebendige Drehungskraft ausschliesslich in Fortschrittskraft zu verwandeln; wohl aber ist es möglich, vermittelst der lebendigen Fortschrittskraft eines Körpers A einem andern Körper B Fortschrittsbewegung ohne alle Drehung oder vermittelst der lebendigen Drehungskraft eines Körpers A einem andern Körper B Drehung ohne allen Fortschritt zu ertheilen. Denn wenn sich die lebendige Fortschrittskraft des Körpers A so auf den Körper B entladet, dass die Resultante nicht durch den Schwerpunkt des letzteren geht, so zersplittert sich jene Kraft theils in Fortschritts-, theils in Drehkraft (oder, falls die Drehung von B durch feste seitliche Führungen unmöglich gemacht wäre, wird ein Theil der lebendigen Fortschrittskraft vernichtet); wenn jedoch die Resultante durch den Schwerpunkt von B geht, empfängt der letztere Körper nur Fortschritts- und keine Drehungsbewegung, und es kann jeder Verlust von lebendiger Kraft verhütet werden. Ebenso, wenn sich die lebendige Drehungskraft von A so auf B entladet, dass B um eine andere, als eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe gedreht wird, so zersplittert sich jene Kraft theils in Drehungs-, theils in Fortschrittskraft (oder, falls der Schwerpunkt von B befestigt wäre, wird ein Theil der lebendigen Kraft von A vernichtet und der Stützpunkt von B empfängt einen todten Druck); wenn jedoch die Entladung so geleitet wird, dass B um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe rotirt, wird darin nur lebendige Drehungskraft erzeugt und es kann jeder Verlust an lebendiger Kraft und jeder Druck auf den Schwerpunkt vermieden werden.

Diese Besonderheit der Stosskraft und der Schwungkraft lässt

sich auch noch dahin definiren, dass die Erstere lebendige Kraft schlechthin, die Letztere dagegen ein lebendiges Kräftepaar ist. Hierdurch werden also durch die Schwungkraft oder die lebendige Drehungskraft die schon aus der Statik bekannten Eigenthümlichkeiten der Kräftepaare auch auf die Dynamik, insbesondere auf die Arbeitseffecte übertragen, und man wird dadurch in den Stand gesetzt, eine grosse Zahl complicirter Bewegungserscheinungen unter einfache und übersichtliche Gesichtspunkte zu stellen.

7. **Gyralkraft.** Zunächst ist sofort klar, dass in ähnlicher Weise, wie sich eine einfache Kraft (die Centrifugalkraft), welche keine reelle, sondern nur imaginäre Arbeit verrichtet, mit der lebendigen Fortschritts- oder Stosskraft eines Körpers combinirt, um denselben aus seiner Fortschrittsrichtung abzulenken, ein Kräftepaar, welches keine reelle, sondern nur imaginäre Arbeit verrichtet, mit der lebendigen Drehungs- oder Schwungkraft eines Körpers combiniren wird, um dessen Rotationsaxe zu verrücken. Ein solches Kräftepaar, durch dessen imaginäre Arbeit die Rotationsaxe eines Körpers abgelenkt, d. h. aus ihrer Richtung gebracht oder um eine Axe im Raume gedreht wird, wollen wir seine **Gyralkraft** oder **Drehkraft** nennen.

Die Erscheinungen, welche durch die Gyralkraft hervorgebracht werden, sind in hohem Grade interessant. Wir werden im Nachfolgenden die einfachsten Fälle betrachten.

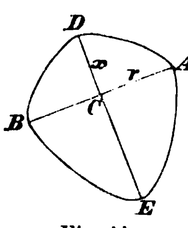


Fig. 11.

8. **Das Schwungrad.** Unter einem Schwungrade verstehen wir einen Körper AB (Fig. 11), dessen geometrische Form durch die Umwälzung der Curve DAE um die Axe DE entstanden ist, und welcher mit der Winkelgeschwindigkeit η um diese Axe schwingt.

Bezeichnet r irgend eine Ordinate CA der Curve DAE für die Abscisse $x = DC$ und ist w das Gewicht der Volumeinheit des Stoffes des Schwungrades, so ist das Gewicht W des Schwungrades

$$W = \pi w \int r^2 \, dx.$$

Sein Trägheitsmoment T ist

$$T = \frac{\pi}{2} \frac{w}{g} \int r^4 \, dx,$$

und die lebendige Drehungskraft L desselben

$$L = \frac{\pi}{2} \frac{w}{g} \eta^2 \int r^4 \, dx = \eta^2 T.$$

Wenn man die Materie des Schwungrades nicht als schwer denkt, so tritt in diesen Formeln die Masse m der Volumeinheit an die Stelle von $\frac{w}{g}$.

Zerlegt man das Schwungrad in seine ringförmigen Elemente, wie sie bei der geometrischen Erzeugung des Volums dieses Rades durch die einzelnen Punkte der Fläche DAE beschrieben und bei der Rotation des Schwungrades von den einzelnen materiellen Punkten des Rades durchlaufen werden, so entsteht in jedem Elemente eines solchen Ringes eine Centrifugalkraft, welche durch die Cohäsion des Materials neutralisirt wird. Je nachdem die materiellen Punkte des Schwungrades radial mit der Axe DE oder zirkular in der Richtung der eben genannten Ringlinien oder auf beiderlei Weise an einander geheftet sind, äussert sich die Centrifugalkraft entweder als radiale oder als zirkulare Spannung oder als Beides zugleich. In jedem Falle wird diese Centrifugalkraft durch die inneren Kräfte des Materials paralysirt.

Wenn auf das Schwungrad eine einfache Kraft angebracht wird, welche durch den Schwerpunkt wirkt, so wird dasselbe der Wirkung dieser Kraft ebenso folgen, wie wenn es nicht rotirte und dabei seine Rotation fortsetzen, es wird also unbeschadet seiner Rotation eine beschleunigte oder verzögerte und vielleicht krummlinige Fortschrittsbewegung annehmen und seine Axe DE wird stets eine ihrer ursprünglichen Richtung parallele Stellung im Raume einnehmen. Wenn auf dieses Schwungrad ein Kräftepaar angebracht wird, dessen Drehungsaxe mit der Axe des Rades zusammenfällt, so wird sich dagegen die Rotation des Schwungrades beschleunigen oder verzögern, ohne dass seine Fortschrittsbewegung afficirt wird. Wenn keine dieser beiden Bedingungen streng erfüllt wird, kann man die Arbeit der äusseren Kraft immer in die Arbeit einer durch den Schwerpunkt wirkenden einfachen Kraft und in die Arbeit eines Kräftepaares zerlegen. Da nun die erstere Kraft immer nur Fortschrittsbewegung ohne Veränderung der Rotation erzeugt, so kommt bei unserer jetzigen Untersuchung, wo wir den Einfluss auf die Rotationsaxe ermitteln wollen, wesentlich nur die Wirkung von Kräftepaaren in Betracht; wo sich kein Kräftepaar äussert, sei es durch directe Anbringung, sei es durch die natürliche Zerlegung der angebrachten Kräfte, kann die Rotation eines Körpers keine Aenderung erleiden; es kann sich also weder die Rotationsgeschwindigkeit, noch die relative Lage der Rotationsaxe im Körper, noch die Stellung des Körpers oder die absolute Lage seiner Rotationsaxe im Raume ändern.

Da jede Bewegung eines Körpers um seinen Schwerpunkt auf eine Rotation des Körpers um eine bestimmte Axe des Körpers, verbunden mit einer Bewegung (Drehung) dieser Rotationsaxe hinausläuft, so kommt hinsichtlich der Veränderung der Rotationsaxe nur die Bewegung in Frage, welche die geometrische Axe des Schwungrades im Raume erleidet.

Weil mit der Drehung der Schwungradaxe eine Ablenkung der

rotirenden Elemente des Ringes aus ihren Bahnen verbunden ist und eine solche Ablenkung nach unseren Untersuchungen über die Centrifugalkraft nothwendig Kraft, wenn auch nicht reelle Arbeit erfordert, so leuchtet ein, dass ein Schwungrad der Drehung oder Ablenkung seiner Axe einen Widerstand entgegensetzt, und dass die Drehung dieses Rades um eine gegebene Winkelgrösse eine bestimmte imaginäre Arbeit erfordert. Dieser Widerstand und die erforderliche imaginäre Arbeit ist für ein ruhendes Rad null oder nicht vorhanden und wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit η. Hierdurch spricht sich also ein entschiedener Unterschied zwischen dem Verhalten eines ruhenden und dem eines rotirenden Körpers gegen äussere Kräfte aus, wie wir früher einen Unterschied zwischen dem Verhalten eines ruhenden und eines fortschreitenden Körpers gefunden haben. Wie der in Beziehung auf Fortschritt ruhende Körper, ohne Widerstand zu leisten oder ohne Kraft zu erfordern, in jede Richtung gelenkt werden kann, ebenso findet sich der in Beziehung auf Rotation ruhende Körper, ohne Widerstand zu leisten, geneigt, sich um jede Axe im Raume zu drehen. Wie aber der fortschreitende Körper einer Ablenkung um eine bestimmte Winkelgrösse einen bestimmten, d. h. von seiner Geschwindigkeit abhängigen und durch eine bestimmte imaginäre Arbeitsgrösse gemessenen Widerstand entgegensetzt, ebenso setzt der rotirende Körper einer Drehung seiner Axe einen bestimmten Widerstand entgegen. Hieraus ist klar, dass der fortschreitende Körper mit einem bestimmten Grade von Beharrlichkeit seine Bahn festhält und ebenso, dass der rotirende Körper mit einem bestimmten Grade von Festigkeit die Lage seiner Rotationsaxe im Raume aufrecht erhält.

Ferner geht hieraus hervor, dass, wenn auf einen bewegten Körper neue Kräfte angebracht werden, welche die Fortschrittsrichtung, resp. die Rotationsaxe zu verändern streben, die Bewegung, welche der Körper in Folge dieser Kräfte annimmt, nicht dieselbe sein kann, als welche er annehmen würde, wenn er ruhte, sondern eine solche, welche aus der Combination dieser neuen Kräfte mit den erwähnten Widerständen oder mit der in dem Körper lebenden Stoss- und Schwungkraft hervorgeht.

9. Erläuterung einiger Erscheinungen. Man findet schon in diesen Sätzen die generelle Erläuterung einiger auffallenden Erscheinungen. Zunächst erklärt sich hieraus, warum ein auf der Spitze rotirender Kreisel und ein rollendes Rad nicht so leicht umfällt, wie ein ruhender Kreisel und ein ruhendes Rad. Denn beim Umfallen muss Drehung um den unteren Stützpunkt, also Drehung der Rotationsaxe und demzufolge Ablenkung aller bewegten Massentheilchen erfolgen, wozu Kraft erforderlich ist, welche doch nicht vorhanden sein würde, wenn die Wirkung der Schwere vollständig auf den Fall des Körpers, d. h. auf die Beschleunigung

seines um jenen Stützpunkt sich drehenden Schwerpunktes verwandt würde.

Ferner ist klar, dass ein rotirender Kreisel und ein rollendes Rad durch eine in seinen oberen Punkten angebrachte horizontale Kraft nicht wie ein ruhender Körper umgeworfen, sondern auf seiner horizontalen Laufebene verschoben oder zu einer krummlinigen Laufbahn genöthigt wird.

Ausserdem erkennt man, dass auf geneigter Ebene ein rotirender Kreisel oder ein rollendes Rad nicht umfällt, sondern entweder herabgleitet oder in einer krummlinigen Bahn herabläuft.

Endlich leuchtet ein, dass ein aus einem gezogenen Rohre geworfenes Geschoss, welches vermöge der spiralförmigen Züge in Rotation versetzt ist, seine Bahn sicherer innehält, also durch Wind und Luftwiderstand weniger abgelenkt wird, als ein aus glattem Rohre geworfenes, nicht rotirendes Geschoss.

10. Das Kippen des Schwungrades. Wenn AB (Fig. 12) eine um die Axe CD rotirende materielle Kreislinie vom Radius r, also ein auf der Rotationsaxe normal stehendes ringförmiges Element des Schwungrades oder ein Schwungring ist, so nennen wir eine Drehung dieses Ringes um einen Durchmeser AB, wobei also die Rotationsaxe CD eine auf AB normal stehende Kreisfläche durchläuft, das Kippen des Schwungringes.

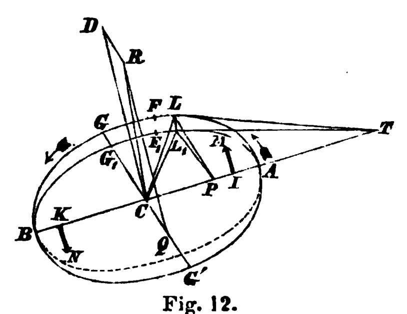


Fig. 12.

Die Ablenkung der im Kreise AGB rotirenden materiellen Punkte des Schwungringes von ihrer tangentialen Bewegungsrichtung wird durch die in dem Ringe sich äussernde und durch die Cohäsion erzeugte Centrifugalkraft bewirkt. Beim Kippen des Schwungringes werden aber jene materiellen Punkte zu neuen Ablenkungen von ihrer Bahn genöthigt; hierzu sind also auch neue Kräfte erforderlich. Diese Kräfte sind zweierlei Art, weil die fraglichen neuen Ablenkungen zweierlei Art sind. Betrachtet man nämlich das Element L des Ringes AGB als ein kurzes Stück LF der an L gelegten Tangente, so ist klar, dass dieses Stück, welches vor dem Kippen des Schwungrades sich in der Richtung der Tangente TL bewegte, sich nach einem unendlich kleinen Zeitintervalle, wo der Schwungring die Lage AG_1B annimmt, in der Richtung der Tangente TL_1 bewegen muss, dass dasselbe also erstens eine Ablenkung erleidet, welche einer Rotation um die Axe AB um den kleinen Winkel LPL_1 gleichkommt, und zweitens eine solche, welche einer Drehung in der Ebene LTL_1 um den Winkel LTL_1 entspricht.

Die erste dieser beiden Ablenkungen, welche für die Elemente bei G und G_1 am grössten und für die Elemente bei A und B null ist, erzeugt

Centrifugalkraft in den Richtungen PL normal zum Durchmesser AB oder äquivalente Tangentialspannung in der Ringlinie AGB, wird also durch die Cohäsion des Materials neutralisirt. Die zweite Ablenkung dagegen, welche für die Elemente bei G und G_1 null und für die Elemente bei A und B am stärksten ist, erfordert eine auf der Ebene AGB normal stehende Kraft, denn diese Ablenkung bezweckt Abweichung in der Ebene LTL_1, welche auf AGB normal steht.

Die zweite Ablenkung, da sie auf der Ringebene normal steht, kann offenbar nicht durch innere Kräfte erzeugt werden; es ist hierzu nothwendig eine äussere Kraft erforderlich. Da diese Kraft für die Elemente A und B am stärksten ist und für die gegen G und G' hin liegenden immer mehr bis zum Nullwerthe abnimmt, da ferner die in der Ringhälfte GBG' erforderlichen Kräfte den in der Hälfte $G'AG$ erforderlichen direct entgegengesetzt sind, so erkennt man, dass die Resultante aller letzteren Ablenkungskräfte ein Kräftepaar ist, dessen Axe in GG', nämlich in dem auf der Kippaxe AB normal stehenden Durchmesser liegt, wie es durch die Kräfte IM, KN dargestellt ist.

Man übersieht sofort, dass dieses Kräftepaar, da seine Axe auf der Axe AB, um welche es Bewegung erzeugt, normal steht, bei dieser Bewegung durchaus keine reelle, sondern nur imaginäre Arbeit verrichtet, wie es der constant bleibenden Rotationsgeschwindigkeit des Schwungrades auch ganz angemessen ist. In diesem Kräftepaare besteht die Gyralkraft des um AB kippenden Schwungringes. Um dieselbe zu berechnen, nehmen wir an, die Winkelgeschwindigkeit des kippenden Ringes um die Axe AB sei γ, also Winkel $LPL_1 = \gamma\, dt$. Setzen wir den Winkel $LCP = \psi$, so ist die Ablenkung des Theilchens L in der auf AGB normal stehenden Ebene in der Zeit dt, also der Winkel $LTL_1 = \gamma \cos\psi\, dt$, folglich pro Zeiteinheit $= \gamma \cos\psi$. Um ein materielles Theilchen L von der Bogenlänge $r\,d\psi$ oder vom Gewichte $w\,r\,d\psi$ (worin w das Gewicht pro Längeneinheit des Ringes bezeichnet), welches sich mit der Geschwindigkeit $v = \eta r$ bewegt, mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma \cos\psi$ pro Zeiteinheit aus seiner Bewegungsrichtung abzulenken, ist nach unseren früheren Untersuchungen (No. 2) eine Kraft normal zur Linie TL und zur Ringfläche von dem Betrage

$$f = \frac{w\,r\,d\psi}{g} \,.\, v \,.\, \gamma \cos\psi = \frac{w}{g}\, r^2 \eta \gamma \cos\psi\, d\psi$$

erforderlich.

Der Abstand oder der Hebelarm dieser in L wirkenden Kraft von der Linie GG' ist $CP = r \cos\psi$. Das Moment dieser Kraft in Beziehung zur Linie GG' ist daher $\frac{w}{g}\, r^3 \eta \gamma \cos^2\psi\, d\psi$. Bezeichnet man die für alle Theilchen des halben Ringes GAG' erforderliche Kraft mit F, ihr Moment in

Beziehung zur Linie GG' mit $\frac{1}{2}M$ und ihren Hebelarm von GG' aus mit a, so hat man

$$F = 2.\frac{w}{g}\,r^2\eta\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi = 2\,\frac{w}{g}\,r^2\eta\gamma$$

$$\tfrac{1}{2}M = 2.\frac{w}{g}\,r^3\eta\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\,d\psi = \frac{\pi}{2}\,\frac{w}{g}\,r^3\eta\gamma$$

$$a = \frac{\frac{1}{2}M}{F} = \frac{\pi}{4}\,r.$$

Das Moment des gesuchten Kräftepaares IM, KN, welches den mit der Umfangsgeschwindigkeit v rotirenden Schwungring AB um den Durchmesser AB zu drehen vermag, und welches zu dem Ende Drehung um die Linie GG' intendiren oder seine Axe in GG' haben muss, beträgt hiernach

$$M = \pi\,\frac{w}{g}\,r^3\eta\gamma.$$

Umgekehrt ist die Drehung des Schwungringes um die Linie AB, welche ein Kräftepaar vom Momente M, dessen Axe in GG' liegt, pro Zeiteinheit hervorbringt,

$$\gamma = \frac{g}{w}\,\frac{M}{\pi\,r^3\,\eta}.$$

Dieses Kräftepaar verrichtet bekanntlich keine reelle sondern nur imaginäre Arbeit.

11. Die imaginäre Arbeit eines Kräftepaares. Als imaginäre Arbeit eines Kräftepaares wie IM, KN, dessen Drehungsaxe GG' ist, betrachten wir das Product der Kräfte F in die Wege, welche deren Angriffspunkte A und B parallel zur Drehungsaxe GG' zurücklegen. Zerlegt man also den im Umfange des Ringes gemessenen kleinen Weg $v\,dt$, welchen die auf das Theilchen L wirkende Kraft f in dem Zeitelemente dt zurücklegt, in eine Componente $v\cos\psi\,dt$ parallel zu GG' und $v\sin\psi\,dt$ parallel zu AB, so ist $fv\cos\psi\,dt$ die imaginäre Arbeit der elementaren Kraft f. Die Summirung aller dieser elementaren Arbeiten giebt dasselbe Resultat, als wenn man sofort die imaginäre Arbeit der beiden Resultanten F aller elementaren Kräfte f nimmt. Da diese Resultanten im Abstande $a = \frac{\pi}{4}r$ vom Mittelpunkte C in der Linie CA und CB wirken, so ist die Geschwindigkeit ihrer Angriffspunkte normal zu CA oder parallel zu GG' gleich $\frac{\pi}{4}v$, mithin die imaginäre Arbeit des ganzen Kräftepaares im Zeitelemente dt, wenn man diese Arbeit pro Zeiteinheit mit I bezeichnet,

$$I\,dt = 2F.\frac{\pi}{4}\,v\,dt = \pi\,\frac{w}{g}\,r^3\eta^2\gamma\,dt = \eta M\,dt,$$

woraus $I = \eta M$ folgt. Die imaginäre Arbeit des Kräftepaares im Zeitelement dt ist also gleich dem Momente desselben, multiplicirt mit dem Elemente ηdt der Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes.

Bezeichnet man die lebendige Kraft des Schwungringes mit L, setzt also

$$L = 2\pi \frac{w}{g} r v^2 = 2\pi \frac{w}{g} r^3 \eta^2,$$

so erhält man

$$\gamma\, dt = \frac{I\, dt}{\frac{1}{2} L} = \frac{M}{\frac{1}{2} L} \eta\, dt,$$

und hieraus auch

$$\gamma = \frac{I}{\frac{1}{2} L},$$

oder

$$\frac{\gamma}{\eta} = \frac{M}{\frac{1}{2} L}.$$

Die letztere interessante Gleichung sagt aus, dass das Verhältniss der Drehung oder Kippung des Schwungringes pro Zeiteinheit um die Linie AB zur Winkelgeschwindigkeit des Schwungringes gleich dem Verhältnisse des Momentes des um die Axe GG' wirkenden Kräftepaares zu der halben lebendigen Kraft des Ringes ist.

Für eine kleine Drehung $\gamma\, dt$, welche im Zeitelemente dt erfolgt, hat man $\gamma\, dt = tang\,(\gamma\, dt)$, also auch

$$tang\,(\gamma\, dt) = \frac{\eta M\, dt}{\frac{1}{2} L}.$$

Beachtet man nun, dass zwei Kräftepaare in der Weise zusammengesetzt werden, dass man auf ihren Axen Längen abschneidet, welche die Momente der Kräftepaare darstellen, und alsdann die Axenlängen wie zwei einfache Componenten nach dem Parallelogramme der Kräfte zusammensetzt, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung folgende beachtenswerthe Beziehung. Wenn man auf der Normalen oder Axe des Ringes AB die Länge CD gleich $\frac{1}{2}L$ oder gleich der halben lebendigen Kraft macht, also hierdurch die Axenlänge eines im Ringe vorhandenen Kräftepaares von dem Momente $\frac{1}{2}L$ darstellt, alsdann in der Linie CG', welche in der Ebene des Ringes auf AB normal steht, die Länge CQ gleich $\eta M\, dt$ macht, also hierdurch die Axenlänge des die Drehung des Ringes um die Linie AB bewirkenden Kräftepaares von dem Momente $\eta M\, dt$ darstellt, so ergiebt die Diagonale CR des über CD und CQ entworfenen Rechteckes die Axenrichtung und das Moment des aus diesen beiden Kräftepaaren resultirenden Kräftepaares

und der Winkel DCR ist gleich γdt oder bezeichnet die stattgehabte Drehung des Ringes um die Linie AB. Errichtet man also auf RC eine Normalebene AG_1B, so bezeichnet dieselbe die Stellung der Ringfläche nach der Zeit dt, während CR die Stellung der Normalen des Ringes angiebt.

Mit diesem Satze ist die Grundanschauung, von welcher ich in dem Artikel im 25. Theile von Grunert's Archiv der Mathematik und Physik ausgegangen bin, auf ihre mechanischen Prinzipien zurückgeführt.

12. Verallgemeinerung der Formeln. Die vorstehenden, für einen Schwungring entwickelten Formeln lassen sich leicht für ein Schwungrad von beliebiger erzeugender Curve verallgemeinern. Geht man zunächst von dem Schwungringe zu einer Schwungscheibe über, so wird die einseitige Kraft des Kräftepaares, welches die Gyralkraft darstellt, nach dem eben entwickelten, auf den elementaren Ring bezüglichen Werthe von F, wenn jetzt w das Gewicht pro Flächeneinheit der Scheibe bezeichnet,

$$F = \int_0^r 2\frac{w}{g} r^2 \eta\gamma dr = \tfrac{2}{3}\frac{w}{g} r^3 \eta\gamma,$$

und das Moment derselben wird nach dem vorstehenden Werthe von M

$$M = \int_0^r \pi\frac{w}{g} r^3 \eta\gamma dr = \frac{\pi}{4}\frac{w}{g} r^4 \eta\gamma,$$

so dass der Abstand der Kraft F vom Mittelpunkte der Scheibe

$$a = \frac{\frac{1}{2}M}{F} = \tfrac{3}{16}\pi r$$

ist.

Verwandelt sich jetzt die Scheibe in ein Schwungrad, dessen erzeugende Curve die Gleichung $r = f(x)$ hat, so ergiebt sich, wenn w das Gewicht pro Volumeinheit bezeichnet, für die Kraft f und das Moment M

$$F = \tfrac{2}{3}\frac{w}{g}\eta\gamma\int r^3 dx,$$

$$M = \frac{\pi}{4}\frac{w}{g}\eta\gamma\int r^4 dx.$$

Hiernach und nach den obigen Formeln für das Trägheitsmoment T und die lebendige Kraft L des Schwungrades ist auch

$$M = \frac{\gamma}{\eta}\frac{L}{2} = \eta\gamma\frac{T}{2},$$

oder es besteht für die allgemeinste Form des Schwungrades die Beziehung

$$\frac{\gamma}{\eta} = \frac{M}{\frac{1}{2}L}.$$

Die imaginäre Arbeit des Kräftepaares, dessen Moment M ist, pro Zeiteinheit findet sich auch hier zu $I = \eta M$, so dass $\gamma = \frac{I}{\frac{1}{2}L}$ gesetzt werden kann.

Es ist zu erinnern, dass zum Kippen eines Schwungrades ausser der Gyralkraft, deren Axe in GG' liegt, noch Centrifugalkraft rings um die Linie AB nach Maassgabe der Umdrehungsgeschwindigkeit γ entsteht.

Um die Richtungen der Drehung um Axen genau zu präzisiren, ist es gut, sich von den beiden ins Unendliche sich erstreckenden Hälften einer Drehungsaxe nur die eine Hälfte, welche auf der einen Seite der Drehungsebene errichtet ist, zu vergegenwärtigen. Denkt man sich in diese Axe einen Beobachter, mit den Füssen auf die Drehungsebene gestellt, so soll diejenige Drehung eine positive heissen, welche von rechts nach links erfolgt, auch soll diejenige Hälfte der Drehungsaxe, von welcher die Drehung als eine solche von rechts nach links erscheint, die positive Axenhälfte oder Halbaxe heissen.

Hieraus ist klar, dass, wenn CD die positive Axenhälfte des Schwungrades ist, ein Kräftepaar, dessen positive Axenhälfte CG' ist, eine Drehung um eine Axe erzeugt, deren positive Hälfte CA ist.

Das wesentlichste, im Vorstehenden gewonnene Resultat besteht darin, dass ein Schwungrad AB (Fig. 11), dessen Rotationsaxe DE ist, sich ohne Anbringung äusserer Kräfte nicht um eine auf dieser Axe normal stehende Linie AB drehen kann. Diese äuseren Kräfte müssen ein Kräftepaar, die Gyralkraft, formiren, dessen Axe GG' sowohl normal auf der Kippaxe AB, als auch normal auf der Schwungaxe DE steht. Geht die Kippaxe durch den Schwerpunkt C des Schwungrades, so bleibt dieser Punkt an seinem Orte und es findet nur Bewegung um denselben statt.

Die Veränderungen und Bewegungen eines Schwungrades, welche durch irgend ein Kräftepaar entstehen, welches wir die Gyralkraft nennen, insofern seine Drehungsaxe normal auf der Drehungsaxe des Schwungrades steht, lassen sich leicht auf folgende Weise vergegenwärtigen. Wenn CD die positive Halbaxe des Schwungrades und $AGBG'$ dessen Drehungsebene, wenn ferner CG' die positive Halbaxe des Kräftepaares oder der Gyralkraft, also die darauf normal stehende Ebene $BAFD$ die Drehungsebene dieser Kraft ist, so liegt in der Durchschnittslinie AB jener beiden Drehungsebenen die Kippaxe des Schwungrades. Verhält sich ausserdem die unendlich kleine Länge CQ zu CD, wie $\eta M\,dt$ zu $\frac{1}{2}L$, so stellt die Diagonale CR des Rechteckes QCD die Richtung dar, welche die positive Halbaxe des Schwungrades nach dem Zeitelemente dt annimmt, so dass also die Drehungsebene AG_1B des Schwungrades nach dieser Zeit normal auf CR steht oder das Rad in der Richtung GG_1G' um die Axe CA kippt. In endlicher Zeit beschreibt die Axe CD des Schwungrades eine Kegelfläche CDC' um eine in der Drehungsebene der Gyralkraft liegende Axe DF, welche für den Fall einer in jeder Hinsicht gleichförmigen Bewegung so liegt, dass alle auf das Schwungrad wirkenden Kräfte stets dieselbe Neigung gegen dieselbe behalten.

13. Drehung des Schwungrades um eine schiefe Axe. Betrachten wir jetzt den allgemeineren Fall, wo die Axe CD eines Schwungrades AB um eine gegen sie geneigte Linie FD (Fig. 13) gedreht, also in einer Kegelfläche herumgeführt werden soll. Die Winkelgeschwindigkeit um diese Axe sei gleich α. Es leuchtet ein, dass, wenn ausser der Centrifugalkraft gegen die Axe CD keine äusseren Kräfte auf das Schwungrad angebracht werden, die Bewegung so erfolgt, dass der Schwerpunkt C einen normalen Kreis CC' um die Axe FD beschreibt, während die Axe CD des Schwungrades stets ihre Richtung im Raume beibehält*) und das Rad mit constanter Winkelgeschwindigkeit η um seine Axe rotirt. Kommt also der Punkt C nach H, so steht die Axe des Schwungrades HI parallel zu CD. Soll nun die letztere Axe um FD rotiren, so muss das Schwungrad während der vorstehenden einfachen Rotation noch kippen, und zwar um die Linie AB, d. h. um die Linie, in welcher die Ebene $AGBG'$ den Kegel FCC' berührt, den die auf der Schwungradaxe DC normal stehende, in der Ebene CDF liegende Linie FC beschreibt, eine Linie, welche mithin unaufhörlich ihre Lage im Raume verändert. Dieses Kippen des Schwungrades hat zur Folge, dass die Axe HI in die Lage HD übergeht, dass also auch die Schwungradaxe einen Kegel DCC' beschreibt.

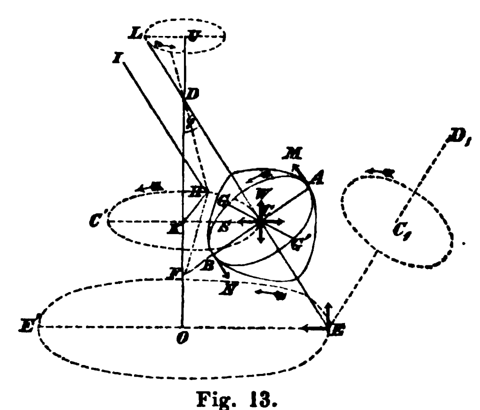


Fig. 13.

Wenn KD die positive Hälfte der Axe ist, um welche das Schwungrad, dessen positive Axenhälfte CD ist, gedreht werden soll, so muss das Schwung-

*) Es muss nachdrücklich hervorgehoben werden, dass die verschiedenen Punkte, wie A, B eines Körpers AB, welcher so um die Axe FD rotirt, dass er im absoluten Raume stets dieselbe Stellung behält, sämmtlich Kreise von demselben Radius beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise nehmen verschiedene Oerter im Raume ein und nach diesen Oertern sind die Centrifugalkräfte gerichtet, welche den einzelnen Punkten des Körpers AB zukommen. Es ist nun leicht zu übersehen, dass die Resultante aller dieser elementaren Centrifugalkräfte nicht blos gleich der Centrifugalkraft ist, welche die im Schwerpunkte C concentrirte Masse des ganzen Körpers erzeugen würde, sondern dass auch diese Resultante durch den Schwerpunkt C geht und in der Linie KC liegt. Demgemäss findet keine Tendenz zur Verdrehung des Körpers statt; derselbe behält vielmehr fortwährend seine absolute Stellung bei. Ganz anders ist es, wenn der Körper AB so um FD rotiren soll, dass er seine relative Stellung gegen die Umdrehungsaxe FD beibehält; alsdann müssen besondere Kräfte mitwirken, deren Bestimmung eben einen Gegenstand unserer Untersuchung ausmacht.

rad um die positive Axenhälfte CA gekippt werden. Diese Drehung um CA betrage in der Zeiteinheit die Winkelgrösse γ, der Abstand KC des Schwerpunktes des Schwungrades von der Axe KD sei R und der Neigungswinkel LDU zwischen den positiven Hälften der Drehungsaxen KD und CD sei φ. Im Zeitelemente dt beschreibt der Schwerpunkt C den Bogen $CH = R\alpha\, dt$. In derselben Zeit muss die Axe des Schwungrades sich um den Winkel HDC drehen oder das Schwungrad muss um diese Winkelgrösse, welche $= \gamma\, dt$ ist, kippen. Da $DC = \frac{R}{\sin\varphi}$ ist, so ist $CH = \frac{R}{\sin\varphi} \cdot \gamma\, dt$. Setzt man diesen Werth dem vorhergehenden für CH gleich, so ergiebt sich die Beziehung

$$\gamma = \alpha \sin\varphi.$$

Zur Aufrechthaltung der vorstehenden, in jeder Hinsicht gleichförmigen Bewegung des Schwungrades ist also Centrifugalkraft gegen die Radaxe CD oder Tangentialspannung in den Ringen $AGBG'$ nach Maassgabe der Rotationsgeschwindigkeit η, ferner Centrifugalkraft gegen die Axe AB, und zwar in allen normalen Richtungen rings herum, bestimmt durch die Umdrehungsgeschwindigkeit $\gamma = \alpha \sin\varphi$ um diese Axe AB, also abhängig von der Form der erzeugenden Curve DAE (Fig. 11) und der Lage des Punktes C in der Axe DCE des Schwungrades, ausserdem Centrifugalkraft gegen die Axe FD nach Maassgabe der Rotationsgeschwindigkeit α, also eine Kraft $\frac{W}{g}\alpha^2 R$ in der Richtung KC, alsdann eine verticale Kraft W von unten nach oben im Schwerpunkte C, insofern das Schwungrad der Schwere unterworfen ist, endlich aber eine Gyralkraft nöthig, welche sich als ein Kräftepaar vom Momente

$$M = \tfrac{1}{2}\eta\gamma T = \tfrac{1}{2}\alpha\eta T \sin\varphi$$

darstellt, dessen Axe CG' auf der Axe CD des Schwungrades und auf der Linie AF, also auf der Ebene DCF normal steht, so dass diese Wirkungsaxe der Gyralkraft gegen das Schwungrad eine bestimmte, im absoluten Raume aber eine veränderliche Lage annimmt, indem sie sich mit um die Axe FD dreht. Dieses Kräftepaar bewirkt eine unausgesetzte Drehung oder ein Kippen des Schwungrades um die Axe CA, welche ebenfalls um die Axe FD rotirt, und hierbei verrichtet dasselbe keine reelle, sondern imaginäre Arbeit.

14. Discussion der vorstehenden Formel. Es ist klar, dass die Centrifugalkräfte um die Axe CD des Schwungrades nach Maassgabe der Umdrehungsgeschwindigkeit η durch die Cohäsion des Materials des Schwungrades aufgehoben werden, also zu ihrer Neutralisation keiner äusseren Kräfte bedürfen.

Die Centrifugalkraft gegen die Axe AB nach Maassgabe der Umdrehungsgeschwindigkeit γ wird durch die Cohäsion des Materials in dem Falle neutralisirt, dass der Punkt C der Schwerpunkt des Schwungrades ist, was

wir voraussetzen. (Die Form des Schwungrades als Revolutionskörpers für die Axe CD vernichtet auch bei der Drehung um AB jede Tendenz zur Verdrehung der Linie AB, indem die Resultante der bei dieser Drehung entstehenden Centrifugalkräfte durch den Schwerpunkt C geht.)

Die Centrifugalkraft um die Axe FD nach Maassgabe der Rotationsgeschwindigkeit α würde sich durch die Festigkeit der Bänder des Systems ebenfalls aufheben, wenn der Schwerpunkt C des Schwungrades mit der Axe FD in feste Verbindung gesetzt wäre, sonst muss dies nothwendig durch eine besondere Kraft S geschehen, welche den Werth

$$S = \frac{W}{g} \alpha^2 R$$

hat, und (wie die Anziehung der Himmelskörper) in der Richtung CK wirkt.

Ist das Schwungrad der Schwere unterworfen, so muss sein Gewicht W durch eine verticale Kraft, welche von unten nach oben durch C wirkt, aufgehoben werden.

Endlich ist eine Gyralkraft vom Momente M nothwendig, deren Axe die variabele Stellung CG' annimmt und aus zwei Kräften besteht, welche, wie AM und BN normal zur Ebene ABG wirken.

Je nach der Verbindung des Schwungrades mit der Axe FD lassen sich die vorstehenden Kräfte mit einander und mit den Widerständen der Stützpunkte zu Specialsystemen zusamensetzen, welche wir weiter unten näher betrachten werden.

Im Allgemeinen ersieht man aus dem analytischen Werthe des Momentes M der Gyralkraft, dass ein mit bestimmter lebendiger Kraft oder mit bestimmter Umdrehungsgeschwindigkeit rotirendes Schwungrad vermittelst eines Kräftepaares von bestimmtem Momente M in einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit α um die Axe FD nur dann erhalten werden kann, wenn seine Axe CD sich unter einem bestimmten Winkel φ gegen die Drehungsaxe FD neigt, dass also unter sonst gleichen Umständen eine Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit α mit einer Veränderung des Neigungswinkels φ und umgekehrt verbunden ist.

Ehe wir weiter gehen, machen wir darauf aufmerksam, dass das Schwungrad AB sich so um die Axe FD drehen kann, dass seine eigene Axe CD die Kegelfläche DCC' beschreibt, ohne dass das Schwungrad selbst irgend eine Drehung um seine Axe CD macht, so dass also $\eta = 0$ ist. In diesem Falle findet doch eine scheinbare Drehung des Schwungrades statt; denn ein materieller Punkt A dieses Rades, welcher soeben den höchsten Ort der Ebene AGB einnimmt, weicht immer mehr und mehr nach G' hin ab, kommt endlich in den niedrigsten Ort B und steigt darauf wieder nach A hin auf.

Die ideelle oder geometrische Linie AB, um welche das Schwung-

rad kippt, und welche die Kegelfläche FCC' beschreibt, rotirt also um die Axe CD rechtläufig in der Richtung AGB, ohne dass die materielle Linie des Schwungrades, welche momentan die Lage AB einnimmt, eine Drehung um die Axe CD besässe.

Bezeichnen wir diese scheinbare Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades um seine Axe in negativer Richtung $AG'B$ oder die Winkelgeschwindigkeit der ideellen Kippaxe AB in positiver Richtung AGB mit β, so ist, wenn der kleine Drehungswinkel CKH um die Axe FD gleich $\alpha\, dt$ gesetzt wird, der Winkel $CFH = \beta\, dt$. Da man nun $CH = \alpha R$ und wegen $CF = \frac{R}{\cos\varphi}$ auch $CH = \beta . \frac{R}{\cos\varphi}$ hat, so findet sich

$$\beta = \alpha \cos\varphi = \frac{\gamma}{\tang\varphi}.$$

Unter α kann man immer ebenso wohl die wirkliche Umdrehungsgeschwindigkeit des Schwerpunktes C um die Axe FD, als auch die Umdrehungsgeschwindigkeit des ideellen oder geometrischen Punktes verstehen, welcher wie A oder B eine bestimmte relative Lage gegen die Axe FD annimmt.

Denkt man sich den Körper AB auf eine Kreisfläche $AGBG'$ reducirt, deren Mittelpunkt C in der Axe FD liegt (Fig. 14), so entspricht der vorstehende Fall dem Wälzen der Ebene AB auf der Kegelfläche CDD'. Beim Wälzen findet also durchaus keine wirkliche, sondern nur scheinbare Drehung um die Normale CD statt und die Bewegung reducirt sich auf ein fortgesetztes Kippen um den variabelen Durchmesser AB.

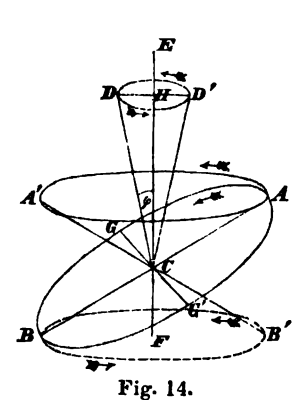


Fig. 14.

Soll der materielle Punkt A des Schwungrades (Fig. 13) bei der Drehung um die Axe FD stets oben bleiben, soll also der Revolutionskörper AB einfach um die Axe FD rotiren, worin die Forderung liegt, dass nicht blos die Axe CD dieses Körpers, sondern ein jeder seiner Punkte dieselbe relative Stellung gegen die Axe FD behält, so muss der Körper nothwendig Rotation um die Axe CD besitzen, und zwar muss diese Rotation den Werth

$$\eta = \beta = \alpha \cos\varphi = \frac{\gamma}{\tang\varphi}$$

haben.

In diesem Ausdrucke und in dem Werthe $\gamma = \alpha \sin\varphi$ liegt das interessante Resultat, dass, wenn ein Körper AB mit der Winkelgeschwindigkeit α einfach um eine Axe FD rotiren, also dabei seine relative Lage gegen die Drehungsaxe behalten soll, er

nothwendig zwei verschiedene Drehungen $\eta = \alpha \cos\varphi$ und $\gamma = \alpha \sin\varphi$ um die beiden rechtwinklig auf einander stehenden Axen CD und AB besitzen muss, und dass die Winkelgeschwindigkeiten um diese beiden Axen die rechtwinkligen Componenten der Winkelgeschwindigkeit α um die Axe FD sind, gegen welche Componenten sich α als Diagonale unter dem Winkel φ neigt.

Untersuchen wir jetzt die dynamischen Bedingungen für die Möglichkeit der beiden eben charakterisirten Bewegungen.

Damit ein Körper (und zwar ein Revolutionskörper mit der Axe CD) sich nach Fig. 14, nämlich so bewegt, dass sich die Ebene $AGBG'$ um einen Kegel ACA' wälzt, darf er um die Normale CD dieser Ebene keine Winkelgeschwindigkeit haben; es muss also $\eta = 0$ sein. Hierdurch wird aber auch $M = 0$. Da nun in diesem Falle auch $R = 0$, also $S = 0$ ist, so folgt, dass weder Centrifugalkraft S um die Axe CE des Kegels stattfindet, noch Gyralkraft M erforderlich ist, um diese Wälzbewegung, bei welcher sich der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit $\gamma = \alpha \sin\varphi$ um die variabele Linie AB dreht, während er mit der Winkelgeschwindigkeit α eine scheinbare Drehung um CE und mit der Winkelgeschwindigkeit $\beta = \alpha \cos\varphi$ eine scheinbare rückläufige Bewegung um CD vollführt, aufrecht zu erhalten. Diese Bewegung des Wälzens setzt sich also, wenn sie einmal eingeleitet ist, gleichförmig ins Unendliche fort.

Ganz anders verhält sich die einfache Rotation desselben Körpers um die Axe CE, d. h. die Drehung mit constanter relativer Stellung aller Punkte des Körpers gegen die Axe CE. Diese Rotation verlangt Drehung um die Normale CD der Ebene AB mit der Geschwindigkeit $\eta = \alpha \cos\varphi$. Für diesen Fall wird $M = \frac{1}{2} \alpha^2 T \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{4} \alpha^2 T \sin 2\varphi$. Eine solche einfache Rotation mit der Geschwindigkeit α um die Axe CE ist hiernach nur möglich, wenn fortwährend Gyralkraft oder ein Kräftepaar thätig ist, dessen Axe in CG' liegt und dessen Moment den eben berechneten Werth hat. Diese Bewegung kann sich also nicht von selbst aufrecht erhalten; ein Körper, welcher in eine solche Bewegung versetzt wäre und darauf sich selbst überlassen bliebe, würde seine relative Stellung gegen die Axe CE fortwährend ändern.

Nur für die beiden besonderen Fälle, wo $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^0$ würde, verschwände die Gyralkraft, d. h. nur dann, wenn die Axe CD in die Umdrehungsaxe CE fiele oder wenn sie darauf normal stände, könnte sich die Rotation von selbst fortsetzen.

Diese Gesetze in Beziehung auf Rotation des Körpers AB um eine Axe gelten auch noch für die in Fig. 13 dargestellten Verhältnisse, wo der Schwer-

punkt C um $CK = R$ von der Axe FD entfernt liegt. Es tritt alsdann nur noch die Centrifugalkraft $S = \frac{W}{g} \alpha^2 R$ auf und macht eine äquivalente Anziehungkraft gegen K hin erforderlich. Hat man in diesem Falle $\alpha = 0$ oder auch $\alpha = 90^0$, so entspricht dies dem Falle der Bewegung des Mondes um die Erde, welche mithin keine Gyralkraft erfordert, sondern sich von selbst fortsetzt, indem die Centrifugalkraft S durch die Anziehung der Erde neutralisirt wird.

Fragt man jetzt nach der allgemeinen Bedingung, unter welcher sich ein um seine Axe CD rotirendes Schwungrad um ein andere Axe FD (Fig. 13) drehen kann, ohne Gyralkraft zu bedürfen, so giebt der Ausdruck von M nur die drei Antworten: erstens, wenn $\alpha = 0$, d. h. wenn gar keine Drehung um FD stattfindet; zweitens, wenn $\eta = 0$, d.h. wenn das Schwungrad nicht um seine Axe CD rotirt, also nur ein Kippen um die Linie AB und eine scheinbare rückläufige Bewegung des Schwungrades um seine Axe vom Betrage $\beta = \alpha \cos \varphi$ stattfindet; drittens, wenn $\varphi = 0$ ist, also die Axe CD des Schwungrades zur Axe FD parallel steht.

Für eine constante Umwälzungsgeschwindigkeit η des Schwungrades wird die Gyralkraft am grössten, wenn $\varphi = 90^0$ ist. Ein mit gegebener Geschwindigkeit um seine Axe schwingendes Rad ist also am schwierigsten um eine Axe FD zu drehen, wenn die Schwungradaxe CD normal auf der Drehungsaxe FD steht.

Für $\varphi = 45^0$ nimmt die Gyralkraft eines einfach um die Axe FD rotirenden Körpers, für welchen also $\eta = \alpha \cos \varphi$ ist, ihren Maximalwerth an. Ein Revolutionskörper ist also am schwierigsten um eine Axe FD einfach zu drehen, wenn sich seine Axe unter 45 Grad gegen die Drehungsaxe neigt.

Anwendungen.

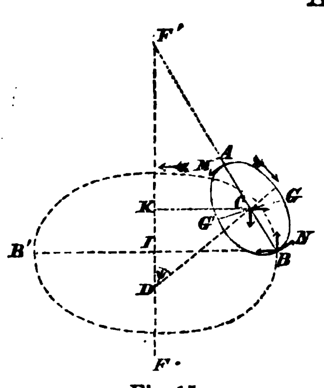


Fig. 15.

15. Das rollende Rad. Betrachten wir jetzt das auf einer horizontalen Ebene BB' rollende Rad $AGBG'$ (Fig. 15). Die Axe CD des Rades neige sich unter dem spitzen Winkel $\psi = CDF'$ gegen die Verticale DF' oder die Ebene des Rades unter demselben Winkel gegen den Horizont. Wenn dieses Rad in dem Kreise BB' rollt, befindet es sich in der Lage des in Fig. 13 dargestellten Schwungrades, dessen Axe CD so weit aufgerichtet ist, dass der Winkel $CDF = \varphi$ stumpf, also $= 180^0 - \psi$ ist. Zur Erhaltung dieser Bewegung ist Gyralkraft nöthig, deren positive Axe in CG' fällt,

so dass diese Kraft durch ein Kräftepaar wie AM, BN dargestellt werden kann. Man erkennt sofort, dass die durch C nach unten wirkende Schwere mit dem in B nach oben wirkenden Widerstande der horizontalen Ebene, so weit dieses Kräftepaar nicht durch das Kräftepaar der in C nach aussen wirkenden Centrifugalkraft mit dem in B nach innen wirkenden Widerstande aufgehoben wird, im Stande ist, die erforderliche Gyralkraft zu erzeugen.

Bei der Winkelgeschwindigkeit η ist die Umfangsgeschwindigkeit des Rades vom Radius r gleich ηr. Da das Rad jedoch schief steht, so ist der Weg, welchen das Rad beim Rollen in dem Kreise BB' in der Zeiteinheit zurücklegt, keineswegs gleich ηr, sondern grösser, und zwar ist er um die scheinbare Geschwindigkeit βr grösser, entsprechend der scheinbaren Rotation β des Rades, welche aus der Drehung um die Linie AB entspringt. Demnach durchläuft das Rad in der Zeiteinheit den Weg $(\eta+\beta)r = (\eta + \alpha \cos\psi)r$ auf dem Umfange des Kreises BB'. Da der Abstand CK des Schwerpunktes C von der Axe DF' mit R bezeichnet, also der Radius des letzteren Kreises gleich $R + r\cos\psi$ ist, und dieser Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit α des Schwerpunktes C um die Axe DF' durchlaufen wird, so hat man für jenen Weg auch den Ausdruck $\alpha(R + r\cos\psi)$. Setzt man beide Werthe einander gleich, so ergiebt sich die einfache Beziehung

$$\alpha R = \eta r.$$

Da diese Beziehung aussagt, dass die Umlaufsgeschwindigkeit des Schwerpunktes C gleich ist der Laufgeschwindigkeit, welche das Rad zeigen würde, wenn es in aufrechter Stellung und in gerader Linie rollte, so ist dieselbe für die Mechanik des rollenden Rades deshalb von Wichtigkeit, weil sie lehrt, dass, wenn das rollende Rad schief zu stehen kommt und in Folge dessen statt der geraden eine Kreisbahn durchläuft, die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes doch immer dieselbe bleibt.

Das Kräftepaar der Schwere W in C und des verticalen Widerstandes in B hat das Moment $W.r\cos\psi$ und das Kräftepaar der Centrifugalkraft $\frac{W}{g}\alpha^2 R$ in C und des horizontalen Widerstandes in B hat das Moment $\frac{W}{g}\alpha^2 R.r\sin\psi$. Beide wirken einander entgegen; ihre Differenz $rW(\cos\psi - \frac{\alpha^2 R}{g}\sin\psi)$ muss also gleich dem Momente der Gyralkraft, nämlich gleich $\frac{1}{2}\alpha\eta T\sin\varphi = \frac{1}{2}\alpha\eta T\sin\psi$ sein. Dies giebt die Gleichung

$$rW\left(\cos\psi - \frac{\alpha^2 R}{g}\sin\psi\right) = \tfrac{1}{2}\alpha\eta\, T\sin\psi.$$

Sieht man die Rotationsgeschwindigkeit η des Rades um seine Axe oder auch die Laufgeschwindigkeit $\eta r = \alpha R$ des Rades als eine ursprünglich gegebene Grösse an, so hat man zwischen den vier Grössen η, α, ψ und R zwei Gleichungen; es kann also noch eine dieser Grössen willkürlich

bestimmt werden, die übrigen beiden finden sich alsdann als Functionen der andern beiden, stehen also auch unter sich in einem Abhängigkeitsverhältnisse. Eliminirt man zwischen jenen beiden Gleichungen die Grösse R, so ergiebt sich

$$\alpha \, tang \, \psi = \frac{r W}{\eta\left(\frac{1}{2} T + \frac{r^2 W}{g}\right)}.$$

Je nachdem man ψ durch α oder α durch ψ bestimmen will, hat man

$$tang \, \psi = \frac{r W}{\alpha \eta\left(\frac{1}{2} T + \frac{r^2 W}{g}\right)},$$

$$\alpha = \frac{r W}{\eta\left(\frac{1}{2} T + \frac{r^2 W}{g}\right) tang \, \psi}.$$

Für $\psi = 90^0$ ist $\alpha = 0$. Bei verticaler Stellung kann also das Rad nur in gerader Linie rollen. Irgend eine schiefe Stellung des Rades nöthigt dasselbe aber zu einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit α oder zu einer Kreisbahn.

Wegen $\alpha R = \eta r$ ist

$$R = \eta^2 r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{T}{r^2 W} + \frac{1}{g}\right) tang \, \psi.$$

Einer jeden schiefen Stellung des Rades entspricht mithin auch ein bestimmter Kreis, in welchem das Rad rollt, und umgekehrt kann ein bestimmter Kreis nur mit einer bestimmten Stellung des Rades durchlaufen werden. Dieser Kreis und diese Stellung sind übrigens von der Rotationsgeschwindigkeit η oder von der Laufgeschwindigkeit $\eta r = \alpha R$ abhängig, so dass derselbe Kreis mit verschiedener schiefer Stellung des Rades durchlaufen werden kann, wenn die Laufgeschwindigkeit eine andere ist.

Bei constanter Lauf- oder Rotationsgeschwindigkeit des Rades wachsen und fallen R und $tang \, \psi$ mit einander; je schiefer also das Rad steht, desto kleiner wird der Radius des Laufkreises, desto grösser aber wird nach der Formel für α die Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt dieses Kreises (wie es auch dem Constantbleiben der Laufgeschwindigkeit $\alpha R = \eta r$ des Schwerpunktes entspricht). Für das horizontal werdende Rad (oder für $\psi = 0$) wird also der Radius R ebenfalls gleich null, aber die Winkelgeschwindigkeit α unendlich gross. Das letztere Resultat enthält die Erklärung der auffallenden Erscheinung, welche ein rollendes Rad (namentlich in Form eines Geldstückes auf ebener Fläche) beim Umfallen darbietet, indem es nahe vor dem Eintritte der Ruhe mit ausserordentlich grosser Winkelgeschwindigkeit um die Verticale schwingt, was sich durch den Ton, der

hierbei in Folge der raschen Affectionen der Fläche entsteht, sehr bemerkbar macht.

Das wesentliche Ergebniss der vorstehenden Entwickelung besteht aber darin, dass die Schwere, welche sich auf ein schief stehendes rollendes Rad äussert, durchaus nicht das Umfallen des Rades, selbst nicht in noch so langer Zeit, auch nicht einmal ein tieferes Niedersinken des Rades, sondern ein fortdauerndes gleichförmiges Rollen desselben im Kreise bei constant bleibender Neigung bewirkt, indem sich die Schwere zur Gyralkraft gestaltet. Das factische Niederfallen des Rades ist lediglich eine Folge des allmäligen Erlöschens der lebendigen Kraft oder der Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit η vermöge der Reibung und des Luftwiderstandes. In jedem Zustande der Bewegung gelten aber die vorstehenden Formeln; das factische Niederfallen ist daher mit den zuletzt beschriebenen Erscheinungen verbunden. Der letzte Act ist ein Ausgleiten auf der Laufflächc, welches erfolgt, sobald die Neigung des Rades so schräg wird, dass die Resultante des Widerstandes der Lauffläche die Grenze des Reibungswinkels überschreitet.

Hiernach begreift man auch, warum ein rollendes Rad auf schiefer Ebene nicht umfällt, sondern in einem Curvenbogen abwärts läuft.

Beachtenswerth ist noch, dass, wenn man die Höhe IK des Schwerpunktes C über der horizontalen Ebene BB' mit h bezeichnet, $h = \frac{R}{tang\,\psi}$, also

$$h = \eta^2 r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{T}{r^2 W} + \frac{1}{g} \right)$$

ist. Hiernach erscheint die Höhe des Schwerpunktes des im Kreise rollenden Rades lediglich als eine Function der Rotationsgeschwindigkeit η oder der Laufgeschwindigkeit ηr.

16. Der Kreisel. Denkt man sich in Fig. 13 die Axe CD des Schwungrades AB rückwärts bis E auf eine horizontale Ebene verlängert, so hat man einen Kreisel vor sich.

Die Centrifugalkraft wirkt in entgegengesetzter Richtung wie die Schwere, indem beide in C ihren Angriffspunkt haben und mit den Widerständen des Stützpunktes E der Axe CE Kräftepaare bilden, welche nach entgegengesetzter Seite drehen. Die Schwere wirkt positiv um die Axe CG' und erzeugt die erforderliche Gyralkraft. Während der Abstand CK des Schwerpunktes C von der Drehungsaxe DF wie früher mit R bezeichnet wird, sei die Länge CE der Axe des Kreisel gleich b.

Das Moment des Kräftepaares der Schwere ist $W.b\sin\varphi$. Das Moment

der Centrifugalkraft $\frac{W}{g}\alpha^2 R$ ist $\frac{W}{g}\alpha^2 R.b\cos\varphi$. Die Differenz beider muss gleich dem Momente der Gyralkraft sein, man hat also

$$b\,W\left(\sin\varphi-\frac{\alpha^2 R}{g}\cos\varphi\right)=\tfrac{1}{2}\alpha\eta\,T\sin\varphi.$$

Alle unsere Untersuchungen drehen sich um die möglichen Fälle einer in jeder Hinsicht gleichförmigen Bewegung; es ist also die Einwirkung von Kräften, welche reelle Arbeit verrichten, ausgeschlossen, mithin die Constanz der lebendigen Kraft der bewegten Massen eine wesentliche Bedingung. Da nun die Rotationsgeschwindigkeit η des Schwungrades, also dessen lebendige Drehungskraft, stets constant bleibt, so muss auch dessen lebendige Fortschrittskraft, folglich die Geschwindigkeit αR seines Schwerpunktes, als eine constante Grösse vorausgesetzt werden. Setzen wir daher

$$\alpha R=c,$$

so ergiebt die vorhergehende Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{c}{g\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\eta T}{b W}\right)}$$

$$\alpha=\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\eta T}{bW}+\frac{c}{g\operatorname{tang}\varphi}}.$$

Ausserdem ist

$$R=\frac{c}{\alpha}=c\left(\frac{1}{2}\frac{\eta T}{bW}+\frac{c}{g\operatorname{tang}\varphi}\right).$$

Aus diesen Formeln erkennt man, dass, sowie der Kreisel schief zu stehen kommt, die Schwere ihn nicht umwirft, sondern mit der Winkelgeschwindigkeit α im Kreise EE' herum treibt. Diese Winkelgeschwindigkeit α und auch der Radius R des Kreises, welchen der Schwerpunkt C durchläuft, hängt von dem Neigungswinkel φ der Axe des Kreisels gegen die Verticale ab; je schiefer sich der Kreisel stellt, oder je grösser φ wird, desto grösser wird auch α, desto rascher läuft also der Kreisel im Kreise herum, desto kleiner aber wird der Radius R dieses Kreises.

Ausserdem hängen diese Grössen noch von der Laufgeschwindigkeit c des Schwerpunktes des Kreisels ab, welche als eine constante Grösse vorausgesetzt wird. Je rascher der Kreisel läuft, desto grösser wird φ, desto mehr senkt er sich also, während gleichzeitig seine Winkelgeschwindigkeit α in dem Laufkreise abnimmt, der Radius R dieses Kreises aber zunimmt.

Wenn $c=0$ ist, kann $\varphi=0$ und $R=0$ sein, während α einen beliebigen Werth beibehält, d. h. wenn der Kreisel keine Laufgeschwindigkeit hat, kann er sich mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit in aufrechter Stel-

lung um seinen Schwerpunkt drehen. Uebrigens ist für $c = 0$ auch noch eine andere Auflösung möglich, nämlich die, dass $R = 0$, α aber $= \frac{2bW}{\eta T}$ und φ ganz willkürlich ist. Diese Auflösung sagt aus, dass der Kreisel in jeder beliebigen schiefen Stellung mit der Umdrehungsgeschwindigkeit $\alpha = \frac{2bW}{\eta T}$ um die durch seinen Schwerpunkt gehende Verticale sich drehen kann.

Demzufolge sieht man den Kreisel, wenn ihm keine Laufgeschwindigkeit ertheilt ist, um die durch seinen Schwerpunkt gehende Verticale in beliebig schiefer Stellung rotiren, wobei seine Axe einen Kegel beschreibt. Wenn derselbe einen Stoss erhält, läuft er im Kreise. In Folge der Reibung und des Luftwiderstandes vermindert sich η und c, gleichzeitig wächst α, wogegen φ und R abnehmen. Hieraus folgt, dass sich der Kreisel, ehe er umfällt, immer steiler stellt und eine immer grössere Winkelgeschwindigkeit um die Verticale annimmt, aber einen immer kleineren Kreis durchläuft.

So lange $\alpha\eta < \frac{2bW}{T}$ ist, ist φ positiv, für $\alpha\eta = \frac{2bW}{T}$ wird φ willkürlich und für $\alpha\eta > \frac{2bW}{T}$ wird φ negativ. Für mässige Werthe der Rotationsgeschwindigkeit η um die Axe des Kreisels und der Winkelgeschwindigkeit α um die Verticale stellt sich also der Kreisel vom Umfange des Laufkreises EE' radial nach innen, für sehr grosse Werthe von η oder α dagegen stellt er sich radial nach aussen, so dass sein Schwerpunkt C_1 ausserhalb des Laufkreises liegt. Die Bewegung in der letzteren Stellung ist sehr merkwürdig, da sich alsdann die Masse des Kreisels mit einwärts gekehrter Axe um die Verticale schwingt, ohne zu fallen und ohne durch die Centrifugalkraft fortgeschleudert zu werden. Besonders auffallend wird diese Erscheinung, wenn alsdann der Durchschnittspunkt der Axe DE des Kreisels mit der Verticalen FD in die Laufflàche, also in den Mittelpunkt O des Laufkreises fällt, weil alsdann der Fuss des Kreisels in O still steht und der Kreisel sich um die Verticale OD schwingt.

Schliesslich ist die eigenthümliche Wirkung der Reibung auf der Lauffläche und des Luftwiderstandes zu erörtern. Soweit diese Widerstände als Kräftepaare gegen die Rotation des Kreisels gerichtet sind, also dessen lebendige Drehungskraft absorbiren, vermindern sie die Grösse η, was mit einer Verminderung des Winkels φ, mit einer Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit α und mit einer Verminderung des Radius R, jedoch mit keiner Veränderung der Laufgeschwindigkeit c begleitet ist. Diese Widerstände richten also den Kreisel höher auf und be-

schleunigen seine Winkelgeschwindigkeit um die Verticale, verengen aber seinen Laufkreis und lassen seine Laufgeschwindigkeit ungeändert.

Soweit jene Widerstände gegen den Lauf des Kreisels gerichtet sind, also dessen lebendige Fortschrittskraft consumiren, vermindern sie die Grösse c, womit eine Verminderung von φ, eine Vermehrung von α bei einwärts gekehrter Stellung EC und eine Verminderung von α bei auswärts gekehrter Stellung EC_1, ferner eine Verminderung von R, jedoch keine Veränderung von η verbunden ist. Die letzteren Widerstände haben also ebenfalls den Effect, den Kreisel steiler zu stellen, seine Winkelgeschwindigkeit um die Verticale zu beschleunigen und seinen Laufkreis zu verengen, ohne jedoch seine Rotationsgeschwindigkeit zu ändern.

Die Resultante der letzteren Widerstände, welche gegen die Laufrich tung des Kreisels wirken, geht nicht immer durch den Schwerpunkt des Kreisels. Insbesondere wirkt die Reibung der Lauffläche gegen den Fuss E des Kreisels, erzeugt also ausser einem ihrer Kraft entsprechenden Drucke auf den Schwerpunkt ein Kräftepaar, dessen Drehungsaxe parallel zur Linie AB ist, also sowohl normal auf der Axe CD des Kreisels, als auch normal auf den Axen GG' der Kräftepaare der Schwere und der Centrifugalkraft steht. Die positive Halbaxe des Kräftepaares der Reibung ist CB. Dasselbe kippt also den Kreisel um die Linie GG' (die Durchschnittslinie der Drehungsebene des Kreisels mit der Drehungsebene dieses Kräftepaares). Um die Richtung zu bestimmen, in welcher dieses Kippen erfolgt, und in welche dadurch die Axe des Kreisels versetzt wird, beachte man, dass die positive Halbaxe des Kreisels von ihrer Richtung CD gegen die positive Halbaxe CB des drehenden Kräftepaares abgelenkt wird. Bei der einwärts gekehrten Stellung EC sinkt also der Kreisel in Folge des Kräftepaares der Reibung tiefer; bei der auswärts gekehrten Stellung EC_1 dagegen hebt er sich vermöge dieser Kraft höher. Diese Effecte combiniren sich selbstverständlich mit den Effecten der Widerstände gegen die Rotation, um dieselben zum Theil zu unterstützen, zum Theil zu neutralisiren.

Die Wirkung des Kräftepaares der Reibung lässt sich leicht in Rechnung stellen. Wir bemerken zu diesem Ende, dass, wenn f den Reibungscoefficienten zwischen dem Fusse des Kreisels und der Lauffläche bezeichnet, das Moment dieses Kräftepaares gleich bfW ist. Wenn man will, kann man die Momente aller drei Kräftepaare, der Schwere, der Centrifugalkraft und der Reibung sogleich in ein einziges zusammensetzen, dessen positive Halbaxe in der Drehungsebene $AGBG'$ des Schwungrades in dem Winkel BCG' liegt und ein Kippen um eine auf dieser Axe normal stehende, gleichfalls in der Ebene $AGBG'$ liegende Linie hervorbringt.

Das Ueberraschende dieser Wirkungen ist, dass die Widerstände

häufig Hebungen hervorbringen, wo man Senkungen erwartete, dass die Reibung am Fusse des oftmals sehr schlanken Kreisels, statt seinen Umsturz zu veranlassen, seinen Lauf (selbst auf rauher Fläche) nicht hindert, sondern als Gyralkraft nur die Neigung seiner Axe beeinflusst und dass der Kreisel im Verlaufe seiner Bewegung je nach der Glätte und Rauhigkeit der verschiedenen Stellen der Laufläche sich bald senkt, bald hebt und bald grössere, bald kleinere Kreise mit variabeler Winkelgeschwindigkeit durchläuft. Bei allen diesen Veränderungen vermindert sich jedoch fortwährend seine lebendige Kraft, und zwar sowohl seine Drehungs- wie seine Fortschrittskraft, was den schliesslichen Umsturz meistens durch Ausgleiten des Fusses herbeiführt.

17. Das Polytrop oder der Rotationsapparat. Denken wir uns die Axe CD des Kreisels um den Punkt D so weit nach oben gedreht, dass der Winkel φ stumpf wird, so nimmt derselbe die in Fig. 16 dargestellte Stellung an, worin wir den spitzen Nebenwinkel von φ mit ψ bezeichnen. Wir lassen die positive Rotation η in die negative übergehen, so dass nicht mehr CD, sondern CE die positive Halbaxe des Schwungrades ist, und nehmen an, der untere Theil dieser Axe stütze sich im Punkte H auf einen Arm IH, welcher in I mit einer drehbaren verticalen Axe DF fest verbunden ist, während die Axe HE des Schwungrades sich um H in verticaler Ebene drehen kann. Der durch dieses System dargestellte Apparat ist das von Magnus angegebene Polytrop, welches im Wesentlichen mit den zu ähnlichen Zwecken construirten Rotationsapparaten übereinstimmt. Wir setzen die Länge der Axe $CH = b$ und die des Armes $IH = d$, während R immer den Abstand des Schwerpunktes C von der verticalen Umdrehungsaxe DF bezeichnet.

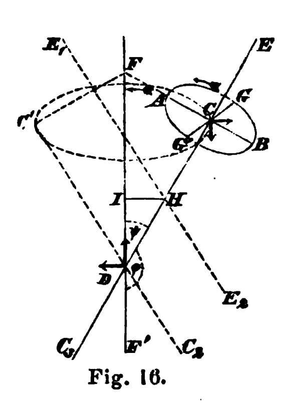


Fig. 16.

Bei der dargestellten auswärts gekehrten und aufgerichteten Stellung des Schwungrades wirkt die Schwere und die Centrifugalkraft, indem beide mit den Widerständen des Stützpunktes H Kräftepaare bilden, in derselben Drehungsrichtung zusammen, um die Gyralkraft zu erzeugen. Da das Moment der Schwere gleich $W.b\sin\psi$ und das der Centrifugalkraft $\frac{W}{g}\alpha^2 R.b\cos\psi$ ist, so hat man

$$b\,W\left(\sin\psi + \frac{\alpha^2 R}{g}\cos\psi\right) = \tfrac{1}{2}\alpha\eta\,T\sin\psi.$$

Diese Formel gilt für jede Stellung des Schwungrades wie HC, HE_2, HE_1, HC_3 in den vier Quadranten, indem hierfür der Winkel ψ resp. positiv spitz, positiv stumpf, negativ spitz und negativ stumpf gesetzt werden kann.

Da das Schwungrad nicht mehr ganz frei ist, wie der auf der Ebene laufende Kreisel, so wird das um seine eigene Axe CE rotirende und gleichzeitig um die verticale Axe DF sich drehende Schwungrad (soweit nicht Widerstände oder sonstige Kräfte den Zustand ändern) fortwährend in derselben Stellung gegen die Verticale und in derselben Winkelgeschwindigkeit α verharren. Die Bedingung, dass die Laufgeschwindigkeit αR eine constante Grösse sei, erfüllt sich also hier von selbst und kann nicht als eine maassgebende aufgestellt werden. Dagegen liefert die unabänderliche Verbindung des Schwungrades mit der verticalen Axe DF die Beziehung

$$R = d + b \sin \psi.$$

Substituirt man diesen Werth von R in die obige Gleichung, so erhält man zwischen den beiden unbekannten Grössen α und ψ nur eine einzige Gleichung. Hieraus folgt, dass, wenn man eine von beiden beliebig festsetzt, die andere als Function davon gegeben ist. Löst man diese Gleichung für α auf, so ergiebt sich

$$\alpha = \frac{g \eta T \tang \psi}{4 b W (d + b \sin \psi)} \left\{ 1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{4 b W}{\eta T}\right)^2 \frac{d + b \sin \psi}{g \tang \psi}} \right\}.$$

Das mit gegebener Umdrehungsgeschwindigkeit η rotirende Schwungrad kann daher in einer bestimmten Neigung ψ nur verharren, wenn sich dasselbe zugleich mit der Winkelgeschwindigkeit α um die verticale Axe DF dreht. Bringt man also das Schwungrad in eine bestimmte Stellung und entspricht die Winkelgeschwindigkeit um die verticale Axe, welche man demselben gleichzeitig mittheilt, nicht dem vorstehenden Werthe von α, so kann das Polytrop keine durchaus gleichförmige Bewegung zeigen; das Schwungrad wird vielmehr sinken oder aufsteigen, bis seine Neigung ψ und die beim Fallen oder Steigen sich verändernde Winkelgeschwindigkeit α der vorstehenden Beziehung genügen.

Uebrigens entsprechen jeder Neigung ψ zwei verschiedene Werthe von α, je nachdem man die Wurzelgrösse positiv oder negativ nimmt.

Die Neigung ψ, unter welcher eine gleichförmige Bewegung überhaupt möglich ist, hat ihre Grenzen, welche dadurch bedingt sind, dass die Wurzelgrösse in dem Ausdrucke für α nicht imaginär werden darf. Für eine gegebene Rotationsgeschwindigkeit η muss also ψ gross genug oder die Axe HC des Schwungrades flach genug gestellt sein, so dass

$$\frac{g \tang \psi}{d + b \sin \psi} \geqq \left(\frac{4 b W}{\eta T}\right)^2$$

ist. So braucht für $\eta = \infty$ nur $\psi \geqq 0$ zu sein; für $\eta = 0$ aber, d. h. für ein nicht rotirendes Rad, muss $\tang \psi$ unendlich gross, also $\psi = 90^\circ$ sein.

Umgekehrt kann man die Möglichkeit der Bewegung für eine jede gegebene Neigung ψ durch eine hinreichend grosse Rotationsgeschwindigkeit η erzwingen, indem nur

$$\eta \geqq \frac{4 b W}{T} \sqrt{\frac{d + b \sin \psi}{g \tang \psi}}$$

zu sein braucht.

Wenn das Schwungrad sehr rasch rotirt und ziemlich schwer ist, auch hinreichend steil, d. h. nicht gar zu flach gestelt ist, so dass das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen eine sehr kleine Grösse gegen die Einheit darstellt, so hat man mit genügender Annäherung für α die beiden Werthe

$$\alpha = \frac{2bW}{\eta T} \text{ und } = \frac{g\eta T \tang\psi}{2bW(d+b\sin\psi)} - \frac{2bW}{\eta T}.$$

Für ein äusserst rasch rotirendes Schwungrad wird also die eine der beiden möglichen Umlaufsgeschwindigkeiten um die verticale Axe, und zwar die kleinere von beiden, von der Neigung ψ fast ganz unabhängig (vorausgesetzt, dass ψ nicht zu klein ist oder das Rad nicht zu steil steht). Diese Geschwindigkeit ist sehr klein und sie ist dieselbe, bei welcher nach No. 16 ein Kreisel in jeder beliebigen Stellung um seinen Schwerpunkt schwanken kann. Uebrigens giebt es immer noch eine zweite Umlaufsgeschwindigkeit, welche von der Stellung ψ abhängig bleibt; diese ist nach der vorstehenden Formel jetzt sehr gross, nämlich nahezu gleich $\frac{g\eta T \tang\psi}{2bW(d+b\sin\psi)}$.

Wenn man das Polytrop in Gang setzt, theilt man dem Schwungrade gewöhnlich gar keine erhebliche Umlaufsgeschwindigkeit um die Verticale DF mit, am wenigsten die grösste der beiden möglichen Werthe von α. Die Geschwindigkeit, welche sich alsdann von selbst einstellt, wird mithin fast immer der kleinere jener beiden Werthe sein, welchem das obere Zeichen — vor der Wurzelgrösse angehört.

Wenn die Länge d des Armes IH null ist, hat man im Wesentlichen den Fessel'schen Rotationsapparat oder einen Kreisel mit festgehaltener Fussspitze. Der Ausdruck für α wird alsdann

$$\alpha = \frac{g\eta T}{4b^2 W \cos\psi}\left\{1 \mp \sqrt{1 - \frac{b}{g}\left(\frac{4bW}{\eta T}\right)^2 \cos\psi}\right\}.$$

Die umgekehrte Auflösung für ψ giebt

$$\cos\psi = \frac{g}{\alpha^2 b}\left(\frac{\alpha\eta T}{2bW} - 1\right).$$

Uebrigens lässt alsdann die Grundgleichung noch eine andere Auflösung nämlich $\psi = 0$ bei wilkürlichem α zu, was selbstverständlich ist.

Wenn α den Werth $\frac{2bW}{\eta T}$ annimmt (woran jetzt aber durchaus nicht die Bedingung einer sehr grossen Rotationsgeschwindigkeit η geknüpft ist), wird $\psi = 90^\circ$, d. h. die Axe des Schwungrades steht horizontal. Für grössere Werthe von α ist ψ positiv, das Schwungrad hat also die aufwärts gekehrte Stellung DE; für kleinere Werthe von α ist ψ negativ, das Schwungrad stellt sich also abwärts nach DC_2.

Dass die vorstehende Auflösung für α zwei Werthe, für $\cos\psi$ dagegen nur einen liefert, darf nicht befremden; dem einen Werthe von $\cos\psi$ ent-

sprechen doch immer **zwei** Werthe von ψ, ein positiver für die Stellung DC und ein negativer für die Stellung DC'.

Wenn man in der letzten Gleichung ψ als die von α abhängige Veränderliche ansieht, so ergiebt sich durch Differentiation

$$\partial \psi = \frac{2G}{b\alpha^3 \sin\psi}\left(\frac{\alpha\eta T}{4bW} - 1\right)\partial\alpha.$$

Hiernach wächst der positive Winkel ψ mit der positiven Winkelgeschwindigkeit α, wenn

$$\frac{\alpha\eta T}{2bW} > 1$$

ist, während im entgegengesetzten Falle der positive Winkel ψ wächst, wenn die positive Winkelgeschwindigkeit α abnimmt. Hieraus folgt, dass bei der Stellung und Bewegungsrichtung DE das Schwungrad bei zunehmender Winkelgeschwindigkeit α sich senkt und bei abnehmender Winkelgeschwindigkeit sich hebt, oder dass dasselbe in flacherer Lage rascher um die Verticale läuft, sobald die Rotationsgeschwindigkeit η gross genug, nämlich grösser als $\frac{4bW}{\alpha T}$ ist, dass dagegen das Schwungrad bei zunehmender Winkelgeschwindigkeit α sich hebt und bei abnehmender Winkelgeschwindigkeit sich senkt, oder dass dasselbe in flacherer Lage langsamer um die Verticale läuft, sobald die Rotationsgeschwindigkeit η klein genug, nämlich kleiner als $\frac{4bW}{\alpha T}$ ist.

Für die **abwärts** gekehrte Stellung DC_2 des Schwungrades, wo ψ stumpf ist, bleibt doch $\sin\psi$ positiv; es gelten also auch für diese Stellung dieselben Gesetze.

Würde α negativ, liefe also das Schwungrad nach entgegengesetzter Seite um die Verticale, so würde

$$\cos\psi = -\frac{g}{\alpha^2 b}\left(\frac{\alpha\eta T}{2bW} + 1\right),$$

also entschieden negativ sein. Diese Bewegung kann also nur bei abwärts gekehrter Lage DC_2 des Schwungrades vorkommen.

Setzt man diese abwärts gekehrte Lage, also für ψ einen stumpfen oder für $\cos\psi$ einen negativen Werth $-\cos\varphi$ voraus, worin φ den alsdann spitzen Nebenwinkel $F'DC_2$ von ψ bezeichnet, so wird

$$\alpha = \frac{g\eta T}{4b^2 W \cos\varphi}\left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{b}{g}\left(\frac{4bW}{\eta T}\right)^2 \cos\varphi}\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{\alpha^2 b}\left(-\frac{\alpha\eta T}{2bW} + 1\right).$$

Der Umlauf ist alsdann immer **möglich**, weil die Wurzelgrösse im Ausdrucke für α reell ist. Die Winkelgeschwindigkeit dieses Umlaufes kann aber sowohl eine positive, wie eine negative sein; die positive ist die kleinere, welcher das obere Zeichen $+$ vor der Wurzelgrösse entspricht,

die negative dagegen ist die grössere, welcher das untere Zeichen — vor der Wurzelgrösse angehört, welche sich also nicht leicht von selbst realisirt. Für diese abwärts gekehrte Stellung des Schwungrades ist ausser der positiven, von φ unabhängigen Geschwindigkeit $\alpha = \frac{2bW}{\eta T}$, welche für sehr grosse Werthe der Rotation η stattfindet und selbst sehr klein ist, noch eine andere Geschwindigkeit interessant, welche für sehr kleine Werthe der Rotation η stattfindet, insofern $\cos\varphi$ nicht zu nahe am Nullwerthe oder die Axe des Schwungrades nicht zu nahe horizontal liegt. Diese Geschwindigkeit ist, indem man unter und vor der Wurzelgrösse die Zahl 1 vernachlässigt, nahezu $\alpha = \pm\sqrt{\frac{g}{b\cos\varphi}}$, also für ein sehr steil herabhängendes, langsam rotirendes Schwungrad fast $= \pm\sqrt{\frac{g}{b}}$.

Wenn man an der rückwärts verlängerten Axe CD des Schwungrades jenseit ihres Stützpunktes (H oder D) z. B. in C_3 ein Gewicht W' anbringt, wie es bei dem Fessel'schen Rotationsapparate der Fall ist, so erzeugt man eine verticale Kraft W', welche das Schwungrad in entgegengesetzter Richtung wie das in C wirkende Gewicht mit dem Momente $b'W'\sin\psi$ (wenn $HC_3 = b'$ ist) zu drehen strebt, und zugleich eine Centrifugalkraft, welche mit dem Momente

$$\frac{W'}{g}\alpha^2 R' b' \cos\psi$$

in entgegengesetzter oder in derselben Richtung wie die Centrifugalkraft des Schwungrades wirkt, je nachdem R' oder der Abstand des Aufhängepunktes des Gewichts W' rechts oder links von der Verticalen DF liegt, d. h. je nachdem $R' = d - b'\sin\psi$ positiv oder negativ ist. Immer wird für diese Einrichtung die Grundgleichung

$$(bW - b'W')\sin\psi + \frac{\alpha^2}{g}(bWR - b'W'R')\cos\psi = \tfrac{1}{2}\alpha\eta T\sin\psi,$$

und für den Fessel'schen Apparat, wo $d = 0$, also R' negativ ist,

$$(bW - b'W')\sin\psi + \frac{\alpha^2}{g}(b^2W + b'^2W')\sin\psi\cos\psi = \tfrac{1}{2}\alpha\eta T\sin\psi.$$

Schliesst man die Auflösung $\psi = 0$, $\alpha =$ willkürlich aus, dividirt also mit $\sin\psi$, so kommt

$$\cos\psi = \frac{g}{\alpha^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\alpha\eta T - bW + b'W'}{b^2W + b'^2W'}.$$

Wenn das Gewicht W' das Gewicht W des Schwungrades balancirt, also $bW = b'W'$ ist, erhält man

$$\cos\psi = \frac{g\eta T}{2\alpha b(b+b')W} \quad \alpha = \frac{g\eta T}{2b(b+b')W\cos\psi}.$$

Vermöge der Centrifugalkraft ist also auch in diesem Falle eine gleichförmige Bewegung um die Verticale möglich. Für $\psi = 90^0$ muss die Um-

laufsgeschwindigkeit α in diesem Falle allerdings unendlich gross sein, d.h. ein balancirtes Schwungrad vermag sich bei horizontaler Axenstellung nur dann in Umdrehung um die Verticale zu erhalten, wenn es in unendliche Winkelgeschwindigkeit gesetzt worden ist.

Uebrigens leuchtet aus der Grundgleichung ein, dass, wenn $b' W' = b W$ ist, die Forderung $\psi = 90^0$ auch durch $\alpha = 0$ erfüllt werden kann, dass also die horizontale Axenstellung eines balancirten Schwungrades auch bei gar keiner Bewegung um die Verticale möglich ist. Ueberhaupt kann für $b' W' = b W$ und $\alpha = 0$ nach der Grundgleichung ψ jeden beliebigen Werth annehmen, d. h. ein balancirtes Schwungrad kann in jeder beliebigen Stellung ohne Umlaufsgeschwindigkeit verharren.

So lange das Gewicht des Schwungrades das Gegengewicht überwiegt, also $b W > b' W'$ ist, entspricht einem positiven ψ ein positives α, d. h. die aufwärts gerichtete Stellung des Schwungrades ist alsdann nur bei positiver Umdrehung um die Verticale möglich. Wenn jedoch das Gegengewicht überwiegt, also $b' W' > b W$ ist, entspricht einem positiven ψ sowohl ein positives, wie ein negatives α, d. h. die aufwärts gerichtete Stellung des Schwungrades ist alsdann sowohl bei einer positiven, wie bei einer negativen Umdrehung um die Verticale möglich.

Differentiirt man $\cos\psi$ nach W', so kommt

$$d\psi = \frac{b' g\left[\tfrac{1}{2}\alpha\eta b' T - b(b+b') W - 2b'^2 W'\right]}{\alpha^2 (b^2 W + b'^2 W')^2 \sin\psi} \partial W'.$$

So lange der Zähler des Bruches auf der rechten Seite positiv ist, wie es bei hinreichend starker Rotation η der Fall ist, wächst der Winkel ψ mit dem Gegengewichte W'; je stärker also das Gegengewicht W' ist, desto flacher stellt sich das Schwungrad. Bei sehr schwacher Rotation η, wo der Zähler des vorstehenden Bruches negativ wird, findet jedoch das Gegentheil statt, je stärker alsdann das Gegengewicht W' ist, desto steiler stellt sich das Schwungrad.

Auf das Schwungrad des Rotationsapparates wirken ähnliche Widerstände ein, wie auf den Kreisel. Namentlich ist es die Zapfenreibung, welche immer mehr und mehr die lebendige Drehungskraft oder die Rotationsgeschwindigkeit η vermindert. Der Luftwiderstand ist wegen der langsamen Bewegung um die verticale Axe nicht sehr erheblich, und die beim Kreisel stattfindende Reibung am Fusse der Schwungradaxe, welche theils die lebendige Fortschrittskraft consumirt, theils als Kräftepaar eine Drehung der Schwungradaxe in vertialer Ebene veranlasst, kommt hier gar nicht vor. Dagegen wirkt hier die Reibung an der verticalen Axe DF als ein Bewegungshinderniss, welches die lebendige Fortschrittsrichtung oder die Umlaufsgeschwindigkeit α allmählich vermindert. Uebrigens hebe ich hervor, dass diese Axenreibung, sowie

überhaupt jede unmittelbar auf den Arm IH ausgeübte Kraft durchaus nicht ein Kräftepaar in dem Schwungrade, sondern lediglich eine einfache horizontale Kraft im Schwerpunkte C normal zur Ebene DFC erzeugt. Denn das bei H befindliche Charnier, welches keine Drehung der Axe HE nach vorn oder hinten, sondern nur nach oben oder unten gestattet, bewirkt, dass jeder von dem Arme IH übertragene Druck sich in zwei Punkten auf die Axe HE äussert, die in der Richtung HE, wenn auch in sehr geringem Abstande von einander, liegen. Hierdurch wird die Axe HE wie ein Hebel in Anspruch genommen, und es wird vermöge der Steifigkeit desselben ein horizontaler Druck normal zur Ebene DFC unmittelbar auf den Schwerpunkt C übertragen.

Hiernach haben wir einfach die Wirkungen zu untersuchen, welche eine Verminderung von η und von α hervorbringen. Beide gehen unabhängig von einander vor sich; der Effect der Veränderung der einen Geschwindigkeit muss daher unter der Voraussetzung betrachtet werden, dass die andere Geschwindigkeit nicht gleichzeitig direct beeinflusst werde.

Betrachten wir die Formeln für $\cos\psi$, welche für den einfacheren Fall des Polytrops gelten, wo die Länge d des Armes IH gleich null ist. Wenn sich η vermindert, vermindert sich auch der positive Werth von $\cos\psi$, es vergrössert sich also der Winkel ψ, d. h. in Folge der Zapfenreibung des Schwungrades sinkt dasselbe allmählich herab.

Vermindert sich dagegen die Umlaufsgeschwindigkeit α, so hängt der Effect von der Stärke der Rotationsgeschwindigkeit η ab. Ist nämlich $\eta > \frac{4bW}{\alpha T}$, so hebt sich das Schwungrad; ist aber $\eta < \frac{4bW}{\alpha T}$, wie es im Laufe der Zeit sicher eintritt, so senkt sich dasselbe.

Nach gewisser Zeit wird also das Schwungrad sowohl in Folge der Zapfenreibung an seiner Axe, wodurch η vermindert wird, als auch in Folge der Axenreibung an der verticalen Umdrehungsaxe, wodurch α vermindert wird, herabsinken; vorher kann jedoch mit einer Verminderung von α eine Hebung des Schwungrades verbunden sein.

Hieraus ist nun auch der Effect eines Druckes klar, welchen man gegen den Arm IH anbringt. Bewirkt dieser Druck Beschleunigung oder Vergrösserung von α, so senkt sich das Schwungrad, sobald $\eta > \frac{4bW}{\alpha T}$ ist; dagegen hebt es sich, sobald $\eta < \frac{4bW}{\alpha T}$ ist. Hemmt man den Arm IH, vermindert man also α, so hebt sich das Schwungrad, falls $\eta > \frac{4bW}{\alpha T}$ ist, und es senkt sich, falls $\eta < \frac{4bW}{\alpha T}$ ist. Bei schwacher Rotation η, wie sie unfehlbar einmal eintreten muss, hebt sich also das Schwungrad

bei der Beschleunigung des Armes IH und es senkt sich bei der Hemmung dieses Armes, und zwar findet dieses Verhalten sowohl für ein aufwärts, wie für ein abwärts gerichtetes Schwungrad statt.

18. Das rotirende Geschoss. Das aus einem gezogenen Geschütze geworfene Geschoss DE (Fig. 17) ist ein um seine Axe DE rotirendes Schwungrad, welches mit der Spitze E voranschreitet. Wenn auf dieses Geschoss Kräfte einwirken, deren Resultante durch den Schwerpunkt C geht, so werden dieselben die Bahn dieses Schwerpunktes bestimmen, ohne der Rotationsaxe DE eine andere Stellung zu verleihen. Von der letzteren Wirkungsweise ist die Schwere; vermöge der Schwere durchläuft also das Geschoss eine parabolische Bahn CC_1, ohne eine andere Axenrichtung anzunehmen. Hieraus geht hervor, dass die Schwere durchaus keine Veranlassung zur Abweichung der rotirenden Geschosse von ihrer Bahn, auch nicht zur Verdrehung ihrer Rotationsaxe ist.

Ferner folgt aus der Beharrlichkeit der Stellung der Rotationsaxe und aus dem Umstande, dass alle weit tragenden Geschütze ihre Kugel mit Elevation, also in einer aufsteigenden Richtung DF, entsenden müssen, dass die Rotationsaxe $D_1 E_1$ des Geschosses in jedem Punkte C_1 seiner Bahn mit der Spitze nach oben gekehrt sein wird, insofern nicht durch besondere störenden Kräfte eine Verdrehung der Axe eingetreten ist.

Endlich erkennt man, dass ein auf das Geschoss wirkender Seitenwind, insofern die Resultante seines Druckes durch den Schwerpunkt der Kugel geht, eine Seitenablenkung des Schwerpunktes, nicht aber eine Veränderung der Axenrichtung hervorbringen wird, dergestalt, dass die Projection der Flugbahn auf eine horizontale Ebene durch Fig. 18 dargestellt ist.

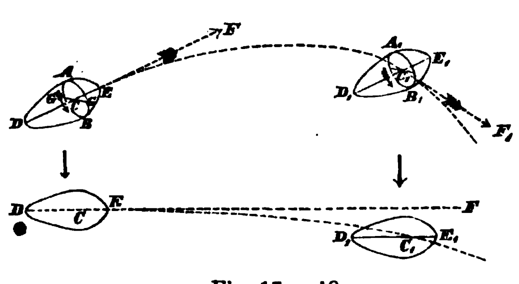


Fig. 17 u. 18.

Der Luftwiderstand, welcher sich dem vordringenden Geschoss von vorn entgegengesetzt, wird nur eine Verzögerung der Fortschrittsgeschwindigkeit, nicht aber eine Verdrehung der Rotationsaxe erzeugen, falls seine Resultante durch den Schwerpunkt C geht.

Endlich kann die Abweichung, welche bei sehr langen Flugbahnen durch die Umdrehung der Erde entsteht, indem das Geschoss beim Eintritte in einen andern Parallelkreis auf eine Luftschicht von grösserer oder kleinerer Geschwindigkeit von West nach Ost trifft, also von einem besonderen Luftwiderstande afficirt wird, keinen Einfluss auf die Axen-

stellung des Geschosses haben, insofern die Resultante dieses Luftwiderstandes durch den Schwerpunkt C geht.

Die Bedingung, dass die Resultante von Wind und Luftwiderstand durch den Schwerpunkt des Geschosses gehe, ist für alle möglichen Richtungen dieser äusseren Angriffe nur dann erfüllt, wenn das Geschoss die geometrische Kugelform hat. Eine aus einem gezogenen Geschütze geworfene wirkliche Kugel wird also weder durch die Schwere, noch durch den Luftwiderstand, noch durch Seitenwinde veranlasst werden, ihre Rotationsaxe zu verdrehen. Hiernach erscheint die geometrische Kugelform in Beziehung auf Seitenabweichung und Verdrehung der Rotationsaxe als die günstigste für die Geschosse; allein da der Luftwiderstand von vorn ein erhebliches Bewegungshinderniss ist, welches die Abweichung von der parabolischen Flugbahn und die Verkürzung der Wurfweite herbeiführt und da dieser Widerstand nur durch eine Verlängerung und Zuspitzung des Geschosses vermindert werden kann, so ist man in der Praxis der Feuerwaffen doch genöthigt, die Rundkugel mit der Spitzkugel zu vertauschen, welche Letztere ausserdem eine bessere Führung in dem Geschützrohre gestattet.

Die Rotationsaxe der Spitzkugel kann nach Vorstehendem nur durch solche Kräfte verdreht werden, deren Resultante nicht durch den Schwerpunkt geht. Ist P die Resultante eines solchen Systems von Kräften (Fig. 19) und C der Schwerpunkt der Spitzkugel, so erzeugt jene Kraft P zwei verschiedene Wirkungen. Denkt man sich in C zwei der Kraft P parallele und gleiche Kräfte Q, R in entgegengesetzten Richtungen angebracht, so afficirt die Kraft $Q = P$ die Fortschrittsbewegung der Spitzkugel in der vorstehend beschriebenen Weise; ausserdem aber ruft das Kräftepaar P, R die Tendenz zur Drehung um eine auf der Ebene PCR normal stehende Axe und demzufolge zur Verdrehung der Rotationsaxe der Spitzkugel hervor. Ueberhaupt wissen wir aus den früheren Untersuchungen über die Gyralkraft, dass nur Kräftepaare im Stande sind, die Richtung der Rotationsaxe der Spitzkugel zu verändern.

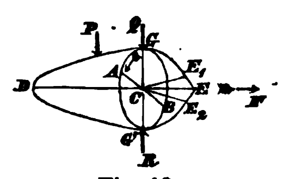


Fig. 19.

Untersuchen wir jetzt den Effect der verschiedenen, in der Praxis zur Wirkung kommenden Kräftepaare. Wenn die Spitzkugel nach Fig. 19 und überhaupt so geformt ist, dass ihr Schwerpunkt C mehr nach vorn liegt, so erzeugt ein horizontaler Seitenwind P ein Kräftepaar P, R, dessen positive Halbaxe CA vertical nach oben gekehrt ist (indem dieses Kräftepaar Drehung in der Richtung $EGDG'$ zu erzeugen strebt). Rotirt nun die Spitzkugel um ihre Axe DE so, dass CE die positive Halbaxe ist, also in der Richtung $GAG'B$, wie es in der Praxis immer vorkommt, weil die Geschütze einen nach der Krümmung einer rechten Schraube gewun-

denen Drall besitzen, so findet sich nach No. 12 die Richtung, welche die Rotationsaxe durch die Einwirkung jener Gyralkraft im Zeitelemente dt annimmt, durch die Diagonale CE_1 eines Rechteckes, dessen eine Seite CE und dessen andere Seite eine unendlich kleine Verticale in der Richtung CA ist. Durch einen Seitenwind, welcher wie P von der linken Seite kommt, wird also die Spitze der Kugel nach oben, durch einen von rechts kommenden Seitenwind dagegen nach unten abgelenkt.

Wenn der Seitenwind dauernd und nicht ganz übermässig stark ist, so dass eine gleichförmige Bewegung der Kugel möglich bleibt, bewirkt er eine fortgesetzte Drehung der Spitzkugel um die horizontale Axe GG', und zwar in der Richtung EE_1DE_2, wenn er von links kommt, und in der Richtung EE_2DE_1, wenn er von rechts kommt.

Durch einen heftigen Wind kann also die Spitze eines Geschosses von langer Wurfweite merkbar nach oben oder unten abgelenkt werden. Rotirte die Spitzkugel nicht, so würde derselbe Seitenwind eine viel erheblichere Ablenkung der Spitze nach links oder rechts hervorbringen.

Damit der Seitenwind keine Ablenkung der Spitzkugel erzeugte, müsste der axiale Durchschnitt $DGEG'$ eine nach vorn und hinten symmetrische Gestalt haben, weil alsdann die Resultante des Winddruckes durch den Schwerpunkt C ginge.

So nützlich diese Disposition als Schutzmittel gegen den Seitenwind wäre, so bedingt doch der ungleich energischere Luftwiderstand von vorn eine andere Massregel. Geht nämlich die Resultante P_1 des Widerstandes der Luft gegen das in der Richtung CF (Fig. 20) fliegende Geschoss über den Schwerpunkt C hinweg, so ist CG' die positive Halbaxe der Gyralkraft, die Spitze der Kugel wird also seitwärts nach rechts, nämlich nach der Seite hin abgelenkt, wohin die Bewegung der obersten Punkte A der Kugel zeigt. Geht die Resultante P_2 jenes Luftwiderstandes unter den Schwerpunkt hinweg, so ist CG die positive Halbaxe der Gyralkraft, die Spitze weicht also seitwärts nach links oder dahin ab, wohin die Bewegung der untersten Punkte B zeigt.

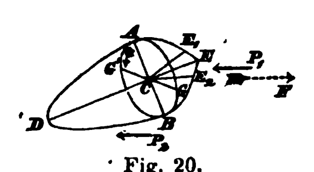


Fig. 20.

Wäre die Flugbahn des Geschosses eine horizontale Linie, bedürfte also das Geschütz keiner Elevation, so würde die Rotationsaxe der Spitzkugel stets horizontal liegen und demnach der Luftwiderstand stets durch den Schwerpunkt gehen. Unter solchen Voraussetzungen wäre also die vorstehend bezeichnete symmetrische Form nach vorn und hinten, welche der Seitenwind verlangt, auch passend in Rücksicht auf den Luftwiderstand. Wegen der unvermeidlichen Bogenlinie der Flugbahn würde jedoch der Luftwiderstand gegen eine symmetrische Spitzkugel stets über den Schwerpunkt hinweg gehen und eine Seitenablenkung der Spitze

hervorbringen. Wenngleich die Elevation der Geschütze immer gering und demzufolge auch der Hebelarm, womit der Luftwiderstand um den Schwerpunkt C wirkt, stets sehr klein ist, so ist doch wegen der grossen Wurfgeschwindigkeit der Geschosse und des quadratischen Verhältnisses, in welchem der Luftwiderstand mit der Wurfgeschwindigkeit wächst, dieser Widerstand selbst so bedeutend, dass er der Gyralkraft ein erhebliches Moment verleihen kann. Hierzu kommt noch, dass die Verdrehung, welche der Luftwiderstand verursacht, noch dadurch viel unangenehmer, als die durch Seitenwind veranlasste Verdrehung wirkt, weil jene seitwärts gerichtet ist, und hierdurch der Flugbahn selbst unter Mitwirkung des stets normal gegen krumme Flächen wirkenden Luftwiderstandes eine Ablenkung nach der Seite ertheilt wird, während der Seitenwind Verdrehung der Rotationsaxe in verticaler Ebene und demzufolge auch Ablenkung des Geschosses in verticaler Ebene erzeugt, was für den praktischen Gebrauch der Feuerwaffen weit weniger nachtheilig ist.

Ehe wir diese Ablenkung von der Flugbahn weiter besprechen, wollen wir die Diskussion der Verdrehung der Rotationsaxe zu Ende führen.

Wenn die Resultante des Luftwiderstandes immer horizontal ist, was auch eine ganz horizontale Flugbahn voraussetzt, und wenn dieselbe nicht übermässig gross ist, so dass eine gleichförmige Bewegung der Kugel möglich bleibt, so wird die Rotationsaxe DE der Spitzkugel allmälig eine Kegelfläche um die durch den Schwerpunkt C gelegte horizontale Flugbahnlinie beschreiben. Bei nicht zu grosser Wurfweite und unter normalen Verhältnissen werden diese Bedingungen in der Artilleriepraxis nahezu erfüllt sein, und man erkennt daraus die beachtenswerthe Thatsache, dass unter gewöhnlichen Verhältnissen die Axe einer rotirenden Spitzkugel durch den Luftwiderstand nur zum Durchlaufen einer Kegelfläche mit horizontaler Axe, also zu relativ geringen Verdrehungen veranlasst wird, selbst wenn ihr Schwerpunkt nach hinten verrückt ist, wogegen eine nicht rotirende Spitzkugel von dieser Construction sich sofort nach oben oder unten drehen und alsbald sich ganz überschlagen würde. Je rascher das Geschoss rotirt, je enger also der Drall des Geschützes ist, desto mehr kann der Schwerpunkt nach hinten rücken, ohne die Zuverlässigkeit des Schusses zu beeinträchtigen, während nicht rotirende Geschosse mit zurückliegendem Schwerpunkte ganz unbrauchbar sein würden.

Nun ist aber die Resultante des Luftwiderstandes im Allgemeinen nicht horizontal und bleibt auch wegen der krummen Flugbahn und wegen der Drehung des Geschosses weder in Beziehung auf Richtung, noch in Beziehung auf Stärke und auf Angriffspunkt constant. Nahezu wirkt nämlich der Luftdruck auf jedes Flächenelement normal und ausserdem ist er nahezu dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit proportional, welche dieses Element in der Richtung seiner Normalen hat. Bezeichnet also α

den Neigungswinkel der Normalen eines Flächenelementes ∂f der Spitzkugel gegen die Tangente der Flugbahn, β den Neigungswinkel dieser Tangente gegen die Rotationsaxe des Geschosses, v die Wurfgeschwindigkeit und k einen Erfahrungscoefficienten, so ist der Normaldruck N gegen jenes Flächenelement nahezu $\partial N = kv^2 cos^2 \alpha \partial f$. Dieser Druck kann in die beiden Componenten $\partial R = kv^2 cos^2 \alpha cos(\alpha + \beta) \partial f$ rechtwinklig zur Rotationsaxe und $\partial P = kv^2 cos^2 \alpha sin(\alpha + \beta) \partial f$ parallel zur Rotationsaxe zerlegt werden.

Nimmt man die Momente dieser Kräfte in Beziehung zum Schwerpunkte des Geschosses, so führt eine Summirung jener Kräfte und ihrer Momente für die nach vorn gekehrte Oberfläche zur Kenntniss der Gyralkraft und ihrer Drehungsaxe.

Ohne dass wir uns auf eine specielle Berechnung dieser Integralsummen einlassen, übersieht man, dass sowohl der normal zur Rotationsaxe gerichtete Druck R, wie der parallel zu dieser Axe gerichtete Druck P gegen den voranschreitenden Theil der Spitzkugel immer grösser ist, als gegen den hinteren Theil, dass aber die Stärke und Richtung von R und P und insbesondere ihr Abstand vom Schwerpunkte, also ihr Moment durch die Form des Geschosses mehr oder weniger beeinflusst wird. Im Allgemeinen wird folgendes Verhältniss für eine Spitzkugel stattfinden, deren Schwerpunkt nach vorn liegt. Beim Fluge in der Richtung CF der Rotationsaxe wird die Resultante des Luftdruckes durch den Schwerpunkt gehen; das Moment des daraus entspringenden Kräftepaares oder die Gyralkraft ist also null. Beim Fluge in der Richtung CF_1 (Fig. 21), wobei natürlich die Rotationsaxe in constanter Lage CF gedacht ist, wird die Resultante des Luftdruckes vor dem Schwerpunkte vorbeigehen, die Gyralkraft wird also in der Richtung F_1F wirken und ein bestimmtes Moment haben, welches durch die Länge der Linie Cf_1 dargestellt ist. Alsdann wird es innerhalb des Quadranten FCF_3 eine Flugrichtung CF_2 geben, für welche die Resultante des Luftdruckes wieder durch den Schwerpunkt geht, also die Gyralkraft null ist. Für alle über CF_2 hinaus liegenden Flugrichtungen CF_3, CF_4 geht die Resultante hinter dem Schwerpunkte vorbei, die Gyralkraft wirkt also in entgegengesetzter Drehungsrichtung F_5F_3F, so dass ihr Moment Cf_3, Cf_4 in der rückwärts gerichteten Verlängerung der betreffenden Flugrichtung aufgetragen ist. Für die links von FF_5 liegenden Flugrichtungen wiederholen sich dieselben Verhältnisse in symmetrischer Weise.

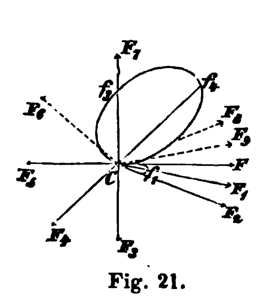


Fig. 21.

Man sieht, dass für vier Flugrichtungen CF, CF_2, CF_5, CF_8 die Gyralkraft null wird, dass sie für zwei Flugrichtungen CF_1 und CF_9 ein posi-

tives Maximum und für zwei Flugrichtungen CF_4 und CF_6 ein negatives Maximum erreicht.

Die Fig. 21 gilt zugleich für eine Spitzkugel, deren Schwerpunkt nach hinten liegt, wenn man CF_5 als die positive Richtung der Flugbahn ansieht.

Für eine ganz vollkommene Spitzkugel müsste die Resultante des Luftdruckes für jede Richtung der Flugbahn durch den Schwerpunkt gehen, die Curve $Cf_1 \, Cf_8 f_4$ müsste sich also auf einen Punkt reduciren. Da eine solche Kugelform nicht möglich ist, so sollte wenigstens der vordere positive Theil $Cf_1 \, C$ der Curve verschwinden, d. h. es sollte für keine Flugrichtung die Resultante des Luftdruckes vor dem Schwerpunkte vorbeigehen.

So lange nun die Fluggeschwindigkeit und demnach der Luftwiderstand unterhalb einer gewissen Grösse, nämich unterhalb derjenigen Grösse bleibt, bei welcher eine gleichförmige Bewegung der Spitzkugel bei der durch die Gyralkraft veranlassten Drehung noch möglich ist, wird die Rotationsaxe der Spitzkugel eine Kegelfläche um eine nahezu horizontale Axe beschreiben, gleichviel, ob der Schwerpunkt des Geschosses nach vorn oder nach hinten liegt.

Wenn die Fluggeschwindigkeit die eben bezeichnete Grenze überschreitet, jedoch eine gewisse höhere Grenze noch nicht erreicht, hört zwar die Gleichförmigkeit der Bewegung der Spitzkugel auf, allein sie verwandelt sich erst in eine periodische, bei welcher die Spitze eine allmälig sich erweiternde und alsdann sich wieder verengende Spirale und die Rotationsaxe einen erst sich erweiternden und dann sich wieder verengenden Kegel um eine nahezu horizontale Axe beschreibt.

Geht aber die Fluggeschwindigkeit über die letztere Grenze hinaus, so bleibt nur für diejenige Spitzkugel, deren Schwerpunkt nach vorn liegt, die Drehungsbewegung der Spitze eine periodische; für diejenige Spitzkugel dagegen, deren Schwerpunkt nach hinten liegt, wird diese Bewegung eine fortschreitende, so dass das Geschoss sich überschlägt.

Eine Spitzkugel mit vorn liegendem Schwerpunkte ist übrigens nur dann vor dem Ueberschlagen bei sehr grosser Geschwindigkeit völlig gesichert, wenn für keine Flugrichtung die Resultante des Luftdruckes vor dem Schwerpunkte vorbeigeht.

Da sich der Luftdruck in zwei Componenten normal und parallel zur Rotationsaxe zerlegt, so ist klar, dass die letztere Componente P immer mehr und mehr die Wurfgeschwindigkeit des Geschosses vermindert, dass aber die erstere Componente R das Geschoss zu einer Abweichung von der Flugbahn in der Richtung dieser Componente nöthigt. Hieraus folgt, dass die Gyralkraft, indem sie die Rotationsaxe der Spitzkugel verdreht, auch eine Abweichung des Geschosses von der Flugbahn nach derjenigen Richtung hin veranlasst, wohin die Spitze der Kugel gedreht wird, weil sich in Folge dieser Verdrehung

der Rotationsaxe die Componente R des Luftwiderstandes offenbar vergrössert.

Hiernach ist die Abweichung einer Spitzkugel mit voran liegendem Schwerpunkte, welche aus einem rechts gewundenen Geschütze geworfen ist, die folgende. Wegen der Elevation des Geschützes und der parabolischen Flugbahn bewirkt der **Luftwiderstand** im absteigenden Aste, wo die Neigung der Rotationsaxe gegen die Flugbahn hinreichend gross ist, eine Verdrehung der Spitze nach links und ausser der von ihm direct veranlassten verticalen Erhebung der ganzen Kugel über das Ziel noch eine Abweichung der Kugel links vom Ziele. Der von links kommende **Seitenwind** bewirkt eine Verdrehung der Spitze nach oben und ausser der von ihm direct veranlassten Abtreibung der Kugel nach rechts noch eine Abweichung derselben in verticaler Richtung nach oben. Der von rechts kommende **Seitenwind** bewirkt eine Verdrehung der Spitze nach unten und ausser der von ihm direct veranlassten Abtreibung der Kugel nach links noch eine Senkung derselben in verticaler Richtung nach unten. Alle diese Verdrehungen und Abweichungen sind um so geringer, je rascher die Spitzkugel um ihre Axe rotirt.

Bei einer runden Kugel kommen in Folge des Luftwiderstandes und des Seitenwindes keine Verdrehungen der Rotationsaxe vor, und wenn dieselben vorkämen, würden sie doch die bei einer Spitzkugel damit verbundenen besonderen Abweichungen von der Flugbahn nicht nach sich ziehen. Hiernach hat die runde Kugel Etwas vor der Spitzkugel voraus; allein der Nachtheil, welcher aus dem grösseren Luftdrucke gegen eine runde Kugel entspringt, und die Schwierigkeit, eine runde Kugel aus einem gezogenen Geschütze sicher zu werfen und ihr die zu einer möglichst beharrlichen Flugbahn nöthige Rotation zu ertheilen, scheinen jenen Vortheil in der Praxis zu überwiegen.

Aus Vorstehendem ziehen wir zwei für den Gebrauch der Feuerwaffen wichtige Schlüsse. Der erste betrifft die Form des Geschosses, der zweite den Drall des Geschützes.

Die gewöhnliche Forderung, dass der Schwerpunkt der Spitzkugel mehr nach vorn wie nach hinten liege, hat nämlich in dieser Fassung keine Bedeutung und verwirklicht an sich durchaus nicht die dabei ins Auge gefasste Bedingung der Schusssicherheit. Diese Bedingung verlangt vielmehr, dass die Resultante des Luftdruckes für jede Flugrichtung oder für jede Windrichtung durch den Schwerpunkt des Geschosses gehe, falls dies aber nicht zu ermöglichen wäre, dass sie wenigstens für keine Flug- oder Windrichtung vor dem Schwerpunkte vorbeigehe. Ob hierbei der Schwerpunkt vor oder hinter der Mitte der Axe DE liegt, ist völlig gleichgiltig. Der Schwerpunkt

einer Kugel, welche jener Bedingung genügt, wird allerdings nach vorn fallen; allein nicht umgekehrt wird eine Kugel, deren Schwerpunkt vorn liegt, jener Bedingung genügen. Ausserdem ist es keineswegs zweckmässig, dass der Schwerpunkt weit nach vorn falle, sondern es ist rathsam, dass er so wenig wie möglich aus der Mitte der Rotationsaxe herausrücke, oder vielmehr, dass das Drehungsmoment des Luftdruckes für jede mögliche Flugrichtung, also das Maximum der Linie Cf_4 in Fig. 21 so klein als irgend möglich sei, weil alsdann der Seitenwind die möglich kleinste Abweichung erzeugt.

Eine zweckmässige Form der Spitzkugel durch Rechnung zu ermitteln, würde umständlich sein; empfehlenswerther für praktische Zwecke dürfte folgendes Verfahren sein. Das Geschoss DE (Fig. 22), dessen Form geprüft werden soll, wird zwischen zwei horizontal liegenden Drehpunkten, deren Verbindungslinie durch den Schwerpunkt C geht (indem sie auf der Ebene der Figur normal steht), möglichst leicht drehbar gelagert und nun in allen möglichen Stellungen DE, D_1E_1, D_2E_2 dem Drucke eines mit hinreichender Geschwindigkeit sich bewegenden Luftstromes P ausgesetzt. An der Drehung, in welche das Geschoss durch den Luftdruck versetzt wird, erkennt man sofort, ob die obige Bedingung für alle Lagen erfüllt ist. Insbesondere darf keine Lage vorkommen, wo das Geschoss aus der ursprünglichen Lage DE weiter nach E_1, E_2 herum gedreht wird; dasselbe muss vielmehr aus jeder Lage in die ursprüngliche zurückkehren. Dieses Verhalten muss die Kugel zeigen, indem ihr Schwerpunkt möglichst nahe an der Mitte der Linie DE liegt, indem alsdann die Drehungsmomente möglichst schwach sind.

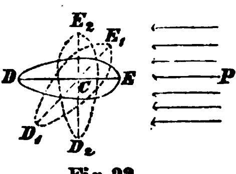


Fig. 22.

Die zweite an eine Spitzkugel zu stellende Forderung ist, dass sie möglichst rasch rotire, so dass ihre lebendige Drehungskraft möglichst gross werde. Hierzu würde ein möglichst wenig ansteigender oder ein möglichst enger Drall des Geschützes verhelfen. Die Verengung des Dralles hat jedoch aus mehreren Gründen eine praktische Grenze; theils wird die Kugel über zu schwach steigende Windungen hinweggerissen, theils erzeugt ein solcher Drall zu viel Reibung, vernichtet also zu viel lebendige Kraft, theils leidet das Geschütz zu sehr durch den plötzlichen Stoss gegen die flachen Windungen. Diese Uebelstände liessen sich wahrscheinlich durch einen Drall von ungleichmässiger Steigung erheblich vermindern. Besässe nämlich der Drall an der Seele eine sehr starke, der Geschützaxe nahezu parallele Steigung und wände sich nach der Mündung immer enger, so würde die Kugel allmählich, also mit weniger Reibung und Hindernissen in den engeren Drall übergeführt. Auf diese Weise könnte

man mit weniger Verlust an lebendiger Fortschrittskraft eine stärkere lebendige Drehkraft erzielen.

Die Anfertigung gezogener Geschütze mit ungleichförmigem Dralle mag einige praktische Schwierigkeiten haben, kann aber nicht für unausführbar gehalten werden.

19. Das Tischrücken. Der Paroxismus des Tischrückens ist vorüber; die Begeisterung der Adepten, welche in dem tanzenden Tische eine geheimnissvolle Naturkraft verehrten, hat sich an dem nüchternen Skepticismus der Männer der Wissenschaft gebrochen; allein dessenungeachtet wuchert die Krankheit im Stillen fort und wird unzweifelhaft in einiger Zeit, wie jede Epidemie, ihren erneuerten Umzug halten. Wir werden dann wieder Frauen und ahnungsvolle Jünglinge im Zauberkreise am runden Tische nach dem Momente schmachten sehen, wo der mit der Ermüdung wachsende Druck ihrer Finger das verhängnissvolle Knacken, die magische Sprache des Tisches, hervorbringt. Wir werden wieder das ergötzliche Schauspiel haben, dass auf dieses Knallsignal die schon vorher einer Stütze bedürftigen erlahmenden Glieder in eine taumelnde Unruhe gerathen, welche dem Tische bald einen stärkeren Ueberdruck an dieser, bald an jener Stelle ertheilt und dabei bald etwas mehr rechts, bald etwas mehr links gerichtet ist, bis endlich in einem günstigen Momente der Tisch ein wenig aufkippt und sich zugleich nach einer Seite dreht. Welche Macht der Erde vermöchte in diesem Augenblicke, wo sich der Zauber mit einem plötzlichen Rucke löst, die begeisternd aufjauchzende Gesellschaft zum Stehen- oder Sitzenbleiben zu bewegen! Mit dem Rufe: hier drehe ich, ich kann nicht anders! stürzt sich ein Jeder der eingeleiteten Bewegung nach; ein willenloses Werkzeug in der höheren Gewalt der Klopfgeister, treibt er den Tisch um und ist erstaunt über den Effect, da er es mit der gläubigen Ueberzeugung fühlt, dass die Bewegung des Tisches nicht von der Gesellschaft, sondern die Bewegung der Gesellschaft von dem Tische ausgeht.

Dieser Taumel wird einst wiederkehren; da aber im Stadium der Ekstase jeder Versuch zu prosaischer Auslegung der Erscheinung als ein Sacrilegium angesehen wird, so erscheint es rathsam, die jetzige Zeit der Windstille zu einigen trockenen Reflexionen über das Phänomen zu benutzen, welches auch für den Ungläubigen einige interessante Seiten hat.

Um einen Tisch zu verschieben, ist die Reibung zu überwinden, welche sich zwischen den Füssen und dem Fussboden äussert. Um einen Tisch im Kreise um seine Axe zu drehen, indem man ihn nahezu am Umfange der Platte angreift, ist dieselbe Reibung zu überwinden; allein die dazu erforderliche Kraft ist in dem Verhältnisse kleiner, als der Hebelarm des Angriffspunktes grösser ist als der Hebelarm der Fusspunkte, beide von der verticalen Axe des Tisches aus gemessen. Um endlich einen dreibeinigen Tisch um einen seiner Fusspunkte zu drehen, sind nur zwei Drit-

tel der ersteren Reibung, und zwar mittelst eines noch günstigeren Hebelverhältnisses zu überwinden, so dass zu dieser Bewegung meistens nicht halb so viel Kraft erforderlich ist, als zu der geradlinigen Verschiebung. Beim Tischrücken kommt aber zur Erhaltung der Drehbewegung noch nicht einmal diese sehr reducirte Kraft, es kommt überall keine Reibung dabei in Betracht. Denn der tanzende Tisch verhält sich nahezu wie der in Fig. 23 dargestellte Körper, welcher mittelst des die Fusspunkte unter sich verbindenden Kreises $AGBG'$ auf dem Fussboden rollt oder gewälzt wird. Die Rotation um die verticale Axe MM_1 erfordert also nur die Ueberwindung der sogenannten wälzenden Reibung, welche bekanntlich nur einen kleinen Theil der gleitenden Reibung ausmacht; der zu überwindende Reibungswiderstand ist mithin höchst unbedeutend.

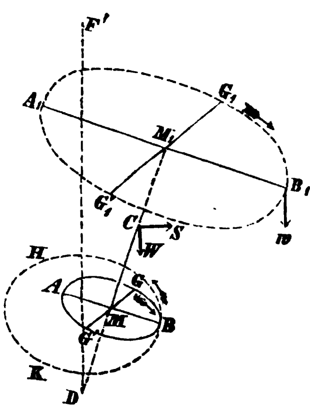


Fig. 23.

Die mathematische Theorie des Tischrückens ist offenbar in unseren früheren Untersuchungen vollständig enthalten. Insbesondere ist der tanzende Tisch dem in No. 15 betrachteten rollenden Rade ähnlich. Nehmen wir an, der Tisch rotire in der Richtung $AGBG'$ um seine Axe MM_1, alsdann rollt sein Fusskreis in dem Laufkreise BHK in entgegengesetzter Richtung herum. Zur Erhaltung dieser Bewegung dient das Gewicht $CW = W$ und die Centrifugalkraft $CS = S$, welche im Schwerpunkte C der Tischmasse wirkt; ausserdem wirke im Punkte B_1 ein verticaler Druck w. Behalten wir im Uebrigen die Bezeichnungen aus No. 15 bei, so dass α die Winkelgeschwindigkeit des Tisches um die verticale Axe DF', η die Rotationsgeschwindigkeit um seine eigene Axe MM_1, ψ den Neigungswinkel MDF' der Tischaxe gegen die Verticale, r den Radius MB des Fusskreises, R den Abstand des Schwerpunktes C von der verticalen Axe DF' bezeichnet, und setzen wir noch die Linien $MC = h$, $MM_1 = H$, $M_1B_1 = \varrho$.

Der Fusskreis durchläuft in der Zeiteinheit den Weg $(\eta + \alpha\cos\psi)r$ auf dem Umfange des Laufkreises BHK. Da der Radius des letzteren Kreises $= R - h\sin\psi + r\cos\psi$ ist, so hat man für diesen Weg auch $\alpha(R - h\sin\psi + r\cos\psi)$. Aus der Gleichheit beider Ausdrücke folgt

$$\alpha(R - h\sin\psi) = \eta r.$$

Das Kräftepaar der Schwere W in C und des betreffenden Theiles des verticalen Widerstandes in B hat das Moment $W.(r\cos\psi - h\sin\psi)$. Das Kräftepaar der Centrifugalkraft in C und des horizontalen Wider-

standes in B hat das Moment $\frac{W}{g}\alpha^2 R.(r\sin\psi+h\cos\psi)$. Das Kräftepaar des Druckes w in B_1 und des betreffenden Theiles des verticalen Widerstandes in B hat das Moment $w.(\varrho\cos\psi-H\sin\psi-r\cos\psi)$. Die letzten beiden Kräftepaare wirken dem ersten entgegen; man erhält also die Gleichung

$$W(r\cos\psi-h\sin\psi)-\frac{W}{g}\alpha^2 R(r\sin\psi+h\cos\psi)-w(\varrho\cos\psi-H\sin\psi-r\cos\psi)$$
$$=\tfrac{1}{2}\alpha\eta T\sin\psi.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung die Grösse R, so bleibt eine Gleichung zwischen α und ψ zurück.

Die Auflösung derselben für α giebt

$$\alpha=-\frac{\eta\left[\frac{1}{2}T\sin\psi+\frac{W}{g}r(r\sin\psi+h\cos\psi)\right]}{2\frac{W}{g}h(r\sin\psi+h\cos\psi)\sin\psi}$$
$$+\sqrt{\left\{\frac{\eta^2\left[\frac{1}{2}T\sin\psi+\frac{W}{g}r(r\sin\psi+h\cos\psi)\right]^2}{\left[2\frac{W}{g}h(r\sin\psi+h\cos\psi)\sin\psi\right]^2}+\frac{W(r\cos\psi-h\sin\psi)-w(\varrho\cos\psi-H\sin\psi-r\cos\psi)}{\frac{W}{g}h(r\sin\psi+h\cos\psi)\sin\psi}\right\}}.$$

Für den hier in Betracht kommenden positiven Werth von α ist die Wurzelgrösse positiv zu nehmen.

Während für das rollende Rad in No. 15 der Fall von besonderem Interesse war, wo die Rotation η einen sehr grossen Werth hat, ein Fall, welcher hier den Näherungswerth

$$\alpha=\frac{W(r-h\,\mathrm{tang}\,\psi)-w(\varrho-r-H\,\mathrm{tang}\,\psi)}{\eta\left[\frac{1}{2}T\,\mathrm{tang}\,\psi+\frac{W}{g}r(r\,\mathrm{tang}\,\psi+h)\right]}$$

ergeben würde, ist für das Tischrücken der Fall von grösserer Bedeutung, wo η sehr klein ist. Für den letzteren Fall, wo η nahezu gleich null ist, hat man hinreichend genau

$$\alpha=\sqrt{\frac{W(r-h\,\mathrm{tang}\,\psi)-w(\varrho-r-H\,\mathrm{tang}\,\psi)}{\frac{W}{g}h(r\,\mathrm{tang}\,\psi+h)\sin\psi}}.$$

Die Laufgeschwindigkeit αR des Schwerpunktes C und nahezu die des Mittelpunktes M_1 des Tisches ist gleich $\eta r+\alpha h\sin\psi$, oder wenn η klein genug ist, nahezu gleich $\alpha h\sin\psi$. Demnach ist diese Laufgeschwindigkeit nahezu

$$\alpha R=\sqrt{\frac{[W(r-h\,\mathrm{tang}\,\psi)-w(\varrho-r-H\,\mathrm{tang}\,\psi)]h\sin\psi}{\frac{W}{g}(r\,\mathrm{tang}\,\psi+h)}}.$$

Die scheinbare Rotation β der Tischplatte, welche aus der Drehung um eine zu $A_1 B_1$ parallele Linie entspringt, oder die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der ideelle tiefste Punkt B_1 den Umfang der Tischplatte durchläuft, ist gleich $\alpha \cos \psi$ oder bei der Kleinheit des Winkels ψ nahezu $= \alpha$.

Aus diesen Formeln ergeben sich folgende Schlüsse.

Der unter dem Winkel ψ aufgekippte Tisch braucht gar keine Rotation η um seine Axe MM_1 zu besitzen, um gleichwohl in einer gleichförmigen Wälzbewegung auf seinem Fusskreise zu beharren. Es braucht auch kein Druck w auf diesen Tisch ausgeübt zu werden, um jene Bewegung dauernd zu erhalten, indem die eigene Schwere und Centrifugalkraft hierzu vollkommen ausreichen, d. h. man kann in den vorstehenden Formeln $w=0$ setzen, ohne dieselben zu beeinträchtigen. Die ganze Arbeit, welche auf den tanzenden Tisch entwickelt zu werden braucht, um ihn im Gange zu erhalten, besteht mithin in der geringfügigen Quantität, welche durch die wälzende Reibung und die schwachen Stösse an den Füssen allmählich consumirt wird. Um den Tisch in Bewegung zu setzen, ist Nichts weiter erforderlich, als denselben ein wenig aufzukippen, wozu ein mässiger Ueberdruck bei B_1 erforderlich ist, und alsdann einen schwachen Druck an irgend einer andern Stelle auszuüben, so dass die wälzende Bewegung im Fusskreise eingeleitet wird. Der Tisch wird sich in Folge dessen sofort mit der Winkelgeschwindigkeit α um eine Verticale DF' in Bewegung setzen, und diese Geschwindigkeit hat, selbst wenn die Rotation η des Tisches um seine eigene Axe null bleibt, doch einen namhaften Werth. Dieser Werth ist sogar um so grösser, je kleiner der Winkel ψ oder je weniger die Tischaxe aus der verticalen Richtung gebracht, und je kleiner der Ueberdruck w ist. Für $\psi=0$ wird die Winkelgeschwindigkeit α sogar unendlich gross, was dem in No. 15 betrachteten Falle eines umfallenden rollenden Rades entspricht.

Die wirkliche Bewegung eines Punktes B_1 der Tischplatte setzt sich aus der Rotation η um die Tischaxe MM_1 und aus der Winkelgeschwindigkeit α um die Axe DF' des Luftkreises zusammen. Im Allgemeinen wird η klein und α gross, auch wird der Radius R des Luftkreises von der Axe DF' bis zum Schwerpunkte C des Tisches klein sein; die Gesellschaft der Tischrücker braucht also nur mit mässiger, ja unter Umständen sogar mit sehr kleiner oder gar keiner Geschwindigkeit um die Tischaxe zu schreiten; dabei werden aber die Hände eine sehr rasche, der Winkelgeschwindigkeit α oder der scheinbaren Bewegung β, womit der tiefste Punkt B_1 auf und niedersteigt, entsprechende Bewegung verspüren und ihr folgen, falls nicht der Radius R so gross wird, dass selbst die Körper der Gesellschaft dieser Bewegung folgen müssen.

Das periodische Niedersinken des Punktes B_1 ist für die dort auf-

gelegte Hand eine natürliche Veranlassung zur Ausübung des Druckes w, und da dieser Punkt von selbst, d. h. ohne den Willen und das Bewusstsein der Gesellschaft den Kreis der Tischplatte durchläuft, so wird der Druck w von der im Kreise stehenden Gesellschaft gerade so, wie das Experiment es erfordert, willenlos ausgeübt. Ferner afficiren die aufgelegten Hände, indem die Gesellschaft der Rotation η einfach folgt, vermöge der Adhäsion zwischen den Händen und der Tischplatte diese Platte in der Richtung dieser Rotation, ersetzen also unwillkürlich die durch die wälzende Reibung und durch Stösse allmählich sich verzehrende lebendige Kraft. Ist die Rotation η null, so ist ein Seitenschub auf den Tisch überhaupt nicht nöthig; die Gesellschaft kann alsdann stillstehend durch den periodischen schwachen Druck w die Wälzbewegung des Tisches unterhalten.

Unverkennbar hat die Bewegung des Tisches etwas sehr Eigenthümliches. Ganz unbedeutende Druckkräfte w und höchst geringfügige Seitenpressungen sind ausreichend, selbst einen schweren Tisch in Bewegung zu erhalten. Auch wenn die Rotation η des Tisches um seine Axe hierbei ziemlich gering bleibt, kann er eine lebhafte Fortschrittsbewegung αR annehmen, ganz besonders kann sich aber hiermit eine stürmische Rollbewegung α, ein rasch umlaufendes Heben und Senken gleich einer auf- und niedergehenden Wellenbewegung verbinden, von welcher die Eingeweihten sagen **„der Tisch bäumt sich"**. Während die Rotation eine Bewegung in der Richtung $G_1 B_1$ ist, geht die Fortschrittsbewegung im Laufkreise BHK in entgegengesetzter Richtung $B_1 G_1$ herum; gleichzeitig sinkt ein von B_1 gegen G_1 liegender Punkt der Tischplatte herab, während ein von B_1 gegen G_1 hin liegender Punkt ansteigt. Indem also ein Tischrücker der Bewegung des Tisches folgt, bäumt sich bald der Tisch gegen seine Hand, bald senkt er sich unter seiner Hand. Diese ganze Bewegung macht sich für die aufliegende Hand fühlbar und charakterisirt sich sofort als eine sehr eigenthümliche und energische; sie hängt aber durchaus nicht von dem Willen des Einzelnen, ja noch nicht einmal von dem der ganzen Gesellschaft, sondern von dem gegebenen mechanischen Systeme, insbesondere von der zufälligen Neigung ψ des Tisches ab, und wird durch die schwachen, unregelmässigen und unwillkürlichen Pressungen der Hände unterhalten. Ein beabsichtigter starker Druck oder Schub kann zwar die Bewegung alteriren, verstärken oder schwächen, aber bei einem schweren Tische nur sehr allmählich und nicht in einem berechneten Maasse. Ein mässiger widerstrebender Druck erweist sich als unwirksam und selbst von einem mässigen Drucke in günstiger Richtung kann man nicht momentan

einen erheblichen Effect verspüren. Der augenblickliche Zustand der Bewegung ist viemehr das Resultat der Gesammtwirkung aller früheren, von so verschiedenen Personen ausgeübten Wirkungen. Im Allgemeinen liegt in der Bewegung des Tisches eine unwillkürliche Nöthigung zum Nachfolgen der darauf ruhenden Hände, welche mit dem Tische in Berührung bleiben wollen, und demgemäss zur unbewussten Ausübung der erforderlichen schwachen Pressungen. Da nun zwischen diesen unmerklichen Pressungen und der daraus hervorgehenden eigenthümlichen kräftigen und stetigen Bewegung, welche bei der Schwere des Tisches einen grossen Kraftaufwand vermuthen lässt, keine leicht übersehbare Beziehung besteht, so kündigt sich die Bewegung des Tisches dem Gefühle als eine selbstständige an, welcher gegenüber die Bewegung des tastenden Tischrückers als eine unfreiwillige oder vom Tische erzwungene erscheint. Was Wunder, wenn die grosse Menge in der Unkenntniss des natürlichen mechanischen Zusammenhanges in dem Tische eine Art von Spukeding wittert, welches durch das geduldige Ausharren der in Kettenform verschlungenen Geisterbeschwörer endlich ungeduldig wird und den Tisch mitsammt der gläubigen Gesellschaft in eine Art Veitstanz versetzt!

VIII.

Ueber das Integral $\int \frac{dQ}{T}$.

Von J. Bauschinger.

In einer, im 1. Hefte des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift (S. 31 bis 46) abgedruckten Abhandlung macht Herr Clausius über eine Arbeit von mir, welche im vorigen Jahrgange derselben Zeitschrift enthalten ist, einige Bemerkungen, auf welche ich mir folgende Entgegnung erlauben zu dürfen glaube.

Zu der Zeit, als ich meine Abhandlung:*) „Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie für beliebige Processe etc." schrieb, waren über den Ausdruck

$$\int \frac{dQ}{T},$$

worin Q die einem Körper zugeführte oder entzogene Wärme und T die absolute Temperatur, die er dabei hat, bezeichnet, zwei Untersuchungen veröffentlicht, beide von Clausius, nämlich: 1) „Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie"**) und 2) „Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit".***) In der ersten entwickelt der Verfasser die Sätze: 1) Dass das Integral $\int \frac{dQ}{T}$, worin T jedoch vorläufig noch allgemein eine Function der Temperatur bedeutet, ausgedehnt auf umkehrbare Kreisprocesse, Null ist, und 2) dass eben jenes Integral für nicht umkehrbare Kreisprocesse stets einen negativen Werth hat, vorausgesetzt, dass man eine, dem Körper zugeführte Wärmemenge als positiv betrachtet. Aus dem ersten

*) Siehe diese Zeitschrift, X. Bd., S. 109.

**) Poggend. Annalen, Bd. XCIII, S. 481 und Clausius' Abhandlungensammlung S. 127.

***) Poggend. Annalen, Bd. CXVI, S. 73 und Clausius' Abhandlungensammlung S. 242.

Satze folgt, dass der Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ (natürlich für umkehrbare Processe) ein vollständiger Differentialausdruck sein muss, und unter Zuhilfenahme des, aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie folgenden Werthes für dQ ergiebt sich daraus die Gleichung:

$$\frac{dQ}{dv} = AT\frac{dp}{dT}$$

in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise. Indem man dieselbe endlich auf ein Gas anwendet, welches das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz befolgt, und dessen innere Arbeit Null ist, findet sich, dass T nichts anderes als die absolute Temperatur des Körpers sein kann. — Was den zweiten obigen Satz anbelangt, so bestimmt Clausius den Werth des Integrals $\int \frac{dQ}{T}$ allgemein nicht näher, sondern begnügt sich (später) da, wo er denselben braucht, ihn für jeden speciellen Fall besonders zu entwickeln, und zwar natürlich stets nur in seiner Anwendung auf Kreisprocesse, wie denn in dieser ersten Abhandlung Clausius ausschliesslich von Kreisprocessen spricht. Und diese Beschränkung legt er sich, wie er in der zweiten oben citirten Abhandlung selbst sagt, deshalb auf, „weil die innere Arbeit meistens so wenig bekannt, und mit einer andern ebenfalls unbekannten Grösse in solcher Weise verbunden ist, dass man sich bei ihrer Behandlung einigermaassen von Wahrscheinlichkeitsgründen leiten lassen muss, während die äussere Arbeit der unmittelbaren Beobachtung und Messung zugänglich ist, und eine strengere Behandlung zulässt etc. etc.".

Im weiteren Verlaufe dieser zweiten Abhandlung bestimmt dann Clausius den Werth des in Rede stehenden Ausdruckes unter Zuhilfenahme des Begriffes der Disgregation und der schon in meiner Abhandlung (a. a. O. S. 110) angeführten Hypothese. Diese Bestimmung ist, wie er in seiner Entgegnung auf meine Arbeit (siehe diese Zeitschrift, XI. Bd. S. 33) selbst sagt, der eine Zweck jener Abhandlung, und insofern habe ich mir auch erlaubt, die meinige damit in Vergleich zu bringen. Dass ich dabei nicht beachtet hätte, dass Herr Clausius auch noch den zweiten Zweck mit seiner Arbeit verband, die physikalische Bedeutung jenes Ausdruckes zu ergründen, kann doch sicherlich aus jener Gegenüberstellung nicht gefolgert werden, wie mir denn auch nichts ferner lag, als die Meinung, dass meine Untersuchung in dieser Beziehung die Clausius'sche ersetzen oder gar verdrängen solle.

Der Abfassung meiner Abhandlung lag vielmehr einfach der Gedanke zu Grunde, es müsse sich bei irgendwelcher Zustandsänderung eines Körpers lediglich aus den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie, ohne Zuhilfenahme irgend einer Hypothese, für das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ ein allgemeiner Ausdruck ableiten lassen. Dieser Ausdruck sollte dann auf den speciellen Fall eines Kreisprocesses angewendet und durch Ver-

gleichung des so gewonnenen Werthes mit den beiden von Clausius in seiner ersten Abhandlung für Kreisprocesse entwickelten oben angeführten Sätzen eine scharfe Begriffsbestimmung von umkehrbar und nicht umkehrbar erhalten werden.

Dass der gesuchte allgemeine Ausdruck für $\int \frac{dQ}{T}$ sich müsse erlangen lassen, schloss ich aus der näheren Betrachtung der in meiner oben citirten Abhandlung unter No. 18 (S. 115) mitgetheilten und entwickelten Gleichung, die ich schon früher gefunden hatte (ohne zu wissen, dass schon Rankine eine ähnliche, wenn auch nicht in so allgemeiner Form, aufgestellte habe). Von dieser Gleichung zu der No. 25 (S. 117 meiner Abhandlung), in welcher ich den gesuchten Werth für $\int \frac{dQ}{T}$ gefunden zu haben meine, war eben kein sehr grosser Schritt mehr zu thun. Und aus dieser letzten Relation endlich war unschwer die No. 33 und 33*a* (S. 120) für Kreisprocesse abzuleiten, womit die von Clausius im Allgemeinen noch unbestimmt gelassene Grösse N gefunden war. Daraus ergab sich sofort, dass diese Grösse allemal Null wird, wenn in dem untersuchten Kreisprocesse die Zustandsgleichungen des Körpers (so nenne ich die Relationen zwischen Druck, specifischem Volumen und Temperatur) durchweg dieselbe Form behalten, und damit war die Bestimmung gewonnen, dass die von Clausius so genannten umkehrbaren und nicht umkehrbaren Processe solche seien, bei denen die Zustandsgleichungen des Körpers ihre Form beibehalten oder verändern.

Allerdings hätte ich auf dem oben näher bezeichneten Wege, an den Clausius in seiner Entgegnung erinnert, und auf den er, wie mir wohl bekannt war, schon früher hingewiesen hat, zur Ueberzeugung kommen können, dass für den speciellen Fall von umkehrbaren Processen (im Clausius'schen Sinn) der Ausdruck $\frac{dQ}{T}$ ein vollkommener, den Bedingungen der Integrabilität genügender Differentialausdruck sein und sich daher das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ finden lassen müsse. Aber 1. war ja mit dieser Ueberzeugung von seiner Existenz jener Werth selbst noch nicht gefunden; 2. wollte ich einen ganz allgemein, für jeden Process giltigen Werth für $\int \frac{dQ}{T}$ ableiten und 3. konnte ich die Clausius'schen Sätze, die ich ja unter näherer Bestimmung der ihnen zu Grunde liegenden Begriffe von umkehrbar und nicht umkehrbar aus meinem allgemeinen Resultat erst wieder herholen wollte, nicht schon zur Ableitung dieses Resultates benutzen.

Ich dächte also, die Sache wäre einfach und eine grössere Allgemeinheit meines, unabhängig von den Clausius'schen Entwickelungen abgeleiteten Satzes schon um deshalb um so weniger zu bezweifeln, als ich ja eben thatsächlich die Clausius'schen Sätze als specielle Fälle daraus abgeleitet

habe. Ich war auch weit davon entfernt, zu erwarten, dass sich Clausius in seiner Entgegnung hiegegen wenden würde; vielmehr glaubte ich, einer Aeusserung desselben über meine nähere Bestimmung von „umkehrbar" und „nicht umkehrbar" entgegensehen zu dürfen. Denn, in der That, hier scheinen unsere Ansichten aus einander zu gehen, wenigstens in dem einen Fall des Ueberströmens von Gasen oder Dämpfen aus einem Raum in einen andern, wo ein geringerer Druck herrscht. Diesen Vorgang betrachtet Herr Clausius als einen nicht umkehrbaren Process, weil das Gas auf einen Theil seiner Oberfläche einen geringeren Druck erleidet, als die Spannung ist, die es selbst hat.*) Ich habe im Eingange zu meiner Abhandlung über das Ausströmen der Gase**) schon einmal Gelegenheit gehabt, mich darüber auszusprechen, wie ich diesen Vorgang ansehe. Hier nun sei es mir erlaubt, darauf hinzuweisen, dass sich während der ganzen Dauer desselben die Form der Zustandsgleichungen des Gases oder Dampfes nicht ändert, dass somit, in meinem Sinne, der Vorgang in umkehrbarer Weise stattfindet. Clausius behandelt einen solchen Fall in seiner Theorie der Dampfmaschinen, indem er das Einströmen des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder einer Dampfmaschine, in welch' letzterem in Folge der Bewegung des Kolbens fortwährend ein geringerer Druck herrscht als in jenem, näher untersucht.***) Er ergänzte dabei den in Rede stehenden Process zu einen Kreisprocess, wendet auf denselben den Satz von der Aequivalenz zwischen Wärme und Arbeit an und entwickelt alsdann in No. 36 seiner Abhandlung den Werth N oder den des Integrals $-\int\frac{dQ}{T}$; dieser Werth müsste, meinen Ansichten zu Folge, da in dem ganzen Process nirgends eine Formänderung der Zustandsgleichungen eintritt, Null sein; der Clausius'sche Ausdruck aber ist nicht Null; er würde es nur dann werden, wenn man annehmen wollte, dass der zu Ende des Vorganges im Cylinder enthaltenen Dampfmasse während des Einströmens weder Wärme mitgetheilt, noch entzogen wird. Und doch ist dies sicherlich nicht der Fall, wie auch Herr Clausius, stillschweigend wenigstens, annimmt, da er sonst eben Null dafür gesetzt haben würde. Der im Kessel zurückbleibende Dampf, indem er sich, des ausgeströmten Platz einnehmend, ausdehnt, leistet eine Arbeit, die in Form von lebendiger Potenz im ausströmenden enthalten ist; indem letzterer im Cylinder zur Ruhe kommt, setzt sich jene in Wärme um. Diese Wärme hat Clausius in seiner Bestimmung von N nicht mitgerechnet. Die Bestimmung des Antheils von $\int\frac{dQ}{T}$, der auf sie trifft, ist auch, bei der Complicirtheit des Vorgan-

*) Vergl. Poggend. Annalen, Bd. 97, S. 525 und Clausius' Abhandlungensammlung S. 164, Anmerk. und S. 200.

**) Siehe diese Zeitschrift, Bd. VIII, S. 83.

***) Siehe Poggend. Annalen, Bd. 97, S. 519—525 und Abhandlungensammlung S. 194—200.

ges, in Folge deren wir wohl kaum hoffen dürfen, die Temperatur für jeden Moment desselben bestimmen zu können, auf den bisher eingeschlagenen Wegen kaum möglich. Meine allgemeine Formel 25) oder noch besser die für Dämpfe speciell giltige No. 39 (S. 117 und 123 meiner bereits citirten, letzten Abhandlung) giebt den Werth jenes gesuchten Integralantheils, unbekümmert um die Zwischenvorgänge, sehr einfach lediglich aus dem Anfangs- und Endzustand. Und dieser Werth findet sich, wie man sofort sieht, dem von Clausius gefundenen übrigen Theil des in Rede stehenden Integrals für den ganzen Kreisprocess genau gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Die Summe beider Theile ist folglich Null, wie es mein Satz verlangt.

Ausser dem erwähnten begeht aber Herr Clausius bei der Untersuchung des in Rede stehenden Vorganges noch einige Versehen, die sich jedoch bei der Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Wärme und Arbeit theils unter sich, theils gegen jenes aufheben, so dass die von Clausius erhaltene Formel XIII) (Poggend. Annalen, Bd. 97, S. 524, Abhandlungensammlung S. 198), welche die Beschaffenheit des, nach der Admission im Cylinder enthaltenen Dampfes finden lässt, doch richtig bleibt. Deswegen, und weil der Fall geeignet ist, zwischen unseren beiden Ansichten zu entscheiden, sei es mir gestattet, mit wenigen Worten näher auf den Vorgang des Ueberströmens des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder einer Dampfmaschine einzugehen.

Sei p_0 der Druck, t_0 die Temperatur, x_0 das Mischungsverhältniss (Gewicht des trockenen Dampfes in der Gewichtseinheit) und v_0 das specifische Volumen des Dampfes im Kessel. Der vom Kolben beschriebene Raum während eines ganzen Kolbenhubs sei V; f sei der Füllungsgrad, folglich fV der während der Admission vom Kolben beschriebene Raum; εV endlich sei der schädliche Raum. In demselben befinde sich, vor Eröffnung der Einströmungskanäle, Dampf von der Beschaffenheit p_0', t_0', x_0', v_0', so dass die in ihm enthaltene Dampfmenge $\frac{\varepsilon V}{v_0'} = \mu$ ist. Während der Admission herrsche im Cylinder der mittlere Druck p_1'. Zu Ende derselben aber sei p', t', x', v' die Beschaffenheit des Dampfes im Cylinder, also $\frac{(\varepsilon + f)V}{v'} - \frac{\varepsilon V}{v_0'} = m$ das Gewicht des eingeströmten Dampfes.

Clausius denkt sich die Gesammtmasse $m + \mu$ des zu Ende des Einströmens im Cylinder enthaltenen Dampfes auf folgendem Wege in ihren Anfangszustand zurückgeführt und dadurch jenen Vorgang zu einen Kreisprocess ergänzt: Der Dampftheil $(m + \mu)x'$ wird im Cylinder durch Zurückschieben des Kolbens condensirt und dabei der Masse auf irgend eine Weise so viel Wärme entzogen, dass ihre Temperatur t' constant bleibt; dann wird von der ganzen flüssigen Masse der Theil m in den Kessel zurückgepresst, wo er die ursprüngliche Temperatur t_0 wieder annimmt. Der übrige Theil μ

wird zuerst im flüssigen Zustande von t' bis t_0' abgekühlt und bei dieser Temperatur der Theil $\mu x_0'$ in Dampf verwandelt, wobei der Kolben wieder so weit zurückweicht, dass dieser Dampf sein ursprüngliches Volumen εV wieder annehmen kann.

Dabei sind, nach Clausius, folgende Wärmemengen aufgenommen worden:

1. Im Kessel, wo die Wassermasse m von der Temperatur t' bis t_0 erwärmt, und bei der letzteren Temperatur der Theil $m x_0$ in Dampf verwandelt wird, mit c die specifische Wärme des Wassers bezeichnet:

$$m r_0 x_0 + m \int_{t'}^{t_0} c\,dt = m r_0 x_0 + m(k_0 - k');$$

2. bei der Condensation des Theiles $(m+\mu)x'$ bei der Temperatur t'

$$-(m+\mu) r' x';$$

3. bei der Abkühlung des Theiles μ von t' auf t_0'

$$-\mu \int_{t_0'}^{t'} c\,dt = -\mu(k' - k_0');$$

4. bei der Verdampfung des Theiles $\mu x_0'$ bei der Temperatur t_0'

$$\mu r_0' x_0';$$

im Ganzen also:

$$Q = m r_0 x_0 - (m+\mu) r' x' + \mu r_0' x_0' + m(k_0' - k') - \mu(k' - k_0').$$

Die bei dem ganzen Kreisprocess geleisteten oder absorbirten Arbeitsgrössen sind, gleichfalls nach Clausius:

1. Der Kolben wird mit dem Drucke p_1' um den Raum $f V$ vorwärts geschoben und daher die Arbeit geleistet:

$$f V p_1';$$

2. die zur Condensation der Masse $(m+\mu)x'$ erforderliche Arbeit ist, mit σ das specifische Volumen des Wassers bezeichnet:

$$-[(m+\mu)v' - (m+\mu)\sigma]p',$$

oder, wenn man, wie üblich, für $v' - \sigma$ den Werth $u' x'$ setzt:

$$-(m+\mu) u' x' p';$$

3. die zum Zurückpressen der Masse m in dem Kessel nöthige:

$$-m \sigma p_0;$$

4. die beim Verdampfen des Theiles $\mu x_0'$ geleistete:

$$(\mu v_0' - \mu\sigma) p_0' = \mu u_0' x_0' p_0';$$

im Ganzen:

$$W = f V p_1' - (m+\mu) u' x' p' - m\sigma p_0 + \mu x' u_0' p_0'.$$

Da in dem Kreisprocess Wärme und äussere Arbeit äquivalent, also

$$Q = A W$$

ist, so folgt hieraus, da ausserdem noch

$$f V = (m+\mu) v' - \mu v_0' = (m+\mu)(u' x' + \sigma) - \mu(u_0' x_0' + \sigma) = (m+\mu) u' x' + m\sigma - \mu x_0' u_0',$$

die Gleichung:

$$\text{I)}\quad (m+\mu)x'[r'+Au'(p_1'-p')] = m r_0 x_0 + m(k_0-k') + \mu r_0' x_0' - \mu(k'-k_0') + A\mu x_0' u_0'(p_1'-p_0') + Am\sigma(p_0-p_1').$$

Den Werth des Integrals $\int \frac{dQ}{T}$ findet Clausius folgendermaassen:

Die Mittheilung der Wärmemengen $m x_0 r_0$, $-(m+\mu)x'r'$ und $\mu x_0' r_0'$ geschieht bei den constanten Temperaturen t_0, t' und t_0'; die von ihnen herrührenden Theile des Integrals sind also:

$$\frac{m r_0 x_0}{a+t_0};\quad -\frac{(m+\mu)r'x'}{a+t'};\quad \frac{\mu r_0' x_0'}{a+t_0'},$$

mit a die absolute Temperatur des Nullpunktes, 273° C., bezeichnet. Für die noch fehlenden beiden Theile der gesammten mitgetheilten Wärmemenge finden sich die entsprechenden Theile des Integrals als

$$m\int_{t'}^{t_0} \frac{c}{a+t}\,dt = m(K_0-K'),$$

$$-\mu\int_{t_0'}^{t'} \frac{c}{a+t}\,dt = -\mu(K'-K_0'),$$

so dass man hat:

$$\text{II)}\quad \int\frac{dQ}{T} = \frac{m r_0 x_0}{a+t_0} - \frac{(m+\mu)r'x'}{a+t'} + \frac{\mu r_0' x_0'}{a+t_0'} + m(K_0-K') - \mu(K'-K_0').$$

Aber, wie bereits erwähnt, hat Herr Clausius bei dieser ganzen Entwickelung übersehen, dass der Dampf im Kessel, indem er sich, den ausströmenden m verdrängend, um dessen Volumen $m v_0$ ausdehnt, eine Arbeit $m p_0 v_0$ leistet, die zuerst als lebendige Potenz und dann als Wärme $A m p_0 v_0$ von dem ausströmenden Dampfe aufgenommen wird. Ferner wird, indem die Wassermasse m im Kessel bei der Temperatur t_0 wieder verdampft, die Arbeit $m(v_0-\sigma)p_0$, entsprechend dem Aequivalent $Am(v_0-\sigma)p_0$, von derselben geleistet. — Endlich ist zum Hineinpressen der Wassermasse m in den Kessel nicht blos die Arbeit $-m\sigma p_0$ erforderlich, sondern dieselbe Arbeit $+m\sigma p_0$ wird zugleich auch von derselben geleistet, so dass sich beide aufheben, wie es auch nicht anders möglich ist, da ja jene Wassermasse selbst nicht die geringste Veränderung bei ihrem Hineinschaffen in den Kessel erleidet. Bei der Anwendung des Aequivalentensatzes heben sich die sämmtlichen eben ergänzten Glieder wieder ab, bis auf den Theil $-Am\sigma p_0$, den Clausius allein hat. Die obige Formel I) bleibt also richtig.*) Aber bei der Aus-

*) Diese Formel lässt sich auf sehr einfache Weise auch auf dem Wege, den ich in meiner Abhandlung über das Ausströmen der Dämpfe eingeschlagen habe (siehe diese Zeitschrift Bd. VIII, S. 429—443) ableiten. Bezeichnen wir für den Augenblick mit V_0 das Gesammtvolumen des im Kessel enthaltenen Dampfes, mit p_0, v_0, t_0, x_0 den Anfangszustand in demselben und mit p, v, t, x den Zustand des im Kessel zurückge-

werthung des Integrals $\int \frac{dQ}{T}$ kommt von jenen Ergänzungen nur die Wärme Amv_0p_0 in Betracht. Da jedoch die Temperatur, bei welcher sie sich dem

---

bliebenen Dampfes nach der Füllung des Cylinders, eine Erneuerung des Dampfes in ersterem nicht vorausgesetzt, so ist offenbar die ausgeströmte Dampfmasse

$$1)\qquad m = \frac{V_0}{v_0} - \frac{V_0}{v} = \frac{(\varepsilon+f)V}{v'} - \frac{\varepsilon V}{v_0'}.$$

Nun ist nach geschehener Füllung des Cylinders die Wirkungsfunction der gesammten Dampfmasse nicht mehr gleich der ursprünglichen, sondern um die an dem Kolben geleistete äussere Arbeit fVp_1', resp. deren Aequivalent $AfVp_1'$ kleiner geworden. Man hat demnach die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{V_0}{v_0}(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)+\frac{\varepsilon V}{v_0'}(w_1+\varrho_0' x_0'-\varrho_1 x_1+k_0'-k_1)$$
$$=\frac{V_0}{v}(w_1+\varrho x-\varrho_1 x_1+k-k_1)+\frac{(\varepsilon+f)V}{v'}(w_1+\varrho' x'-\varrho_1 x_1+k'-k_1)+AfVp_1'$$

mit dem unten angehängten Index 1 einen beliebigen Urzustand bezeichnet. Nun ist aber, wie leicht zu sehen, wenn man annimmt, dass der Kessel gegen den Cylinder unendlich gross sei, oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, dass sich der ursprüngliche Zustand in ersterem durch die Heizung constant erhält,

$$3)\qquad \frac{V_0}{v_0}(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)=\frac{V_0}{v}(w_1+\varrho x-\varrho_1 x_1+k-k_1)$$
$$+m(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)+Amp_0v_0,$$

wodurch obige Gleichung übergeht in

$$4)\qquad \frac{(\varepsilon+f)V}{v'}(w_1+\varrho' x'-\varrho_1 x_1+k'-k_1)-m(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)$$
$$-Amp_0v_0+AfVp_1'=\frac{\varepsilon V}{v_0'}(w_1+\varrho_0' x_0'-\varrho_1 x_1+k_0'-k_1),$$

oder mit Berücksichtigung der obigen Gleichung 1)

$$5)\qquad \frac{(\varepsilon+f)V}{v'}(\varrho' x'+k')-m(\varrho_0 x_0+k_0)-Amp_0v_0+AfVp_1'=\frac{\varepsilon V}{v_0'}(\varrho_0' x_0'+k_0'),$$

woraus durch bekannte Umformungen und unter Benutzung der, oben im Text angeführten Gleichung für fV die obige Clausius'sche Formel I) hervorgeht.

Es sei mir erlaubt bei dieser Gelegenheit einen Fehler zu berichtigen, den ich in meiner oben citirten Abhandlung über das Ausströmen der Dämpfe übersehen habe, und zwar bei der Anwendung der allgemeinen Gleichung 32) (a. a. O. S. 437) auf den speciellen Fall eines unendlich grossen Ausströmungsgefässes, also bei der Entwickelung der Gleichung 40) (a. a. O. S. 440). Indem ich dort nämlich

$$\frac{V}{v}(\varrho x+k)=\frac{V}{v_0}(\varrho x+k)-m(\varrho x+k)$$

setzte und dann $\frac{V}{v_0}(\varrho x+k)$ gegen $\frac{V}{v_0}(\varrho_0 x_0+k_0)$ hob, schloss ich: Die Wirkungsfunction im Ausströmungsgefässe vermindere sich um die Wirkungsfunction $m(\varrho_0 x_0+k_0)$ der ausgeströmten Masse. Aber sie vermindert sich auch noch um die zum Austreiben der Masse m erforderliche Arbeit resp. deren Aequivalent, welches, bei unendlicher Grösse des Ausströmungsgefässes, einfach gleich Amv_0p_0 ist. Wir erhalten somit in der Gleichung, welche der No. 32 (a. a. O. S. 437) unmittelbar vorhergeht,

$$\frac{V}{v_0}(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)=\frac{V}{v}(w_1+\varrho x-\varrho_1 x_1+k-k_1)$$
$$+m(w_1+\varrho_0 x_0-\varrho_1 x_1+k_0-k_1)+Amv_0p_0,$$

Dampfe im Cylinder mittheilt, unbekannt ist, so lässt sich der auf sie treffende Antheil jenes Integrals auf den bisherigen Wegen nicht bestimmen. Meine, in meiner letzten Abhandlung entwickelte allgemeine, aber für Dämpfe bereits eingerichtete Formel 39) (siehe diese Zeitschrift, Bd. X, S. 123) liefert unmittelbar aus den Anfangszuständen p_0, t_0, x_0, v_0 und p_0', t_0', x_0', v_0' und dem Endzustande p', t', x', v' der zuletzt im Cylinder enthaltenen gesammten Dampfmasse $m+\mu$ den Integralantheil:

$$\frac{m r' x'}{a+t'} - \frac{m r_0 x_0}{a+t_0} + m(K'-K_0) + \frac{\mu r' x'}{a+t'} - \frac{\mu r_0' x_0'}{a+t_0'} + \mu(K'-K_0'),$$

oder

$$-\frac{m r_0 x_0}{a+t_0} + \frac{(m+\mu) r' x'}{a+t'} - \frac{\mu r_0' x_0'}{a+t_0'} - m(K_0-K') + \mu(K'-K_0'),$$

der mit dem in Formel II) enthaltenen zusammen Null giebt, so dass man für den ganzen untersuchten Kreisprocess in der That

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

hat.

Das gesammte Integral $\int \frac{dQ}{T}$ für den ganzen Kreisprocess kann übrigens auf sehr einfachem Wege aus meiner oben citirten Formel 39) abgeleitet werden. Dieselbe ergiebt:

---

wodurch jene Gleichung übergeht in

$$\frac{V'}{v_0'}(w_1+\varrho_0' x_0' - \varrho_1 x_1 + k_0' - k') = \frac{V'}{v'}(w_1 + \varrho' x' - \varrho_1 x_1 + k' - k_1)$$
$$- m(w_1 + \varrho_0 x_0 - \varrho_1 x_1 + k_0 - k_1) - A m v_0 p_0,$$

oder mit Benutzung der Gleichung 31) (a. a. O. S. 437)

$$\frac{\varrho' x' + k' - \varrho_0 x_0 - k_0}{v'} = \frac{\varrho_0' x_0' + k_0' - \varrho_0 x_0 - k_0}{v_0'} + A p_0 \frac{m v_0}{V'},$$

welche Formel an Stelle der unrichtigen No. 40 (a. a. O. S. 440) zu setzen ist. Dadurch wird dann natürlich auch die Tabelle I (a. a. O. S. 442) etwas anders, wie man leicht berichtigen kann. Wir setzen die so verbesserte Tabelle hierher:

Tabelle I.

$V=\infty$; $p_0=5$ Atm; $x_0=0{,}80$; $p_0'=1$ Atm; $x_0'=0{,}40$; 0,60; 0,80; 0,90; 1,00

p'	γ	x' für $x_0'=$				
		0,40	0,60	0,80	0,90	1,00
Atm.	Meter					
1	661,2	0,40	0,60	0,80	0,90	1,00
1,1		0,4188	0,6167	0,8067	0,8994	0,9904
1,5		0,4789	0,6649	0,8245	0,8966	0,9639
2	513,5	0,5325	0,7029	0,8362	0,8929	0,9440
3	383,2	0,6012	0,7451	0,8460	0,8860	0,9209
4	255,3	0,6431	0,7672	0,8488	0,8801	0,9068
5	0	0,6712	0,7803	0,8491	0,8749	0,8599

1. Für den Uebergang der Masse m aus dem Zustande p_0, x_0, t_0 in den p', x', t' als entsprechenden Integraltheil:

$$\frac{m\,r'\,x'}{a+t'} - \frac{m\,r_0 x_0}{a+t_0} + m\,(K' - K_0);$$

2. für den Uebergang der Masse μ aus dem Zustande p_0', x_0', t_0' in den p', x', t':

$$\frac{\mu\,r'\,x'}{a+t'} - \frac{\mu\,r_0'\,x_0'}{a+t_0'} + \mu\,(K' - K_0');$$

3. für den Uebergang der Masse $(m+\mu)$ aus dem Zustande p', x', t' in den p', $(x=0)$, t':

$$-\frac{(m+\mu)\,r'\,x'}{a+t'};$$

4. für den Uebergang der Masse m aus dem Zustande p', $(x=0)$, t' in den p_0, $(x=0)$, t_0:

$$+\,m\,(K_0 - K');$$

5. für den Uebergang der Masse m aus dem Zustande p_0, $(x=0)$, t_0 in den p_0, x_0, t_0:

$$+\frac{m\,r_0 x_0}{a+t_0};$$

6. für den Uebergang der Masse μ aus p', $(x=0)$, t' in p_0', $(x=0)$, t_0';

$$+\,\mu\,(K_0' - K')$$

7. für den Uebergang der Masse μ aus p_0', $(x=0)$, t_0' in den Zustand p_0', x_0', t_0':

$$+\frac{\mu\,r_0'\,x_0'}{a+t_0'}.$$

Die Summe aller dieser Theile ist, wie man sieht t, in der That Null, wie oben, und wie es nach meinem Satze auch sein muss, da sich während des ganzen Kreisprocesses nirgends die Form der Zustandsgleichungen ändert.

Ich erlaube mir noch, die Bemerkung hinzuzufügen, dass von den beiden Gleichungen, welche Clausius in seiner letzten Abhandlung unter No. 38 und 39 (siehe diese Zeitschrift Bd. XI, S. 45) entwickelt, nicht blos die erste, sondern auch die zweite für dU bereits in meiner letzten Arbeit mitgetheilt ist, und zwar letztere unter No. 11 (siehe diese Zeitschrift Bd X, S. 113) in Verbindung mit der No. 16 (a. a. O. S. 114) für c_2.

Schliesslich nur noch ein paar Worte betreffs der letzten Bemerkung des Herrn Clausius über eine Stelle meiner Arbeit (siehe diese Zeitschrift Bd. XI, S. 34). — Wenn ich die Gleichung

$$\frac{dQ}{dv} = A\,(a+t)\,\frac{dp}{dt}$$

mit den Worten citirte, dass sie schon von Carnot, nur in anderer Form, aufgestellt worden sei, so war es mir dabei lediglich um die Einreihung dieser Gleichung in den Entwickelungsgang der mechanischen Wärmetheorie zu thun. Es sollte mir sehr leid thun, wenn sich durch jene Worte irgend

Jemand verleiten liesse, zu vergessen, dass Herr Clausius durch seine Bestimmung der Carnot'schen Temperaturfunction die mechanische Wärmetheorie um einen der bedeutendsten Schritte weiter gefördert hat. Ueberhaupt ist vielleicht Niemand weiter davon entfernt, als ich, die grossen Verdienste, welche sich Herr Clausius um die Entwickelung nicht blos, sondern, wie man wohl sagen darf, auch um die Begründung der heutigen mechanischen Wärmetheorie erworben hat, zu verkennen oder gar schmälern zu wollen.

Fürth, im Februar 1866.

Kleinere Mittheilungen.

VI. Ueber Volumina von Tetraedern.

Wenn ein Tetraeder $ABCD$ und ausserhalb desselben ein Punkt O gegeben sind, und wir verbinden den Punkt O mit den Tetraederecken A, B, C, D durch Gerade, so werden die Geraden OA, OB, OC, OD die den Punkten A, B, C, D gegenüberliegenden Tetraederflächen durchstossen. Die vier Durchstosspunkte bestimmen ein Tetraeder, ausserdem bilden je ein Eckpunkt des gegebenen Tetraeders mit denjenigen drei Durchstosspunkten, welche in den diese Ecke bildenden Tetraederflächen liegen, vier Tetraeder, und endlich bestimmen je zwei der Eckpunkte des gegebenen Tetraeders mit den den beiden übrigen Tetraederecken gegenüberliegenden Durchstosspunkten sechs Tetraeder, wir erhalten also im Ganzen eilf Tetraeder, deren Volumina V, V_1, V_2, V_3, V_4, V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{23}, V_{24}, V_{34} wir in Folgendem bestimmen wollen, indem wir die Coordinaten der Tetraederecken und die des Punktes O als bekannt voraussetzen.

Sind nun x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 die orthogonalen Coordinaten der Eckpunkte des Tetraeders $ABCD$ und ξ, η, ζ die des Punktes O, so entsprechen den Tetraederebenen die folgenden Gleichungen:

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \end{array}\right.$$

und den Verbindungslinien des Punktes O mit den Tetraederecken A, B, C, D die folgenden:

$$2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, & A_1' x + B_1' z + C_1' = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, & A_2' x + B_2' z + C_2' = 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 = 0, & A_3' x + B_3' z + C_3' = 0, \\ A_4 x + B_4 y + C_4 = 0, & A_4' x + B_4' z + C_4' = 0, \end{array}\right.$$

wenn wir der Kürze halber setzen:

$$3)\quad \left\{ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} = a_i, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_i} = b_i, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z_i} = c_i, \quad d_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \text{ etc. etc.} \right.$$

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_i = \eta - y_i, \quad A_i' = \zeta - z_i \\ B_i = B_i' = -(\xi - x_i)\,. \\ C_i = \xi y_i - \eta x_i, \quad C_i' = \xi z_i - \zeta x_i \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir endlich noch die Coordinaten derjenigen Punkte, in welchen die Geraden OA, OB, OC, OD die den Punkten A, B, C, D gegenüberliegenden Tetraederflächen durchstossen, mit $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$; $x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}$ etc. etc., so erhalten wir diese durch Auflösung von je drei solchen Gleichungen der Systeme 1) und 2), deren Coefficienten gleiche untere Indices besitzen. Es ist dann:

$$5)\quad \left\{ x^{(i)} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ A_i & B_i & 0 \\ A_i' & 0 & B_i' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d_i & b_i & c_i \\ C_i & B_i & 0 \\ C_i' & 0 & B_i' \end{vmatrix}, \quad y_i \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ A_i & B_i & 0 \\ A_i' & 0 & B_i' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_i & d_i & c_i \\ A_i & C_i & 0 \\ A_i' & C_i' & B_i' \end{vmatrix}, \right.$$

$$z_i \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ A_i & B_i & 0 \\ A_i' & 0 & B_i' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_i & b_i & d_i \\ A_i & B_i & C_i \\ A_i' & 0 & C_i' \end{vmatrix}.$$

Durch Entwickelung der Determinanten in den vorstehenden Ausdrücken, sowie durch Einsetzung der Werthe für die Coefficienten a_i, b_i, c_i etc. etc. und durch einige Reductionen, indem wir:

$$6)\quad \begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \Delta_3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \Delta_4$$

setzen und bemerken, dass diesen Bezeichnungen gemäss:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Delta_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \Delta_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Delta}{\partial z_i}$$

ist, erhalten wir noch:

$$7)\quad \left\{ x^{(i)} = \frac{\Delta \xi - \Delta_i x_i}{\Delta - \Delta_i}, \quad y^{(i)} = \frac{\Delta \eta - \Delta_i y_i}{\Delta - \Delta_i}, \quad z^{(i)} = \frac{\Delta \zeta - \Delta_i z_i}{\Delta - \Delta_i}. \right.$$

Für die Volumina der elf Tetraeder ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$8) \begin{cases} \pm 6V = \begin{vmatrix} 1 & x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ 1 & x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ 1 & x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \\ 1 & x^{(4)} & y^{(4)} & z^{(4)} \end{vmatrix}, \quad \pm 6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ 1 & x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \\ 1 & x^{(4)} & y^{(4)} & z^{(4)} \end{vmatrix}, \text{ etc. etc.} \\ \pm 6V_{12} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \\ 1 & x^{(4)} & y^{(4)} & z^{(4)} \end{vmatrix}, \text{ etc. etc.} \end{cases}$$

Der erste dieser Ausdrücke geht durch Einsetzung der Werthe für $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ etc. etc. über in:

$$9) \quad \pm 6V = \frac{1}{(\Delta-\Delta_1)(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \begin{vmatrix} \Delta-\Delta_1 & \Delta\xi-\Delta_1 x_1 & \Delta\eta-\Delta_1 y_1 & \Delta\zeta-\Delta_1 z_1 \\ \Delta-\Delta_2 & \Delta\xi-\Delta_2 x_2 & \Delta\eta-\Delta_2 y_2 & \Delta\zeta-\Delta_2 z_2 \\ \Delta-\Delta_3 & \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 \\ \Delta-\Delta_4 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende Determinante lässt sich nach einem bekannten Satze in eine Summe von sechszehn Determinanten desselben Grades zerlegen, von welchen im gegenwärtigen Fall elf identisch verschwinden. Es geht somit der vorstehende Ausdruck in den folgenden über:

$$\pm 6V = \frac{1}{(\Delta-\Delta_1)(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \left\{ \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \right.$$

$$- \Delta \begin{vmatrix} 1 & \Delta_1 x_1 & \Delta_1 y_1 & \Delta_1 z_1 \\ 1 & \Delta_2 x_2 & \Delta_2 y_2 & \Delta_2 z_2 \\ 1 & \Delta_3 x_3 & \Delta_3 y_3 & \Delta_3 z_3 \\ 1 & \Delta_4 x_4 & \Delta_4 y_4 & \Delta_4 z_4 \end{vmatrix} - \Delta\xi \begin{vmatrix} \Delta_1 & 1 & \Delta_1 y_1 & \Delta_1 z_1 \\ \Delta_2 & 1 & \Delta_2 y_2 & \Delta_2 z_2 \\ \Delta_3 & 1 & \Delta_3 y_3 & \Delta_3 z_3 \\ \Delta_4 & 1 & \Delta_4 y_4 & \Delta_4 z_4 \end{vmatrix} - \Delta\eta \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_1 x_1 & 1 & \Delta_1 z_1 \\ \Delta_2 & \Delta_2 x_2 & 1 & \Delta_2 z_2 \\ \Delta_3 & \Delta_3 x_3 & 1 & \Delta_3 z_3 \\ \Delta_4 & \Delta_4 x_4 & 1 & \Delta_4 z_4 \end{vmatrix}$$

$$\left. - \Delta\zeta \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_1 x_1 & \Delta_1 y_1 & 1 \\ \Delta_2 & \Delta_2 x_2 & \Delta_2 y_2 & 1 \\ \Delta_3 & \Delta_3 x_3 & \Delta_3 y_3 & 1 \\ \Delta_4 & \Delta_4 x_4 & \Delta_4 y_4 & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Die erste der rechts stehenden fünf Determinanten ist gleich Δ. Entwickeln wir dann die vier letzten Determinanten beziehungsweise nach der ersten, zweiten, dritten und vierten Verticalreihe in ihre Minoren, und ziehen diejenigen Glieder zusammen, welche die beziehungsweisen Factoren $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, $\Delta_3\Delta_4\Delta_1$, $\Delta_4\Delta_1\Delta_2$, $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ enthalten, so ergiebt sich:

$$10) \qquad \pm 2V = \Delta \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{(\Delta-\Delta_1)(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)}.$$

Setzen wir ferner in die zweite der Gleichungen 8) die Werthe für die Coordinaten der Durchstosspunkte, so haben wir:

$$\pm 6 V_1 = \frac{1}{(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \Delta-\Delta_2 & \Delta\xi-\Delta_2 x_2 & \Delta\eta-\Delta_2 y_2 & \Delta\zeta-\Delta_2 z_2 \\ \Delta-\Delta_3 & \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 \\ \Delta-\Delta_4 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix}.$$

Durch Zerlegung der Determinante in ihre Minoren nach der ersten Horizontal-Reihe und jeder minoren Determinante in die ihr entsprechende Summe von acht Determinanten, von welch letzteren je vier verschwinden, erhalten wir ferner:

$$\pm 3 V_1 = \frac{\Delta\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)}.$$

Auf ganz dieselbe Weise ergeben sich auch die Volumina V_2, V_3, V_4, so dass wir für die erwähnten vier Tetraedervolumina die folgenden Ausdrücke erhalten:

$$11)\quad \begin{cases} \pm 3 V_1 = \dfrac{\Delta\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \\ \pm 3 V_2 = \dfrac{\Delta\Delta_3\Delta_4\Delta_1}{(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)(\Delta-\Delta_1)} \\ \pm 3 V_3 = \dfrac{\Delta\Delta_4\Delta_1\Delta_2}{(\Delta-\Delta_4)(\Delta-\Delta_1)(\Delta-\Delta_2)} \\ \pm 3 V_4 = \dfrac{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{(\Delta-\Delta_1)(\Delta-\Delta_2)(\Delta-\Delta_3)} \end{cases}.$$

Endlich erhalten wir durch Einsetzen der Werthe für die Coordinaten der Durchstosspunkte in die letzte der Gleichungen in 8)

$$\pm 6 V_{12} = \frac{1}{(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \Delta-\Delta_3 & \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 \\ \Delta-\Delta_4 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix},$$

und durch Zerlegung der Determinante in eine Summe von Producten aus minoren Determinanten zweiten und zweiten Grades (vergl. Baltzer's Determinanten, 2. Aufl., p. 31, Beispiel) ist noch ferner:

$$\pm 6 V_{12} = \frac{1}{(\Delta-\Delta_3)(\Delta-\Delta_4)} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 \\ \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix} \right.$$
$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 \\ \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 \\ \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Delta-\Delta_3 & \Delta-\Delta_4 \\ \Delta\zeta-\Delta_3 z_3 & \Delta\zeta-\Delta_4 z_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta-\Delta_3 & \Delta-\Delta_4 \\ \Delta\eta-\Delta_3 y_3 & \Delta\eta-\Delta_4 y_4 \end{vmatrix}$$
$$\left. + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta-\Delta_3 & \Delta-\Delta_4 \\ \Delta\xi-\Delta_3 x_3 & \Delta\xi-\Delta_4 x_4 \end{vmatrix} \right\}.$$

In jedem dieser Glieder lassen sich noch die zweiten Determinanten in die Summe von vier zerlegen, von welchen immer eine identisch verschwindet, nehmen wir ferner aus den noch übrig bleibenden $\Delta\Delta_3$, $\Delta\Delta_4$, $\Delta_3\Delta_4$ als Factoren heraus und ziehen dann die sich ergebenden zweiten Factoren nach dem früher citirten Theorem zusammen, so ergiebt sich:

$$\pm 6\, V_{12} = \frac{\Delta \Delta_3 \Delta_4}{(\Delta - \Delta_3)(\Delta - \Delta_4)};$$

ganz auf dieselbe Weise ergeben sich noch die Volumina V_{13}, V_{14} etc. etc., so dass wir haben:

$$12)\left\{\begin{array}{l}
\pm 6\, V_{12} = \Delta \frac{\Delta_3 \Delta_4}{(\Delta - \Delta_3)(\Delta - \Delta_4)}, \quad \pm 6\, V_{13} = \Delta \frac{\Delta_2 \Delta_4}{(\Delta - \Delta_2)(\Delta - \Delta_4)}, \\
\pm 6\, V_{14} = \Delta \frac{\Delta_2 \Delta_3}{(\Delta - \Delta_2)(\Delta - \Delta_3)}. \\
\pm 6\, V_{34} = \Delta \frac{\Delta_1 \Delta_2}{(\Delta - \Delta_1)(\Delta - \Delta_2)}, \quad \pm 6\, V_{24} = \Delta \frac{\Delta_1 \Delta_3}{(\Delta - \Delta_1)(\Delta - \Delta_3)}, \\
\pm 6\, V_{23} = \Delta \frac{\Delta_1 \Delta_4}{(\Delta - \Delta_1)(\Delta - \Delta_4)}.
\end{array}\right.$$

Multipliciren wir die Gleichung 10) mit drei, die Gleichungen 11) mit zwei und addiren sie dann zur Summe der Gleichungen 12), so erhalten wir mit Berücksichtigung von

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

$$13)\quad 6(\pm V \pm V_1 \pm V_2 \pm V_3 \pm V_4 \pm V_{12} \pm V_{13} \pm V_{14} \pm V_{23} \pm V_{24} \pm V_{34}) = \Delta.$$

Es ergeben sich noch die folgenden zwei Relationen, wenn wir das eine Mal die vier Gleichungen in 11) und das andere Mal die sechs Gleichungen in 12) mit einander multipliciren, und jedesmal die Gleichung 10) berücksichtigen:

$$14)\quad \pm \frac{3^4}{2^3} V_1\, V_2\, V_3\, V_4 = \Delta V^3,$$

$$15)\quad \pm 3^6 . 2^6\, V_{12}\, V_{13}\, V_{14}\, V_{23}\, V_{24}\, V_{34} = \Delta^3\, V^3.$$

Die Nenner in den Gleichungen 10), 11) und 12) lassen sich noch umformen, und zwar einmal dadurch, dass wir für die Differenzen aus der Gleichung

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

ihre Werthe setzen, und dass andere Mal durch die Bemerkung, dass jede Differenz von zwei solchen Determinanten, $\Delta - \Delta_i$ als eine einzige Determinante dargestellt werden kann.

Schliesslich bemerken wir noch, dass wir bei dem, diesem Problem entsprechenden, ebenen Problem zu ähnlichen Ausdrücken gelangen.

Pesth, den 3. Februar 1866. Dr. E. v. Hunyady.

VII. Ueber die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen. Von Prof. Stefan.

Das von Soleil bei seinem Saccharimeter angewandte Compensationsverfahren gründet sich auf die Voraussetzung, dass es zu jeder Lösung von Rohrzucker eine links drehende Quarzplatte von solcher Dicke gebe, dass die beiden mitsammen einen Körper liefern, welcher die Eigenschaft, die Polarisationsebene zu drehen, nicht mehr besitzt. Der Winkel aber, um den ein Körper die Polarisationsebene eines Strahles dreht, ist abhängig von der

Farbe des Strahles. Sollen sich also zwei Körper compensiren, so müssen ihre Drehungen für jede beliebige Farbe gleich gross und entgegengesetzt sein, die gleiche absolute Drehung für eine Farbe muss von einer gleichen Dispersion begleitet sein.

Um die Richtigkeit dieser Voraussetzung für Quarz und Zucker zu prüfen, wurden die Drehungen verschiedener Zuckerlösungen für die Fraunhofer'schen Hauptlinien bestimmt und durch die entsprechenden Drehungen des Quarzes dividirt. Die so erhaltenen Quotienten sollten constant sein, sie sind es auch mit grosser Annäherung. Die grössten Abweichungen betragen nur 1 bis 2 pCt. und sind derart, dass daraus für Zucker eine etwas grössere Dispersion folgt.

Eine so grosse Uebereinstimmung wie zwischen Quarz und Zuckerlösungen findet sich nicht mehr zwischen Quarz und anderen Flüssigkeiten. Die aus Wiedemann's Bestimmungen für Terpentinöl und Citronenöl gerechneten Quotienten zeigen für ersteres Abweichungen von 4 pCt., für letzteres von 14 pCt., und zwar so, dass Citronenöl viel stärker, Terpentinöl etwas schwächer als Quarz die Polarisationsebenen dispergirt. Das Soleil'sche Verfahren bietet also für Terpentinöl weniger Genauigkeit als für Zucker und noch viel weniger für Citronenöl.

Das vor Kurzem von Jellet construirte Saccharimeter gründet sich ebenfalls auf das Princip der Compensation, nur wird der Zucker durch Terpentinöl compensirt. Aus dem eben Gesagten ist zu ersehen, dass dieses Verfahren nicht den Grad von Richtigkeit besitzt, wie das Soleil'sche. Und dann ist noch die Frage, ob das Terpentinöl seiner drehenden Eigenschaft nach constant bleibt.

Die gemessenen Drehungen auf 100 pCt. Lösungen reducirt geben für die molecularen Drehungsvermögen des Rohrzuckers in Bezug auf die Fraunhofer'schen Hauptlinien folgende Zahlen:

A	*a*	*B*	*C*	*D*	*E*	*b*	*F*	*G*	*H*
38°47	43°32	47°56	52°70	66°41	84°56	87°88	101°18	131°06	157°06

Die Länge der Zuckersäule ist dabei = 100mm gesetzt.

(Wiener Akad.)

VIII. Die Elektrisirmaschine von Holtz.

Am 24. März 1865 (Sitzungsber. der math.-physik. Classe der Preuss. Akad., Aprilheft 1865) hat Poggendorff diese Elektrisirmaschine in der Sitzung der Preuss. Akademie der Wissenschaften vorgezeigt, dieselbe ist später ausführlich in Poggendorff's Annalen (Bd. 126, S. 157) beschrieben worden. Ihr Constructionsprincip ergiebt sich aus folgender Beschreibung: Am Umfange einer festen kreisrunden Glasscheibe ist eine gerade Anzahl Staniolbelegungen in gleichen Abständen

angebracht; in geringem Abstande von dieser festen Scheibe ist eine bewegliche, um ihre Axe drehbare Scheibe so angebracht, dass sie bei der Drehung der festen Scheibe unausgesetzt parallel bleibt. Die bewegliche Scheibe trägt an ihrem Umfange, einander gegenüber, Doppelbelegungen von Staniol, und zwar ebenso viel als die feste Scheibe, auch wie diese in gleichen Winkelabständen am Umfange vertheilt. Ertheilt man den Belegungen der festen Scheibe abwechselnd positive und negative Elektricität und versieht sie mit kleinen, nach der beweglichen Scheibe zu gerichteten Saugern, so werden bei der Umdrehung der beweglichen Scheibe die äussern Seiten der Doppelbelege abwechselnd abgestossene negative und positive Influenzelektricität erhalten, während die inneren, nach der festen Scheibe zu gekehrten Belegseiten gleichzeitig gebundene Elektricität bekommen werden, die der auf der äusseren Seite angehäuften natürlich entgegengesetzt ist. Brächte man nun keine weitere Vorrichtung an, so müsste zwar die neutrale Elektricität auf den Belegungen beim Vorübergange an einem + Belege der festen Scheibe momentan aussen +, innen — werden und sich beim Vorübergange an einem negativen Belege entgegengesetzt verhalten, allein beim Umdrehen der Scheibe würden die Belege wieder neutral werden, weil die Elektricität in ihnen im entgegengesetzten Sinne geschieden wird, etc. Bei der Maschine von Holtz wird nun aber die Influenzelektricität auf folgende Weise zur Herstellung eines beständigen elektrischen Stromes oder zur Ladung eines Condensationsapparates benutzt. Auf der äusseren, von der festen Scheibe abgewandten Seite sind an zwei diametral entgegengesetzten Punkten, der rotirenden Scheibe gegenüber, auf Glassäulen die 2 Pole der Maschine angebracht, die mit Saugspitzen versehen sind, welche den an ihnen sich vorbeibewegenden Belegungen der rotirenden Scheibe die abgestossene Influenzelektricität abnehmen. Es ist natürlich, dass der + Pol auch einem + Belege der festen Scheibe gegenübersteht und ebenso der — Pol einem — Belege der festen Scheibe. Kommt nun beim Rotiren ein Belege der beweglichen Scheibe vor das mit dem + Pol correspondirende + Belege, so saugt der + Pol die abgestossene + E vom Belege der beweglichen Scheibe auf und der Sauger des nächsten — Beleges der festen Scheibe nimmt die nun frei gewordene — E vom Belege der rotirenden Scheibe auf, welches eben vorher seine abgestossene + E an den + Pol abgegeben hatte. Es ist natürlich, dass ohne Figur die Theorie der Holtz-schen Maschine nur in dieser ungenügenden, doch aber das Princip andeutenden Form gegeben werden kann. Die Wirkung dieses Apparates beruht aber auf der Verwendung der erzeugten Influenzelektriciät nicht nur zum Experimentiren mit Verstärkungsapparaten und Geissler'schen Röhren, sondern auch zum Ersatz der von den influenzirenden Belegen der festen Scheibe in die Luft entwichenen Elektricität. Nach Holtz eigener Angabe arbeitet die Maschine mit allmählich abnehmender Wirkung, kann aber dann durch eine einfache Manipulation wieder in den anfänglichen Zustand ver-

setzt werden. Nach Poggendorff besteht die Wirkung des Apparates in dem von ihm zu erhaltenden Funkenstrom, in seiner Kraft, Flaschen und Batterien zu laden, und in Entwickelung der Erscheinungen im Vacuum, wo er dem Inductionsapparat ähnlich ist. Poggendorff bemerkt a. a. O. noch, dass Herrn Holtz unbekannt, schon vor 20 Jahren vom Engländer Goodman in Birmingham eine ähnliche Maschine zu dem alleinigen, aber verfehltem Zwecke, die chemischen Wirkungen zu zeigen, construirt worden sei. Nach dem „Cosmos" vom 20. December 1865 hat Ruhmkorff in Paris eine Maschine nach Holtz Princip ausgeführt, mit deren Leistungen man im höchsten Grade zufrieden gewesen ist. Dr. Kahl.

IX. Ein neuer akustischer Interferenzversuch.

Unter diesem Titel hat Herr Dr. Ferdinand Deneke in den Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig folgenden Versuch der Oeffentlichkeit übergeben. Eine gedeckte Orgelpfeife von weiter Mensur wird mittelst eines langen Gummirohres mit einem Lange'schen Gebläse in Verbindung gesetzt. Die Pfeife muss weit mensurirt sein, dass sie die Obertöne gar nicht oder doch möglichst schwach erklingen lässt. Diese Pfeife wurde in ein langes, an einem Ende geschlossenes Rohr von starker Pappe eingesenkt. Wenn nun die Pfeife angeblasen und in dem weiten Rohre hin und her geschoben wird, so lassen sich die Punkte sehr leicht finden, an denen der Ton der Pfeife bis fast zum Unhörbaren abgeschwächt wird. Wird die tönende Pfeife an das Ende des Papprohres gebracht und allmählich langsam zurückgezogen, so gelangt man bald an einen Punkt, an welchem ihr Ton ein Maximum der Abschwächung erfährt. Wenn man nun vom Labium der Pfeife bis zum Rohrende misst, so findet man die Entfernung $=\frac{1}{4}$ der Wellenlänge des Tones, wieder wird der Ton fast unhörbar, wenn man bis zu $\frac{3}{4}$ der Wellenlänge sich mit dem Labium vom geschlossenen Rohrende entfernt; ebenso bei $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc. Es ist dies Ergebniss um so interessanter, als Hopkins bei seinen Versuchen (Pogg. Ann. Bd. XLIV, S. 603) fand, dass die Schwingungen einer durch ein einerseits geschlossenes Glasrohr am offenen Ende schliessende Glasplatte um so weniger gestört werden, je näher die Länge des Rohres $l=\frac{2n+1}{4}h$ ist, wobei h die Wellenlänge des Tones der Glasplatte bedeutet. Der offene Widerspruch zwischen den Versuchen Hopkin's und Deneke's kann an zweierlei liegen:

1. konnte Herr Deneke, nicht mit den nöthigen Hilfsmitteln ausgerüstet, die Tonhöhe nur mittelst des Gehöres messen, demnach sind Fehler in der Angabe der Wellenlänge möglicher Weise vorgekommen,

2. kann die verschiedene Anordnung beider Versuche eine Verschiedenheit im Resultat hervorgebracht haben.

Das nächste, was hier noch zu wünschen ist, ist jedenfalls, dass Herr Deneke bald in den Besitz von Instrumenten gelangen möchte, welche ihm genauere Messungen, wie er sie auch selbst wünscht, gestatten.

Dr. Kahl.

X. Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums. Von Dr. L. Ditscheiner (Sitzungsber. der Wiener Akad., Juliheft 1865).

In dem in dieser Zeitschrift Bd. X, S. 81 über Ditscheiner's Bestimmungen gegebenen Berichte konnten die absoluten Längen der Wellen nicht angegeben werden, weil bei Ditscheiner's damaligen Bestimmungen die Spaltenbreite des zu den Versuchen benutzten Gitters leider nicht gemessen werden konnte. Es musste bei jenen Bestimmungen von der von Fraunhofer für die der Linie *D* entsprechende Wellenlänge 588,80 Milliontel eines Millimeters Ausgang genommen werden. In dem oben citirten Juliheft des Sitzungsber. d. Wiener Akad. wird nun das Resultat einer nachträglichen Messung der Spaltenbreite des benutzten Gitters und der auf diese Messung gegründeten Berechnungen der absoluten Wellenlängen mitgetheilt. Mit einem vom Professor Stampfer auf das Genaueste untersuchten Comparator wurde die Entfernung der ersten und letzten Linie des benutzten Gitters durch 10malige Messung im Mittel gefunden $= 13{,}8765^{mm}$, welche Zahl Ditscheiner bis auf $0{,}0022^{mm}$ sicher schätzt. Beim Durchziehen des Gitters durch ein Plössl'sches Mikroskop mit Hilfe der Mikrometerschraube zeigten sich alle Linien des Gitters gleich weit entfernt und von gleicher Dicke, auch waren die beiden Endlinien nicht tiefer eingerissen, als die übrigen. Auf Grund dieser wiederholt mit der grössten Sorgfalt ausgeführten Arbeit und nochmaliger Messung des Gitterspectrums ergeben sich nun statt der in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. X, S. 83 angegebenen Zahlen folgende verbesserte:

B.	593	688,33	*E.*	1523,5	527,83
C.	694	657,11		1577,5	523,49
	860	617,96		1634	519,12
	877	614,70	*b.*	1648,8	518,09
Db.	1002,8	590,53		1655,6	517,54
Da.	1006,8	589,89		1750,4	510,68
	1135	571,93		1834	504,93
	1207,5	562,40		1885,8	501,45
	1280	553,68		1961	496,53
	1324,8	548,54		2005	492,69

1351,3	545,49	2041,4	489,90
1389,6	541,32	2067	487,91
1421,6	537,92	*F.* 2080,1	486,87
1463	533,69	2309	467,42

2467,4	456,06
2489,4	454,09
2566,3	448,80
2606	446,33
2670	442,22
2686,6	441,21
2721,6	439,08
2775,6	436,00
2797	434,66
2822,8	433,14
G. 2854,7	431,70
H.	397,42
H'.	394,05.

Ditscheiner giebt an, dass seine Werthe mit den von Mascart (*Compt. rend.* 13. Juni 1864, S. 1111) gegebenen relativ übereinstimmen, d. h. in gleichem Verhältnisse stehen. Eine Differenz mit den Ångström'schen Wellenlängen (Pogg. Ann. B. 123, S. 489) hat sich nur bei den Linien 831, 850, 860, 864, 874,5, 877, 885, 895 ergeben. Eine Zusammenstellung der von Fraunhofer und Ditscheiner angegebenen Zahlen ergab mir:

	Fraunhofer.		Ditscheiner.
B.	687,8		688,3
C.	656,4		657,11
D.	588,8	*Db.*	590,53
		Da.	589,89
E.	526,0		527,83
F.	484,3		486,87
G.	429,1		431,70
H.	392,8		397,42.

Dr. Kahl.

XI. Magnesiumsilberkette.

Das Erscheinen des Magnesiums im Handel scheint der Darstellung der Erscheinungen an Volta'schen Ketten von Nutzen sein zu können, wie aus einer Mittheilung in den *Comptes rendus* (9. October 1863, S. 585) geschlossen werden kann. Angeregt durch die Oxydirbarkeit des Magnesiums hat Bultinck in Ostende versucht, das Zink in galvanischen Ketten durch Magnesium zu ersetzen. Er giebt an, dass er bei Herstellung eines Ele-

mentes aus Kupfer und Zink mit reinem Wasser an seinem Galvanometer (Multiplicator) 30° Ausschlag bekommen habe, der nach einigem Zurückgehen auf 10° herabgesunken und so geblieben sei, während in gleicher Weise bei Magnesiumsilber ein Ausschlag von 90° und später bleibend von 28° erhalten worden sei.

Er hat auf diese Weise eine Volta'sche Säule construirt, die sehr klein war und wovon 20 Elemente (Magnesiumsilber) mit reinem Regenwasser alle die Wirkungen zeigten, welche sonst nur mit Hilfe von salzigem oder saurem Wasser die Pulvermacher'schen Ketten geben; die Wirkungen waren physische, chemische und physiologische. Dr. Kahl.

XII. Eine neue Kabellegung.

Es sind bekanntlich bis jetzt zwei Projecte vorhanden gewesen, um die grossen Continente unter einander durch telegraphische Drähte zu verbinden. Das eine, die Verbindung von Valencia in Irland mit Newfoundland betreffend, ist im vorigen Sommer aufs Neue durch den Great Eastern in Angriff genommen worden und abermals verunglückt. Bei dem andern, welches die telegraphische Verbindung zwischen dem asiatischen Russland über die Insel Sacchalin und die Aleuten mit Amerika herstellen soll, sind Arbeiten zur See noch nicht vorgenommen worden. Ueber ein drittes Project, welches eine Verbindung von Portugal mit Südamerika zunächst beabsichtigt, und welches der „Cosmos" von Flammarion schon mehrfach besprochen hat, sprechen sich die *Nouvelles annales des voyages* 1865, S. 361 folgendermaassen aus. Die Erfolglosigkeit des Great Eastern hat weder die Actionäre, noch die neue französische Compagnie decouragirt, welche von der französischen Regierung die Erlaubniss erbeten und erhalten hat, ein transatlantisches Kabel zwischen Frankreich und den Vereinigten Staaten zu legen. Herr Alberto Balestrini unternimmt die ganze Sache. Aber diesmal beabsichtigt man nicht mehr die Legung eines Kabels auf einmal auszuführen, sondern es sollen Stationen gemacht werden. Der Plan ist bis jetzt: von Paris nach Lissabon zu Lande zu gehen, vom Kap St. Vincent nach den canarischen Inseln, indem man dem marokkanischen Terrain folgt, von den canarischen Inseln nach dem Kap Verde auf afrikanischem Gebiet mit der Station St. Louis am Senegal und der Insel Gorree; vom Kap Verde nach dem Kap St. Roque an der brasilischen Küste (durch Eintauchung), d. i. eine Entfernung, welche noch nicht halb so klein ist, als diejenige, welche vom Great Eastern gelegt werden sollte; vom Kap St. Roque nach Cayenne auf amerikanischem Terrain; von Cayenne nach New-Orleans durch das Küstenland und wahrscheinlich durch Kabel, welche die Hauptinseln der Antillen verbinden sollen. Die *Nouvelles annales* meinen, die Unternehmung sei vielleicht leichter auszuführen, als die in England

begonnene, die einzige (?) Schwierigkeit werde die Beschützung der Linie auf afrikanischem Küstenlande sein. Die Compagnie hat die Concession erhalten und die französische Regierung wird während dieser Zeit keine andere Concession zur Legung eines transatlantischen Kabels ertheilen. Die französische Regierung wird das Unternehmen mit einem Kapital von 4 Millionen Francs unterstützen, sobald sich die Gesellschaft mit einem Kapital von 80 Millionen constituirt haben wird, und die Erlaubniss von allen den Regierungen erhalten haben wird, durch deren Länder die Telegraphendrähte gelegt werden sollen. Die Drahtlegung zwischen Paris und den canarischen Inseln wird 3 Jahre und die totale Drahtlegung 5 Jahre Zeit in Anspruch nehmen. Dr. KAHL.

XIII. Ueber Thermosäulen.

Im Anschluss an die Mittheilung im 4. Heft, X. Bds. dieser Zeitschrift, S. 333 u. ff. möge folgendes Platz finden: in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, 1865, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, S. 260 befindet sich folgende Mittheilung von Stefan. Als genannter Herr die Säule von Marcus experimentell geprüft hatte, unterwarf er ebenso eine Menge Mineralien einer Prüfung in Bezug auf ihr thermo-elektromotorisches Verhalten. Die Resultate dieser Prüfung, a. a. Orte durch eine vorläufige Notiz bekannt gemacht, sind sehr interessant; sie lassen hoffen, das man bald dahin kommen wird, im physikalischen Unterricht bei Gelegenheit der Thermosäule recht hübsche augenfällige Experimente zur Erläuterung zu zeigen.

Wir erfahren aus bemerkter „vorläufiger Mittheilung" zunächst über die Art der Prüfung Folgendes: Der zu untersuchende Körper wurde auf das eine Ende eines Kupferstreifens gelegt, ein Kupferdraht darüber, Alles mit einer Holzklammer zusammengepresst und vom Ende des Kupferdrahtes Zuleitungen nach einem Buff'schen Tangentenmultiplicator mit sehr vielen Windungen geführt. Bei Prüfung eines aus 2 Mineralien zusammengesetzten Elementes wurden beide Mineralien, getrennt durch einen vorstehenden Kupferstreifen, durch eine Holzklammer zusammengepresst und mit Drähten mit dem Multiplicator verbunden.

Beispielsweise zählen wir nur einige Versuchsresultate von Stefan auf, wobei immer der elektropositive Körper voransteht. Die dazu gesetzten Zahlen bedeuten, wieviel von den Elementen genommen werden mussten, damit ihre vereinigte elektromotorische Kraft der eines Daniell'schen Elementes gleich wurde. Die Stromerregung geschah hierbei im ersten Falle durch Erhitzung von der Verbindung von Kupfer und Mineral, im zweiten Falle durch Erhitzung des vorstehenden Kupferblechstreifens.

1. Blättriger Kupferkies — Kupfer 26;
2. feinkörniger Kupferkies — Kupfer 9;
3. Pyrolusit — Kupfer 13.

Die Verschiedenheit im Verhalten des Kupferkieses je nach der Structur führte auf einen Versuch mit 2 Kupferkiesarten:

4. feinkörniger Kupferkies, blättriger Kupferkies — 14.

Noch auffälliger zeigt sich der Einfluss der Structur bei Kobaltkies, während sich körniger Kobaltkies schwach positiv gegen Kupfer verhält, ist krystallinischer stark negativ.

Indem wir verschiedene Angaben Herrn Stefan's übergehen, wollen wir nur noch erwähnen, dass Bleischweif-Buntkupfererz das stärkste Element giebt; hierfür giebt Stefan die Zahl 5,5 an. Dr. Kahl.

XIV. Die päpstliche Akademie de' Nuovi Lincei fordert zur Preisbewerbung für das Prämium *Carpi* auf. Die gestellte Frage lautet:

„Eine Methode zu finden, mittelst deren entweder alle rationalen „Werthe für x sich ergeben, welche das Polynomium $A+Bx+$ „$Cx^2+Dx^3+Ex^4$ (in welchem A, B, C, D, E ganze Zahlen sind) „zu einem Quadrate resp. Cubus machen, oder mittelst deren, falls „keine solche Werthe für x existiren, die Unmöglichkeit der „Aufgabe bewiesen werde."

Die Akademie fügt folgende Erläuterungen hinzu. Eine Methode von Fermat um $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ zu einem Quadrate, $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ zu einem Cubus zu machen, ist von J. de Billy in seiner Schrift *Doctrinae analyticae inventum novum* (vergl. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus etc. Tolosae MDCLXX, p.* 30–31) auseinandergesetzt. Dieselbe Methode findet sich bei Euler, Anleitung zur niedern und höhern Algebra, Bd. II, Cap. VIII, IX, X.

In den Memoiren der Petersburger Akademie Bd. XI (Jahrgang 1830) findet sich ein posthumer Aufsatz von Euler: *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi.* Diese Methode, sagt Jacobi (*De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea*, Crelle's Journal XIII, für 1835), ist genau genommen keine andere, als die der Multiplication der elliptischen Integrale, welche Euler bereits in seiner *Institutionis calculi Integralis* gelehrt hatte, um in algebraischer Weise Auflösungen der transcendenten Gleichung

$$\Pi(y)=n\,.\,\Pi(x)$$

zu finden, wenn

$$\Pi(x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4.$$

Die Fermat'sche Methode findet sich ferner auch bei Legendre, *Theorie des nombres, 3. édit. Paris* 1830, Bd. II, S. 123—125.

Endlich enthält Lagrange, *Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante* (*Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin*, *année* 1777) eine Methode zur rationalen Auflösung der unbestimmten Gleichungen 3. und 4. Grades zwischen den beiden Unbekannten x und y.

Die Unvollkommenheit aller dieser Methoden besteht darin, dass sie 1. eine Auflösung als gegeben annehmen und 2. den Beweis vermissen lassen, dass mittelst ihrer alle Auflösungen gefunden werden können.

Die durch ein Motto zu kennzeichnenden und mit versiegeltem Namenszettel zu begleitenden Preisschriften müssen in italienischer, lateinischer oder französischer Sprache abgefasst sein. Der Einlieferungstermin, bis zu welchem spätestens die Einsendung *franco* erfolgt sein muss, ist der 31. October 1866. Der im Januar 1867 zu ertheilende Preis besteht in einer goldenen Medaille im Werthe von 100 römischen Scudi.

XV. Aufgabe (für Schüler).

Nicht ohne Interesse dürfte folgende Aufgabe sein, die ich in keiner Sammlung finde:

> „Wenn A der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, T und N die Durchschnitte der x-Axe mit der Tangente und der Normale am Punkte M einer Curve sind, so sucht man die Gleichung derjenigen Curve, bei welcher $AN.AT$ einen constanten Werth hat."

Der gestellten Bedingung genügen gewisse Kegelschnitte, ausserdem existirt auch eine singuläre Auflösung. CANTOR.

IX.

Entwurf einer Molecularphysik.

Von

Professor Dr. WITTWER in Regensburg.

(Hierzu Tafel II, Figur 1 bis 6.)

Der Versuche, das sogenannte Moleculargesetz, die Norm, welcher die Anziehungen und Abstossungen der kleinsten Theile der Körper gehorchen, zu ergründen, giebt es schon mancherlei, denn der Gedanke, die gesammten Erscheinungen der Physik und Chemie in derselben Weise bestimmen zu können, wie es die Astronomie mit Hilfe des Schweregesetzes bei den Phänomenen der Sternenwelt vermag, ist auch gar zu verlockend. Unter den bisher veröffentlichten Arbeiten dieser Art ist mir keine bekannt, welche allen an sie gemachten Ansprüchen genügt, und es möge mir daher gestattet sein, diesen vielen Versuchen einen weiteren beizufügen. Das Problem ist es wohl werth, dass man sich damit beschäftigt, und wenn man auch nicht beim ersten Schusse in das Centrum trifft, so ist der dadurch angerichtete Schaden nicht gross.

Es ist bekannt, dass die sämmtlichen Gesetze, die man in den Naturwissenschaften aufgestellt hat, sich um so besser bewähren, je einfacher sie sind, oder, um mit Schleiden zu sprechen, in je weniger Worte sie gefasst werden können. Dieser Erfahrung gemäss habe ich auch die Grundlagen meiner Untersuchungen so einfach als möglich gewählt, so dass eine weitere Vereinfachung kaum mehr bewerkstelligt werden kann. Die Sätze sind übrigens nicht neu, sondern gelten bereits allgemein in der Physik, und was ich hierbei für mich beanspruche, ist nur die Art der Anwendung derselben, mit deren Hilfe es mir gelungen ist, die Enstehung wenigstens einiger Krystallformen, sowie die Bedingung der einfachen und doppelten Lichtbrechung in diesen Krystallen als mathematische Nothwendigkeit ab-

zuleiten. Ich werde allerdings hin und wieder gegen einzelne herrschende Ansichten verstossen, doch glaube ich nicht, dass dieses auch von einem mathematisch begründeten Gesetze gesagt werden kann. Am Schlusse meiner Darstellung werde ich diejenigen Punkte, die ich für die anstössigsten halte, einer näheren Betrachtung unterziehen.

Seit Newton nimmt man an, dass es in den Körpern eine materielle Substanz giebt, deren Theilchen sich gegenseitig anziehen. Die Porosität der Körper und was damit zusammenhängt, sowie die Erscheinungen des Lichtes haben darauf geführt, dass es ausser den schweren Theilchen noch einen andern Stoff gebe, dessen Atome sich gegenseitig abstossen, den sogenannten Aether. Es ist allgemein angenommen, dass es wenigstens zweierlei Arten von materieller Substanz giebt, und dieser allgemeinen Annahme folge ich, indem ich voraussetze, es gebe in der Welt zweierlei Stoffe, deren einer der Aether ist, während ich die kleinsten Theile des andern Massentheilchen nennen will. Beide Stoffe sind einander entgegengesetzt, und ihr Zusammenwirken veranlasst die verschiedenen Naturerscheinungen. Ich setze beide als in kleinen Kugeln gegeben voraus, die Art ihrer Wechselwirkung regelt sich nach folgender Norm:

I. Gleichartiges stösst sich ab, Ungleichartiges zieht sich an.

II. Beide Kräfte nehmen ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Ist irgendwo im Raume eine Kugel Massensubstanz, so wirkt sie anziehend auf die Aetherkugeln rings umher, und diese Anziehung hat so lange eine Bewegung der sich anziehenden Körper zur Folge, bis vollständiger Contact vorhanden ist. Nehmen wir zuerst an, die Massenkugel sei im Verhältniss zu den Aetherkugeln sehr bedeutend, so sammeln sich auf ihrer Oberfläche mehrere der letzteren, und man kann, namentlich wenn es sich um grössere Entfernungen handelt, ohne merklichen Fehler annehmen, dass die Aetheratome über dem Massentheilchen eine oder mehrere Kugelschalen bilden.

Es ist nun die Einwirkung des ganzen Systemes auf die noch im Raume schwebenden Aetherkugeln zu suchen. Die im Innern befindliche Massenkugel, sowie die Kugelschalen des Aethers wirken so, als sei ihre gesammte Masse in dem Schwerpunkte vereinigt, die Massenkugel zieht die freien Aetherkugeln an, die Aetherhülle stösst sie ab, und ist die erstere Wirkung die stärkere, so wird das Aethertheilchen dem Systeme einverleibt, um von nun an die Wirkung der bereits gebundenen Aetherkugeln zu verstärken, weil es zur Vervollständigung oder Vervielfältigung der Kugelschalen beiträgt. Dieses wird so lange fortdauern, bis endlich die abstossende Wirkung aller Aethertheilchen zusammen gerade so gross ist, als die von dem Massenkerne ausgehende Anziehung, und ist dieses der Fall, so wird das System auf ein ferner stehendes Aethertheilchen keine Wirkung mehr aus-

üben. Nennt man die Menge materieller, träger Substanz der Massenkugel, ihrer Aetherhülle und des freien Aethertheilchens der Reihe nach m, M und μ, bezeichnet man ferner mit a und b die Anziehung von Masse und Aether, dann die Abstossung zwischen Aether und Aether bei der Einheit der Entfernung und der Einheit der trägen, materiellen Substanz, so erhält man den Indifferentismus, wenn

$$1) \qquad \begin{aligned} am\mu &= bM\mu \\ am &= bM \end{aligned}.$$

Wie bei dem einzelnen Systeme die Wirkung auf ein entferntes Aethertheilchen aufhört, so geschieht dieses auch, wenn mehrere derselben bei einander sind, sobald die Bedingungsgleichung 1) erfüllt ist.

Befindet sich in der Entfernung r von dem ersten Systeme ein zweites aus der Masse m_1 und der Aetherhülle M_1 zusammengesetztes, bei dem im Zustande der Indifferenz

$$2) \qquad am_1 = bM_1$$

ist, so findet zwischen Kern und Kern, dann zwischen Hülle und Hülle Abstossung statt, Anziehung dagegen zwischen den beiden Kernen und den jenseitigen Hüllen. Ist c die Intensität der Abstossung der Kerne für die Einheit träger Substanz und der Entfernung, so wird, wenn man diejenige Kraftäusserung, welche die Entfernung r zu verkleinern strebt, mit dem Zeichen — versieht, die Wirkung

$$3) \qquad W = \frac{cmm_1}{r^2} + \frac{bMM_1}{r^2} - \frac{amM_1}{r^2} - \frac{am_1M}{r^2}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen 1) und 2) mit 3) erhält man:

$$4) \qquad W = \left(c - \frac{a^2}{b}\right)\frac{m\,m_1}{r^2}.$$

Die gegenseitige Einwirkung der beiden Systeme hängt nun von der Grösse $c - \frac{a^2}{b}$ ab. Setzt man $c = \frac{a^2}{b}$, so ist die Einwirkung $= 0$. Nimmt man an, c sei um eine ausserordentlich kleine Grösse keiner als $\frac{a^2}{b}$, so erhält man für W einen negativen Werth, und es ergiebt sich also eine Anziehung, die abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst, und ausserdem dem Producte der Massen proportional ist (Schwerewirkung). Die Grössen a, b und c können sehr bedeutend sein, für die Schwere bleibt nur ein verschwindend kleiner Theil übrig. In den Lehren der Elektricität und des Magnetismus gelten bekanntlich die oben unter I) und II) aufgeführten Sätze ebenfalls, und man nimmt dort *mutatis mutandis* an, dass $c - \frac{a^2}{b} = 0$ sei. Hierauf gründen sich die einschlägigen Rechnungen; es würde jedoch in denselben keine wesentliche Aenderung eintreten, wenn man c um eine verschwindend kleine Grösse kleiner als $\frac{a^2}{b}$ annehmen würde. Diese muss aber

jedenfalls sehr klein sein, wenn man die Schwerewirkung mit den Molecularkräften vergleicht, denn erstere Kraft ist bekanntlich gegen die letzteren nur sehr unbedeutend. Der kleine Ueberschuss, von dem hier die Rede ist, kann daher jedenfalls nicht im Wege stehen, wenn meine Sätze etwa auf die Lehren der Elektricität und des Magnetismus eine Anwendung finden sollten.

Nimmt man an, das zweite System m_1 enthalte statt M_1 Aethermenge deren $n M_1$, wobei n beliebig grösser oder kleiner als 1 sein mag, so ist ihre Wirkung auf das erste System

$$W_1 = \frac{c m m_1}{r^2} + \frac{b n M M_1}{r^2} - \frac{a m_1 M}{r^2} - \frac{a n m M_1}{r^2} = \left(c - \frac{a^2}{b}\right)\frac{m m_1}{r^2}.$$

III. Jedes System m, in welchem die Massentheilchen mit Aether gesättigt sind, wirkt auf ein anderes m_1 in ganz derselben Weise, es mag letzteres mit viel oder wenig Aether verbunden sein.

Es bleibt noch übrig, die Wirkung zu untersuchen, welche die Aethertheilchen im Raume auf einander ausüben können. Uebereinstimmend mit der allgemein üblichen Ansicht nehme ich an, dass der allgemeine Raum mit Aethertheilchen erfüllt sei, dass aber diese einander nicht berühren, sondern durch Zwischenräume von einander getrennt sind. Die Art der Vertheilung mag eine ganz beliebige sein; jedenfalls aber ist sie eine regelmässige. Setzen wir den Fall, die Punkte der Fig. 1, Taf. II stellen die Vertheilung einer Parthie Aethers vor. Die einzelnen Aethertheile werden sich in Ruhe befinden, wenn die auf sie wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben, und dieses muss geschehen, sobald die Vertheilung der einzelnen Atome eine gleichmässige ist. Denkt man sich nun die Theilchen des (durch ausgezogene Gerade angegebenen) Raumes $a\ b\ c\ d$ weggenommen, und sucht man die von der Gesammtmasse auf das Atom m ausgeübte Wirkung, so wird sich, die Abstossung der Aethertheile auf einander mag ein Gesetz befolgen, welches immer sie mag, wieder alles aufheben mit einziger Ausnahme der Thätigkeit der in $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ befindlichen Atome, die nach Wegnahme von $a\ b\ c\ d$ nicht aufgehoben wird. Stossen sich die Aetheratome ab, so ist das Endresultat für m genau dasselbe, als sei der ganze Raum leer, und existire nur die Aethermasse $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$, die auf der $a\ b\ c\ d$ diametral entgegengesetzten Seite von m liegt. Das gleiche Resultat würde man bekommen, wenn der ganze Raum leer und $a\ b\ c\ d$ mit einer Substanz erfüllt wäre, die nach dem nämlichen Gesetze aber anziehend wirkt. Sucht man die nach Wegnahme der Theilchen in $a\ b\ c\ d$ auf m_1 erzielte Wirkung, so muss diese wieder so sein, als wäre allein in dem symmetrisch mit $abcd$ gelegenen durch punktirte Gerade angegebenen $a_2 b_2 c_2 d_2$ Aether vorhanden, oder als wirke eine in $a\ b\ c\ d$ befindliche Substanz im entgegengesetzten Sinne auf m_1.

IV. **Ist in dem allgemeinen Raume irgend ein Theil von Aether entleert, so ist die Wirkung, die dadurch auf irgend ein Aethertheilchen, befinde sich dieses, wo es wolle, ausgeübt wird, genau die nämliche, als sei der allgemeine Raum von Aether leer, und es sei nur die wirklich leere Stelle von einer Substanz erfüllt, die nach demselben Gesetze, aber im entgegengesetzten Sinne, als der Aether wirkt.**

Nimmt man an, es sei ein kugelförmiger grösserer Raum von Aether entleert, so findet dem Vorstehenden zufolge auf ein an der Oberfläche dieser Kugel befindliches Aethertheilchen die Wirkung $-\frac{4}{3}b\pi\varrho r$ statt, wenn die Abstossung der Aethertheilchen dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist und wenn ϱ die Dichtigkeit, b die Abstossungsconstante des Aethers bezeichnet. Die Anziehung wächst also wie der Radius.

Entstehung einiger Krystallformen des tesseralen Systemes.

Die im Vorstehenden entwickelten Verhältnisse ergeben sich zunächst für den Fall, dass die Zahl der ein Massentheilchen umhüllenden Aetherkugeln sehr gross sei. Ist dieses nicht, so kann das Massentheilchen mehr Aetherkugeln aufnehmen, als es zu seiner Sättigung bedarf. Es sei angenommen, $am = 3b\mu$.

Hier werden zunächst 3 Aetherkugeln von dem Massentheilchen angezogen, und da sie sich gegenseitig abstossen, lagern sie sich so um das Massentheilchen herum, dass ihre gegenseitige Abstossung ein Minimum wird, sie stellen sich also so, dass ihre Mittelpunkte die Ecke eines gleichseitigen Dreieckes bilden, dessen Ebene durch den Mittelpunkt des Massentheilchens geht. Fragt man nach der Wirkung, die das so beschaffene System auf ein Aethertheilchen ausübt, welches in geringer Entfernung in der auf der Ebene der 3 Aetherkugeln gezogenen Senkrechten mitten über dem Aetherdreieck steht, so erhält man, da das Massentheilchen wie auch die Aethertheilchen so wirken, als gehe die gesammte Wirkung von dem Schwerpunkte der jeweiligen Kugel aus,

$$5)\qquad W = \left(\frac{3R}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{R^2}\right) b\mu\mu.$$

Auch hier ist wieder die Anziehung mit dem Zeichen — versehen, R bedeutet die Entfernung des Mittelpunktes des freien Aethertheilchens von dem Mittelpunkte der Massenkugel, r die Entfernung dieses letzteren Punktes von dem Mittelpunkte eines gebundenen Aethertheilchens.

Die Gleichung 3) zeigt, dass $W = 0$, so lange man r gegen R vernachlässigen kann, dass aber eine Anziehung stattfindet, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Da nun der Raum als allenthalben von Aethertheilchen besetzt angenommen werden muss, so ergiebt sich, dass noch ein viertes Aethertheilchen sich auf der Kugel niederlässt. Sobald dieses geschе-

hen ist, tritt die gegenseitige Abstossung der Aetherkugeln in ihre Rechte, und da keine die Massenkugel verlässt, kann erst dann Ruhe eintreten, wenn die gegenseitige Abstossung ein Minimum ist, was geschieht, sobald die 4 Aetheratome sich so um die Massenkugel herum gelagert haben, dass bei der durch Gerade zu bewerstelligenden Verbindung der Aethermittelpunkte ein kleines Tetraëder entsteht, dessen Ecke in eben diesen Mittelpunkten liegen. Untersucht man die Wirkung des so beschaffenen Systemes auf ein weiteres freies Aetheratom, so wird dieselbe je nach der Stellung verschieden sein, welche die von dem Massenmittelpunkte zu ihm gezogene Verbindungslinie gegen das Tetraëder einnimmt. Soll noch eine weitere Aetherkugel incorporirt werden, so ist dieses am ehesten da möglich, wo die Anziehung ein Maximum ist, und dieses kann, wie man durch einfache Ueberlegung leicht erhält, nur in einer der drei Stellungen sein, in welchen das anzuziehende Aethertheilchen

A senkrecht über dem Mittelpunkte einer Tetraëderebene,
A_1 senkrecht über dem Mittelpunkte einer Kante,
A_2 senkrecht über einem Ecke steht.

Die Rechnung ergiebt:

$$A = \left(\frac{3\left(R - \frac{r}{3}\right)}{\left[\left(R - \frac{r}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} r^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R+r)^2} - \frac{3}{R^2} \right) b\mu\mu,$$

$$A_1 = \left(\frac{2\left(R + r\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left[\left(R + r\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + \frac{2}{3} r^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\left(R - r\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left[\left(R - r\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + \frac{2}{3} r^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{R^2} \right) b\mu\mu,$$

$$A_2 = \left(\frac{3\left(R + \frac{r}{3}\right)}{\left[\left(R + \frac{r}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} r^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{3}{R^2} \right) b\mu\mu.$$

Entwickelt man in Reihen und setzt man der Einfachheit wegen $b\mu\mu = 1$, so ergiebt sich

$$6)\quad \begin{aligned} A &= R^{-2} - \tfrac{80}{9} R^{-5} r^3 + \tfrac{140}{27} R^{-6} r^4 + \tfrac{896}{81} R^{-8} r^6 \\ A_1 &= R^{-2} - \tfrac{70}{9} R^{-6} r^4 + \tfrac{56}{9} R^{-8} r^6 \\ A_2 &= R^{-2} + \tfrac{80}{9} R^{-5} r^3 + \tfrac{140}{27} R^{-6} r^4 + \tfrac{896}{81} R^{-8} r^6 \end{aligned}$$

Die Wirkung ist, wie sich hieraus ergiebt, allerwärts eine abstossende, das Minimum ist in A, das Maximum in A_2 und ein fünftes Aetheratom kann sich daher mit der Massenkugel nicht verbinden. In Folge dieser Abstossung würde sich ein Aethertheilchen bis in unendliche Entfernung von dem Systeme wegbegeben, wenn die Wirkung des äussern, den ganzen Raum erfüllenden Aethers nicht wäre. Da die Abstossung in jeder Richtung stattfindet, muss sich um das System herum ein ätherfreier Raum bilden. Die Abstossung wird bei zunehmender Entfernung immer schwächer, während andererseits bei der Vergrösserung des leeren Raumes, wie sich aus IV) er-

giebt, der Druck des allgemeinen Aethers von aussen herein wächst. Es muss also endlich zu einem Gleichgewichte kommen, und wenn dieses in der Entfernung R geschieht, ist ein dort befindliches Aethertheilchen in Ruhe. Es übrigt hierbei noch die Frage, welche Stellung das System gegen das zunächst liegende Aethertheilchen einnimmt.

Die Abstossung des kleinen Tetraëders nimmt rings um dasselbe ab, wenn die Entfernung wächst, sie hat aber bei derselben Entfernung in den verschiedenen Stellungen verschiedene Werthe. Verbindet man die Punkte gleicher Abstossung mit einander, so erhält man Flächen von doppelter Krümmung, die sich einhüllen und mit zunehmender Grösse sich mehr und mehr der Kugelgestalt nähern, bei geringerer Entfernung bald näher an den Kern treten, bald weiter weggehen. Da der Werth dieser Abstossung von einer dieser Flächen zur andern wächst, wenn man sich dem Tetraëder nähert, so muss endlich ein solcher kommen, welcher gerade so gross ist, als der durch den leeren Raum bewirkte Druck an derjenigen Stelle, wo die Fläche sich dem Mittelpunkte am meisten nähert. Nimmt man nun an, das Aethertheilchen befinde sich eben daselbst, so muss ein Ruhezustand eintreten; lässt man es aber über die Fläche hingleiten, so behält die Abstossung ihren gleichen Werth, der Druck des äussern Aethers muss grösser werden, weil der leere Raum zwischen Tetraëder und Aethertheilchen wächst, und das Aethertheilchen wird daher in die vorige Lage zurückgetrieben. Man kommt durch folgenden Schluss auf das gleiche Resultat. Es ist ein Grundgesetz der Statik, dass, wenn ein Körper von einem andern angezogen wird, er sich so stellt, dass sein Schwerpunkt dem anziehenden möglichst nahe liegt. Betrachtet man den innern Raum nach IV) als anziehend, so nimmt ein Aetheratom eine solche Lage an, dass R ein Minimum wird, welches wir mit R_1 bezeichnen wollen, es wird also die Stellung A (Gleichung 6) erhalten. Hier ist sein Ort des stabilen Gleichgewichtes, während in A_1 und A_2 labiles Gleichgewicht stattfindet. Rings um das kleine Tetraëder kommt das Minimum R viermal vor, und in Folge dessen bildet sich ein das kleine Tetraëder einhüllendes grösseres, dessen Ecke senkrecht über den Mittelpunkten der Flächen des kleineren stehen. Nimmt man an, was wohl nicht unwahrscheinlich ist, dass die Entfernung R_1 nicht unbeträchtlich grösser sei als r, so erhält man folgendes Resultat. Man hat im Innern 4 Aetheratome und 1 Massenatom, dessen Wirkung die von 3 Aetheratomen aufhebt. Wäre das übrig bleibende Aethertheilchen im Mittelpunkte des Tetraëders, so wäre seine Thätigkeit gerade so, als sei das Massentheilchen gar nicht vorhanden, und der Aether ausserhalb wäre in seiner Vertheilung genau wie die des unendlichen Raumes. Unter den gegebenen Verhältnissen ist dieses nicht ganz der Fall, so lange die Grösse r nicht vernachlässigt werden darf, es wird, wie schon aus der Entstehung des Umhüllungstetraëders hervorgeht, in dessen Nähe eine Abweichung von der gewöhnlichen Aethervertheilung stattfinden, doch will ich für jetzt da-

von, soweit es sich um die Vertheilung jenseits des Umhüllungstetraëders handelt, Umgang nehmen.

Nehmen wir nun an, ausser dem ersten (elementaren) Tetraëder, dessen Entstehung im Obigen entwickelt wurde, seien noch andere derselben Art im Raum vorhanden.

Die Einwirkung zweier solcher Tetraëder ist je nach der gegenseitigen Stellung verschieden, und dieselbe wird in folgenden Fällen einen extremen Werth erreichen.

B Beide Tetraëder stehen sich mit den Ecken gegenüber.

B_1 Dem Ecke des einen ist die Fläche des andern zugekehrt.

B_2 Beide Tetraëder wenden sich die Flächen zu.

B_3 Es stehen sich die Kanten gegenüber.

Dieselben Schlüsse, welche oben darauf geführt haben, dass ein Aethertheilchen sich gegen ein elementares Tetraeder so stellt, dass es ihm im Gleichgewichte möglichst nahe ist, gelten wieder, und wir haben daher auch hier diejenigen Fälle aufzusuchen, in denen die Abstossung ein Minimum wird. Aus diesem Grunde haben wir von den Stellungen B, B_1, B_2 wieder diejenigen zu nehmen, in denen das eine Tetraëder gegen das andere 60 Grade um die Verbindungslinie beider gedreht ist. In der Stellung B_3 sind die beiden Tetraëder einander gleich gelagert, die gegenüberstehenden Kanten sind also gekreuzt. Es soll im Folgenden von der Schwerewirkung $\left(c - \frac{a^2}{b}\right)$ wegen deren vergleichweisen Unbeträchtlichkeit abgesehen, also $c = \frac{a^2}{b}$ gesetzt werden, ausserdem ist $b\mu\mu$ der Einfachheit wegen $= 1$ genommen.

Es ist dann, weil $am = 3b\mu$, $c = \frac{a^2}{b} = \frac{9b\mu^2}{m^2}$ und $cm^2 = 9b\mu^2 = 9$.

Die Wirkungen sind folgende:

$$B = \left[\frac{6(R+\frac{2}{3}r)}{[(R+\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(R+\frac{2}{3}r)}{[(R+\frac{2}{3}r)^2+\frac{32}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{6(R-\frac{2}{3}r)}{[(R-\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R-2r)^2} + \frac{9}{R^2}\right] - \left[\frac{18(R+\frac{1}{3}r)}{[(R+\frac{1}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{6}{(R-r)^2}\right],$$

$$B_1 = \left[\frac{6R}{(R^2+\frac{8}{9}r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3R}{(R^2+\frac{32}{9}r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(R+\frac{4}{3}r)}{[(R+\frac{4}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(R-\frac{4}{3}r)}{[(R-\frac{4}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{10}{R^2}\right] - \left[\frac{9(R+\frac{1}{3}r)}{[(R+\frac{1}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{9(R-\frac{1}{3}r)}{[(R+\frac{1}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{(R+r)^2} + \frac{3}{(R-r)^2}\right],$$

$$B_2 = \left[\frac{6(R-\frac{2}{3}r)}{[(R-\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(R-\frac{2}{3}r)}{[(R-\frac{2}{3}r)^2+\frac{32}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{6(R+\frac{2}{3}r)}{[(R+\frac{2}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R+2r)^2} + \frac{9}{R^2}\right] - \left[\frac{9(R-\frac{1}{3}r)}{[(R-\frac{1}{3}r)^2+\frac{8}{9}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{6}{(R+r)^2}\right],$$

$$B_3 = \left[\frac{4(R-2r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{[(R-2r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{4}{3}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{4(R+2r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{[(R+2r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{4}{3}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{4R}{(R^2+\tfrac{8}{3}r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{13}{R^2}\right]$$
$$-\left[\frac{12(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{[(R+r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{12(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})}{[(R-r\sqrt{\tfrac{1}{3}})^2+\tfrac{2}{3}r^2]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

In Reihen ausgedrückt, erhalten diese Wirkungen nachstehende Werthe:

$$\begin{aligned} B &= R^{-2} + \frac{160}{9}R^{-5}r^3 + \frac{280}{27}R^{-6}r^4 + \frac{55552}{81}R^{-8}r^6 + \dots \\ B_1 &= R^{-2} + \frac{280}{27}R^{-6}r^4 - \frac{6272}{9}R^{-8}r^6 + \dots \\ B_2 &= R^{-2} - \frac{160}{9}R^{-5}r^3 + \frac{280}{27}R^{-6}r^4 + \frac{55552}{81}R^{-8}r^6 + \dots \\ B_3 &= R^{-2} - \frac{140}{9}R^{-6}r^4 - \frac{3248}{9}R^{-8}r^6 + \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Bei einigermaassen beträchtlichem Werthe von $\frac{R}{r}$ ist die Abstossung bei der Stellung B_2 ein Minimum. Sind die Tetraëder im Raume mit Aether untermischt, so entsteht die Frage, ob von einem Tetraëder ein Aethertheilchen oder ein anderes Tetraëder mehr abgestossen werde, und wählen wir die Stellung B_2, so ergiebt sich die Frage, ob B_2 grösser sei als A oder nicht. Man hat nun (Gleichung 6) und 7)

$$A - B_2 = \frac{80}{9}R^{-5}r^3 - \frac{140}{27}R^{-6}r^4 - \frac{54656}{81}R^{-8}r^6 + \dots \tag{8}$$

Das Tetraëder wird, wie man sieht, weniger abgestossen, als das Aethertheilchen, und weil letzteres in Folge der Wirkung des allgemeinen Aethers in Ruhe bleibt, ergiebt sich für das Tetraëder, das in Mitte der Aethertheilchen ist, eine Anziehung. Es geschieht dieses wenigstens so lange, als $\frac{R}{r}$ nicht zu klein wird; in welchem letzteren Falle B_3 die bevorzugteste Stellung ist.

Für den Fall, dass das zweite Tetraëder in der B_2-Stellung die Aetheratome wegdrängt, nähert es sich dem ersten etwas weiter, als ein Aethertheilchen es thun würde, bleibt aber dann stehen, weil der es hinführende Druck des allgemeinen Aethers immer kleiner wird. Werden die zwei Tetraëder über den Indifferenzpunkt zusammengestellt, so leisten sie, wie sich aus 7) ergiebt, einen mehr und mehr wachsenden Widerstand, und ein eben solcher kommt zum Vorschein, wenn man die Tetraëder von einander entfernen will. Im ersten Falle ist also die Abstossung der 2 Tetraëder, im zweiten der Druck des allgemeinen Aethers Ursache. Man sieht wohl leicht, dass diese Vorgänge alle Analogie mit den Erscheinungen der Porosität und Cohäsion zeigen. Wenn der neuen Fläche des ersten Tetraëders gegenüber sich ein zweites (Fläche gegen Fläche) ansetzt, so muss, da das

Tetraëder 4 Flächen hat, und jede sich unter gleichen Verhältnissen befindet, auch bei diesen der gleiche Vorgang stattfinden. Durch dieses Anwachsen entsteht ein grösseres Tetraëder, dessen Mitte und dessen Ecke von je einem kleinen eingenommen werden. Die an den Ecken stehenden Tetraëder werden sicherlich auch auf einander einwirken, aber wegen der bei wachsender Entfernung sehr rasch erfolgenden Abnahme der Kraft ist diese nunmehr schon sehr gering. Man hat es nämlich hier nur mit der Differenz der Wirkung von Aether und Tetraëder auf ein anderes Tetraëder zu thun und es fällt daher das Glied der Reihen (Gleichung 7), in welchem R^{-2} vorkommt, aus. Ausserdem können je 3 Ecktetraëder auf das vierte ihrer symmetrischen Stellung wegen keine andere Einwirkung haben, als dass sie die Entfernung desselben von der Mitte etwas grösser oder kleiner machen. Jedes der 4 Ecktetraëder zeigt 3 Flächen nach aussen, und an diese lagert sich, der Ordnung gemäss, wieder je ein Tetraëder an, und wenn man diesen Vorgang fortgesetzt denkt, so entsteht, wie man an einem Modelle*) leicht sehen kann, ein grösserer Körper von derselben Form, ein grosses Tetraëder. Dieser Körper, von dem Taf. II, Fig. 2 die Projection auf eine Ebene darstellt, welche mit 2 der krystallographischen Axen parallel ist, zeigt deutliche Blätterdurchgänge *ab* und *cd* parallel mit den Kanten und parallel mit den Flächen, und giebt so die Uebergänge in Würfel und Octaëder. Nimmt man das ein Eck bildende kleine Tetraëder *e* oder *g* weg, so erscheinen 3 Zuspitzungsflächen (von der Fläche aus), welche gegen einander um 120° geneigt sind, und bei deren Ausbildung ein Rhombendodecaëder entstehen würde. Nimmt man die die Kante bildende äusserste Tetraëderreihe *f* oder *eg* weg, so kommen 2 Zuschärfungsflächen zum Vorschein, die sich unter einem Winkel von 109° 28′ 16″ schneiden, und bei deren Ausbildung die eine der in der Natur vorkommenden Varietäten des Triakistetraëders entsteht, welche, wie die Lehrbücher der Mineralogie angeben, genau diesen Winkel hat. Die Entfernungen je zweier primären Tetraëder sind alle gleich und die Verschiedenheit derselben in Fig. 2 rührt daher, dass die in kleineren Distanzen befindlichen Punkte die Projectionen von verschieden, weit von der Projectionsebene entfernten Tetraëdern sind. Parallel mit den Kanten und mit den Flächen des grossen Tetraëders gehen hexagonale Räume durch den Krystall, welche leer bleiben, weil die kleinen Tetraëder abwechselnd ihre Kanten und Ecke hinzeigen, bei welchen die Anziehung eine geringere, beziehungsweise eine Abstossung ist.

Wenn bei kleinerem Werthe von $\frac{R}{r}$ nicht mehr die Stellung B_2, sondern B_3 das Maximum der Anziehung bietet, so legen sich die kleinen Te-

*) Ich mache mir diese Modelle aus frisch gebackenem Brode, das geknetet und zu Tetraëdern geformt wird, worauf ich die einzelnen Stücke vor dem Erhärten mit Nadeln oder feinem Drahte, sogenanntem Binddrahte, verbinde.

traëder Kante gegen Kante gegen einander, und es entsteht hier ebenso, wie vorhin das Tetraëder, ein grosses Octaëder, dessen Construction sich aus Taf. II, Fig. 3 ergiebt, welche einen Schnitt darstellt, der mit 2 Axen parallel ist. Man hat hier dreierlei Blätterdurchgänge. Der deutlichste ist *ab*, senkrecht auf einer Axe (Uebergang zum Würfel). Der zweite Blätterdurchgang ist *cd*, parallel zu den Kanten (Uebergang in das Rhombendodecaëder), und endlich ist noch ein weniger deutlicher Blätterdurchgang da, der parallel mit den Flächen geht. Würde die Stellung B_1 das Maximum der Anziehung geben, so würde ein Würfel entstehen. Jede Fläche desselben würde eine Art Schachbrett darstellen, dessen eine Felder an jedem Ecke mit einem Tetraëder versehen, dessen andere leer wären.

Die Stellung B endlich weist auf das der Stellung B_2 correspondirende Tetraëder hin.

Man kann bezüglich der gegenseitigen Einwirkung zweier primären Tetraëder ebensogut um das eine Flächen gleicher Anziehung annehmen, wie dieses oben bezüglich der Wirkung von Tetraëder und Aetherkugel geschehen ist. Nimmt man z. B. ein Tetraëder als fest an und führt man das andere darum herum, so kommen bei der gleichen Entfernung verschiedene Wirkungen oder bei verschiedenen Entfernungen gleiche Wirkungen zum Vorschein, aber nirgends ausser der einen Lage ist die Abstossung bei einer gegebenen Entfernung ein Minimum. Der äussere Druck des allgemeinen Aethers sucht das Tetraëder ebensogut in der bestimmten Stellung festzuhalten, wie oben bezüglich der Aetherkugel angeführt wurde, und er setzt daher jeder Verrückung einen Widerstand entgegen. Je grösser dieser Widerstand ist, um so bedeutender ist die Härte des Krystalles. Die einzelnen Theile des Krystalles haben gegen einander die verschiedensten Stellungen, die, wenn man sich den Körper auf die Erde gelegt denkt, von der Richtung der Schwere in der verschiedensten Weise abweichen. Ist die Schwerewirkung im Stande, Verschiebungen der Tetraëder zum Vorschein zu bringen, ist also die Härte geringer als die Schwere, so entsteht eine Flüssigkeit. Es fehlen mir zur Zeit alle Anhaltspunkte, die Frage, wie lange diese Bedingung, dass Härte $>$ Schwerewirkung, erfüllt sei, zu beantworten, da die Constanten a, b, c, sowie die Constante des Druckes des äusseren Aethers bei bestimmter Grösse des ätherleeren Raumes unbestimmt sind, und ich muss mich daher damit begnügen, auf den Umstand aufmerksam zu machen.

Amorphe Körper sind solche, deren Theilchen sich gar nicht oder nur zum Theile in der Stellung des Maximums der Attraction befinden. Es ist bekannt, dass amorphe Körper mitunter für sich (arsenige Säure, amorpher Zucker), manchmal auch unter dem Einflusse der Bewegung (Eisenbahnschienen) in den krystallinischen Zustand übergehen. Bei vielen Körpern, wie z. B. den organischen können auch die Molecüle eine solche Gestalt haben, dass sie sich gar nicht zu einem Krystalle zusammenbauen lassen.

Ich muss hier darauf aufmerksam machen, dass dann, wenn die einzelnen Molecüle des Körpers nicht alle die Maximumstellung haben, dieses doch bei einzelnen der Fall sein kann, und dass selbst, wenn dieses nicht sein sollte, die gegenseitige Abstossung der Molecüle dennoch so klein sein kann, als die des Druckes des äusseren Aethers, und die Cohäsion ist daher auch bei den amorphen Körpern, sowie den Flüssigkeiten recht gut möglich. Wenn man nicht das Maximum der Anziehung hat, braucht man darum nicht gleich auf das Maximum der Abstossung überzugehen. Ich komme übrigens am Schlusse meiner Abhandlung auf diesen Punkt zurück.

Wenn man die Wirkungen betrachtet, die ein Elementartetraëder nach den Formeln 6) auf ein Aethertheilchen ausübt, so ergiebt sich, dass in Stellung A eine Thätigkeit stattfindet, bei der das Tetraëder das Aethertheilchen weniger abstösst, als ein Aethertheilchen an seiner Stelle thun würde, und die Folge ist, dass sich in geringerer als der gewöhnlichen Aetherdistanz um das Tetraëder herum 4 Aetherkugeln anlagern, und das bereits mehr erwähnte Umhüllungstetraëder bilden. Dieses Umhüllungstetraëder lässt sich als integrirender Bestandtheil des ganzen Elementartetraëders betrachten, da seinen Theilen von letzterem eine bestimmte Stellung angewiesen ist. Es ist nun nicht nur möglich, sondern im höchsten Grade wahrscheinlich, dass sich bei der Krystallisation je ein Aetheratom zwischen 2 ursprüngliche Tetraëder einschiebt. Nehmen wir z. B. an, ein solches Tetraëder sei einige Zeit in Ruhe gewesen, so werden sich mittlerweile die Aethertheilchen als Umhüllungstetraëder um dasselbe herum gruppirt haben; kommt nun ein zweites Tetraëder daher, so ist sehr gut denkbar, dass sich dieses auf der dem ersten entgegengesetzten Seite des Aetheratomes festsetzt. Nehmen die zwei kleinen Tetraëder diesseits und jenseits des Aetheratomes eine solche Stelle ein, dass sie sich die Flächen zuwenden (Stellung B_2), so befinden sie sich sowohl gegenseitig, als auch dem zwischenliegenden Aethertheilchen gegenüber im Maximum der Anziehung. Das zweite Tetraëder hatte aber vor der Verbindung mit dem ersten ebenfalls seine Umhüllung, nach der Verbindung muss eine der 4 Aetherkugeln derselben entfernt sein, und so viele Molecüle sich anlagern, so viele Aetherkugeln, die vorher Bestandtheile der Umhüllungstetraëder waren, werden frei geworden sein. Redtenbacher sagt in seinem Dynamidensystem S. 30: „Die rationelle specifische Wärme oder Wärmecapacität eines Stoffes ist die Anzahl der Aetheratome, welche in der Gewichtseinheit des Stoffes enthalten ist.“ Geht nun ein Körper bei dem Krystallisiren in einen solchen von geringerer specifischen Wärme über, wie z. B. Wasser in Eis, so muss Aether und mit ihm Wärme abgeschieden werden, und es würde also bei der vorstehenden Annahme auch die Erklärung der Erscheinung, dass bei dem Krystallisiren Wärme frei wird, eingefügt werden können. Bei dieser Annahme der Einschaltung von Aetheratomen zwischen den Elementartetraëdern ergiebt sich eine grössere Entfernung derselben von einander, was

den allgemein herrschenden Ansichten über Aether- und Moleculardistanz besser entspricht. Das so entstandene Tetraëder besteht eigentlich aus 2 verschiedenen Elementen. Innere Tetraëder stehen sich in gewissen Distanzen Fläche gegen Fläche gegenüber, und sie sind eingehüllt von Aethertetraëdern, die einander die Ecke zuwenden, wobei stets ein Aetheratom als das Eck zweier an einander stossender Tetraëder betrachtet werden kann. Bei dieser Vertheilung des Aethers findet man an einem Modelle sehr leicht, dass dieselbe in Beziehung auf jede der 3 krystallographischen Axen die nämliche ist, und dass daher das Licht in einem solchen Krystalle einfach gebrochen werden muss.

Die Einwirkung eines Molecüles auf den äusseren Aether wurde bisher als nach der Bildung des Umhüllungstetraëders abgeschlossen angenommen. Streng genommen ist dieses nicht der Fall, denn es müssen sich auch die ferner stehenden Aethertheilchen in einer bestimmten Ordnung gruppiren, die jedoch mit zunehmender Entfernung sich weniger und endlich gar nicht mehr bemerken lässt. Auf diese Weise entsteht eine Redtenbacher'sche Dynamide, die in dem vorliegenden Falle offenbar eine tetraedrische Anordnung ihrer Aethertheilchen zeigen muss. Innen ist das Elementartetraëder als Kern und dann kommen noch verschiedene Hüllen darüber. Die Bildung einer solchen Dynamide ist abgeschlossen, wenn sie sich gegen den äussern Aether gerade so verhält, als sei die eigenthümliche Structur ihres Innern nicht vorhanden. Es wurde oben bereits angeführt, dass, weil 3 Aetherkugeln des Elementartetraëders von dem Massentheichen neutralisirt werden, die ganze Wirkung auf den äussern Aether sich von dem Falle, dass das Elementartetraëder durch ein einzelnes Aethertheilchen ersetzt wird, nur darin unterscheidet, dass dieses Aethertheilchen nicht in der Mitte ist, und dass dieser Unterschied mit zunehmender Entfernung sich verringern und endlich verschwindend klein werden müsse. Eine vollständige Dynamide wirkt also gegen den äussern Aether gar nicht und gegen ein äusseres Massentheilchen nur insofern, als wie bereits in 4) angenommen $c < \frac{a^2}{b}$. Der Umstand, dass das Massentheilchen sich mit Aether überladet, ist für die Schwerewirkung ohne Einfluss. Zwei solche Dynamiden wirken auf einander nur insofern, als die geringe Schwere es erheischt, kommen sie aber zu einander in eine solche Nähe, dass ihre eigenthümliche innere Structur in Betracht gezogen werden muss, so kann die gegenseitige Einwirkung nicht mehr in allen Stellungen die gleiche sein, sie muss nach der einen einen grösseren und darum auch nach der andern einen kleineren Werth haben, als dieses bei der nach allen Richtungen indifferenten Vertheilung der Fall wäre. Bei Letzterer findet weder Anziehung noch Abstossung statt (wenn man von der Schwerewirkung absieht), und es muss daher eine oder mehrere Stellungen geben, in denen wir Anziehung haben. Diese Stellungen können nur unter den oben erwähnten B-Stellungen zu

suchen sein, und es muss daher eine der erwähnten Krystallformen zum Vorschein kommen. In jeder dieser Formen hat der Aether eine in Beziehung auf die krystallographischen Axen gleichmässige Vertheilung, der Krystall wird daher das Licht jedenfalls einfach brechen.

Entstehung von Krystallen des hexagonalen Systemes.

Verhält sich die träge Substanz des Massentheilchens zu der des im vorigen Falle angenommenen wie 2 zu 3, so dass also

$$a\,m_1 = 2\,b\,\mu,$$

so werden sich primär 2 Aetherkugeln an dasselbe anlagern, die sich an der Massenkugel diametral gegenüber stehen. Sucht man die Wirkung des so entstandenen Molecüles auf ein Aethertheilchen, das in einer Geraden ist, die durch den Mittelpunkt der Massenkugel geht und auf der Verbindungslinie der 2 Aethermittelpunkte senkrecht steht, so ergiebt sich

$$W_1 = \left(\frac{2R}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{R^2}\right) b\,\mu\,\mu.$$

Da hier Anziehung vorhanden ist, lagert sich ein drittes Aethertheilchen an, und alle 3 stellen sich so, dass ihre Mittelpunkte die Ecke eines gleichseitigen Dreieckes bilden, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Massenkugel geht. Ein viertes Aethertheilchen wird nicht aufgenommen, denn wie sich aus Gleichung 5) leicht ableiten lässt, erhält man

$$W_1 = \left(\frac{3R}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{R^2}\right) b\,\mu\,\mu.$$

Nun folgen sich *mutatis mutandis* dieselben Vorgänge, wie bei dem Tetraëder. Zuerst setzen sich in einer von dem äusseren Aetherdrucke abhängigen Distanz senkrecht oberhalb und unterhalb 2 Molecüle an, die gegen das untere um 60° gedreht sind. In der Ebene der Aetherkugeln des mittleren Molecüles lagern sich weitere an, deren Ebene in Folge der Einwirkung des oberen und des unteren mit der des mittleren zusammenfällt. Die gegenseitige Stellung der in der mittleren Ebene befindlichen Molecüle kann bei dem Maximum der Attraction nur eine der folgenden sein:

C Beiderseits sind sich die Ecke zugewandt.
C_1 Die Ecke sind sich abgewandt.
C_2 Die Ecke haben gleiche Richtung.

In jedem dieser Fälle entsteht durch Gruppirung einer grossen Anzahl von Theilchen eine hexagonale Pyramide (die Figuren 4, 5 und 6 der Taf. II geben Abbildungen dieser Formen, senkrecht auf die krystallographische Hauptaxe genommen). Die Hauptblätterdurchgänge sind senkrecht auf der Hauptaxe, weitere sind senkrecht auf den Nebenaxen. Es ergiebt sich hierbei von selbst die Nothwendigkeit des Gesetzes der Axenveränderung, der Längenverschiedenheit ungleichnamiger Axen u. s. w. Nimmt man auch hier statt der blossen Molecüle das Zusammenwirken der Dynamiden an, so

ergiebt sich auch die Nothwendigkeit, dass ein solcher Krystall das Licht doppelt brechen muss.

Wärme-Erscheinungen.

Es wurde oben der Ausspruch Redtenbacher's erwähnt, dass die specifische Wärme einer Dynamide von der Menge des sie constituirenden Aethers abhängt. Ist dieses der Fall, so muss ein Körper, der Aether abgiebt, auch eine geringere specifische Wärme bekommen. Wenn so die Abgabe von Wärme mit der von Aether verbunden ist, so muss es zulässig sein, anzunehmen, dass auch bei andern Wärme-Entwickelungen eine Abgabe von Aether vorkommen könne. Eine solche Aetherabgabe scheint mir auch einzutreten, wenn eine Gasart comprimirt wird; die dabei stattfindende Wärmeentwickelung hängt in diesem Falle von der Menge des abgesonderten Aethers ab. Ich mache hier, selbst auf die Gefahr hin, einer Ketzerei beschuldigt zu werden, auf den bekannten Versuch Joule's aufmerksam, der als Beweis für den Satz gilt, dass die specifische Wärme der Gase sich nicht mit dem Drucke ändert. Joule hat in einem und demselben Calorimeter 2 Behälter von gleichem Volumen, in deren einem sich Luft von z. B. 2 Atmosphären Druck befindet, während der andere luftleer ist. Setzt man die beiden Behälter plötzlich in Verbindung, so entsteht keine Temperaturänderung, und man erhält Luft von dem Volumen 2 und dem Drucke 1 Atmosphäre. Ich unterscheide nun zwischen leerem Raume in chemischem und leerem Raume in physikalischem Sinne. Gesetzt, man habe einen Glasballon vollständig luftleer gemacht, so ist dieser Ballon leer in chemischem Sinne, er ist es so lange, als der Aether nicht im Verzeichnisse der chemischen Elemente vorkommt, und wenigstens ich habe ihn bisher in keinem Lehrbuche der Chemie gefunden. Der Ballon ist jedoch im physikalischen Sinne nicht leer, sondern er enthält Aether. Dass der Aether vorhanden ist, geht schon daraus hervor, dass man den Ballon nicht so auspumpen kann, dass er undurchsichtig wird. Ist Aether vorhanden, so muss er auch eine Temperatur haben, wenigstens nimmt man eine solche von dem Aether des allgemeinen Raumes an, denn wir haben sogar Bestimmungen derselben. Die Temperatur des im Ballon befindlichen Aethers ist wohl keine andere, als die des Calorimeters, wenn der evacuirte Ballon der luftleere Behälter im Joule'schen Versuche ist, und befindet sich der mit Luft gefüllte Behälter in dem nämlichen Calorimeter, wie der Versuch dieses voraussetzt, so haben comprimirte Luft und Aether die gleiche Wärme. Der Versuch reducirt sich sonach darauf, dass 2 Flüssigkeiten von gleicher Temperatur mit einander gemischt werden, und dass sie nach der Mischung die nämliche Wärme haben, wie vor derselben, was hier am Ende zu erwarten stand. Es kann hier nur das nach meinem Dafürhalten äusserst wenig begründete Bedenken entgegengestellt werden, dass das durch Mischung von gleichen Raumtheilen Aether und von Luft von 2 Atmosphären

entstandene Product etwas anderes sei, als die gewöhnliche atmosphärische Luft. Nach Reis (Wesen der Wärme, 2. Aufl. 37) sieht man, wenn man ein Thermometer in der Glocke der Luftpumpe angebracht hat, das Thermometer bei jedem Kolbenhub sinken, und sich dann wieder heben. Zeigt hier das Sinken des Thermometers ein Sinken der Luftwärme an, so fragt sich, ob die so entschwundene Wärme durch die Arbeit der Luft entschwunden sei oder nicht. Gewiss ist das Erstere nicht der Fall, denn die Luft hat den Kolben nicht gehoben, sie hat gar keine Arbeit geleistet, und die Temperaturerniedrigung ist nur dadurch entstanden, dass die Luft, wenn sie sich ausdehnt, auch ohne Arbeit zu leisten, vermöge der geringeren Dichtigkeit kälter wird, und sich wieder erwärmt, wenn von aussen Aether nachgedrungen ist. Dünne Luft ist dichte Luft + Aether in einem grösseren Gefässe.

Man nimmt gewöhnlich an, die älteren Versuche über die specifische Wärme der Gase seien unrichtig, wenn sie für verschiedene Dichtigkeiten verschiedene Werthe der specifischen Wärme ergeben. Es dürfte dieses doch nicht ganz der Fall sein. Clement und Desormes (Baumgartner, Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande mit Rücksicht auf mathematische Begründung, Wien 1845, S. 728) haben bei atmosphärischer Luft nachstehende Resultate erhalten:

Druck	Relative Wärme	also specifische Wärme.
0^{m},758	1,000	1,000
0,379	0,693	1,386
0,189	0,540	2,166
0,095	0,368	2,936.

Die Drucke verhalten sich also zu einander, wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, die entsprechenden specifischen Wärmen, wie $1{,}000\sqrt{1} : 0{,}980\sqrt{2} : 1{,}083\sqrt{4} : 1{,}038\sqrt{8}$. Man könnte aus diesen Beziehungen versucht sein, anzunehmen, dass die specifische Wärme der atmosphärischen Luft wächst, wie die Quadratwurzel des Druckes abnimmt. Ich weiss sehr wohl, dass manche Bestimmungen von Clement und Desormes, wie z. B. das Verhältniss der specifischen Wärme eines Gases bei constantem Druck zu der specifischen Wärme bei constantem Volumen später corrigirt worden sind; aber die hier gefundenen Ungenauigkeiten der Versuche stehen in keinem Verhältnisse zu der Unrichtigkeit, die man voraussetzen müsste, wenn in der That die specifische Wärme der Gase für jeden Druck die gleiche wäre. Nimmt man auch an, dass bei der Compression eines Gases Aether abgeschieden werde, so folgt darum noch nicht, dass diese Abscheidung auch eintrete, wenn das Gas erhitzt wird und sich dann ausdehnt; es entsteht daher keine Collision mit dem Satze von dem Arbeitsaequivalente der Wärme, der auf letztere Erscheinung sich gründet.

Man nimmt gewöhnlich an, dass die Temperatur der Körper, wenigstens der festen und der tropfbar flüssigen, durch Schwingungen ihrer kleinsten

Theilchen verursacht werden. Bei diesen Oscillationen findet der Vorgang statt, dass ein Theilchen sich mit wechselnder Geschwindigkeit aus der Gleichgewichtslage entfernt, endlich stehen bleibt, umkehrt u. s. w. Dabei wird die gegenseitige Entfernung zweier Theilchen fortwährend geändert, und es bleibt die Frage zu beantworten, ob darum auch die gegenseitige Einwirkung der Theilchen verschiedene Werthe bekomme. Auf diesen Umstand hat bereits Fick (Pogg. Ann. XCI, S. 287) aufmerksam gemacht. Nennt man den gegenseitigen Abstand zweier Theilchen R und setzt man das eine als ruhend, während das andere innerhalb der Entfernung $R \pm r$ hin und her geht, so ist, wenn man der gewöhnlichen Annahme von der Bewegung schwingender Körper folgt und voraussetzt, dass die Wirkung abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung wächst, dass ferner die Schwingungsrichtung in die Verbindungslinie der beiden Theilchen fällt, die Wirkung während der ganzen Schwingung

$$9)\qquad W = 2b\mu\mu \int \frac{dt}{\left[R + r\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^2},$$

wenn t die seit dem Beginne der Bewegung verflossene, T die zu einer ganzen Schwingung nothwendige Zeit bedeutet. Das Integral ist zwischen den den extremen Stellungen entsprechenden Werthen von t zu nehmen, $b\mu\mu$ hat dieselbe Bedeutung wie früher.

Für den Fall, dass die Schwingungsrichtung senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Theilchen steht, erhält man als Componirende in der Richtung dieser Verbindungslinie

$$10)\qquad W_1 = 2b\mu\mu \int \frac{R\,dt}{\left[R^2 + r^2\left(\sin\frac{2\pi t}{T}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nimmt man an, das zweite Theilchen schwinge ebenfalls, sei aber rücksichtlich der Phase um die Zeit $\Delta t = \frac{2\pi t_1}{T}$ hinter dem ersten zurück, wobei Δt als sehr klein gesetzt wird, was der Wahrheit wohl am nächsten kommt, so gehen die Gleichungen 9) und 10) über in

$$11)\qquad W = 2b\mu\mu \int \frac{dt}{\left[R + r\left(\cos\frac{2\pi t}{T} - \cos\left[\frac{2\pi t}{T} - \Delta t\right]\right)\right]^2}$$

$$= 2b\mu\mu \int \frac{dt}{\left[R - r\,\Delta t \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^2},$$

$$12)\qquad W_1 = 2b\mu\mu \int \frac{R\,dt}{\left[R^2 + r^2\left(\sin\frac{2\pi t}{T} - \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \Delta t\right]\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2b\mu\mu \int \frac{R\,dt}{\left[R^2 + r^2\Delta t^2\left(\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Integration ergiebt sich:

$$13)\quad W = b\mu\mu T\left(R^{-2} + \frac{3}{2}R^{-4}r^2\Delta t^2 + \frac{15}{8}R^{-6}r^4\Delta t^4 + \frac{35}{16}R^{-8}r^6\Delta t^6 + \ldots\right)$$

$$14)\quad W_1 = b\mu\mu T\left(R^{-2} - \frac{3}{4}R^{-4}r^2\Delta t^2 + \frac{45}{64}R^{-6}r^4\Delta t^4 - \frac{175}{256}R^{-8}r^6\Delta t^6 + \ldots\right).$$

Bedenkt man nun, dass die Wirkung zweier Theilchen im Zustande der Ruhe für dieselbe Zeit T den Werth $\frac{b\mu\mu T}{R^2}$ hat, so ergiebt sich, wenn man mit T dividirt und so die Wirkung für die Zeiteinheit bekommt, dass im ersten Falle die Aenderung der Wirkung, die durch die Oscillation hervorgerufen wird,

$$b\mu\mu\left(+\frac{3}{2}r^2\Delta t^2R^{-4} + \frac{15}{8}r^4\Delta t^4R^{-6} + \frac{35}{16}r^6\Delta t^6R^{-8} + \ldots\right),$$

im zweiten

$$b\mu\mu\left(-\frac{3}{4}r^2\Delta t^2R^{-4} + \frac{45}{64}r^4\Delta t^4R^{-6} - \frac{175}{256}r^6\Delta t^6R^{-8} + \ldots\right)$$

beträgt. Die Theilchen stossen sich im ersten Falle mehr ab, im zweiten weniger, und darum muss im ersten eine Ausdehnung stattfinden, im zweiten eine Zusammenziehung.

Man nimmt als Regel an, dass die Schwingungen so vertheilt sind, dass nach je 3 senkrecht auf einander stehenden Richtungen gleich viele Schwingungen vorkommen, und wenn man daher den Gesammteffect haben will, so hat man

$$b\mu\mu\left(\frac{3}{2}\frac{r^2\Delta t^2}{R^4} + \frac{15}{8}\frac{r^4\Delta t^4}{R^6} + \frac{35}{16}\frac{r^6\Delta t^6}{R^8} + \ldots\right)$$
$$+ 2b\mu\mu\left(-\frac{3}{4}\frac{r^2\Delta t^2}{R^4} + \frac{45}{64}\frac{r^4\Delta t^4}{R^6} - \frac{175}{256}\frac{r^6\Delta t^6}{R^8} + \ldots\right)$$
$$= b\mu\mu\left(\frac{105}{32}\frac{r^4\Delta t^4}{R^6} + \frac{105}{128}\frac{r^6\Delta t^6}{R^8} + \ldots\right)$$

zu nehmen. Es muss daher eine Ausdehnung erfolgen. Sind um das schwingende Theilchen herum andere in je gleichen Abständen aber in verschiedenen Richtungen befindlich, so muss, da alle Schwingungsrichtungen gleichmässig vertreten sind, eine allseitig gleichmässige Ausdehnung erfolgen; sind die Entfernungen in Folge ungleichmässiger Vertheilung in den verschiedenen Richtungen wechselnd, wie dieses z. B. bei den einaxigen und zweiaxigen Krystallen der Fall ist, so muss es auch die Ausdehnung sein. Sie ist grösser, wenn R (in der Richtung der kleineren Axe) kleiner ist, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

Selbstverständlich werden bei den Schwingungen eines Theilchens nicht blos die nächstliegenden, sondern auch die ferner gelegenen afficirt. Hat man z. B. 3 Theilchen in einer Reihe hinter einander je durch den Zwischenraum R getrennt, und beginnt das erste zu oscilliren, so gilt für das zweite das, was oben gesagt wurde, bei dem dritten kann aber die

Schwingung des ersten noch recht gut ihren Einfluss äussern, und es wird dann $2R$ statt R gesetzt, wie auch Δt den doppelten Werth erhält. Die Gesammtausdehnung ist von der Summe aller dieser Wirkungen abhängig.

Elektrische, magnetische und chemische Erscheinungen.

Es bleibt noch übrig, den Zusammenhang meiner Sätze mit den noch übrigen physikalischen Disciplinen, den Lehren der Elektricität, des Magnetismus und der Chemie nachzuweisen; ich will mich jedoch damit begnügen, zu zeigen, dass meine Sätze mit diesen wenigstens nicht im Widerspruch stehen. Was zunächst die Elektricität und den Magnetismus anbelangt, so sind die Fundamentalsätze derselben keine anderen als die von mir angegebenen I) und II), es existirt also hier principielle Uebereinstimmung, und es kann daher nicht schwierig sein, die Verbindung herzustellen.

In Beziehung auf die chemischen Verhältnisse reicht die blosse Annahme zweier sich entgegengesetzten Stoffe nicht aus, um die Theorie den Erscheinungen anpassen zu können. Durch Zugrundelegung der Schwere im Verein mit der Trägheit kann man sich eine Welt construiren, in welcher einzelne Haufen von materieller Substanz zu Kugeln geballt einander umkreisen, man kann die Bewegungen der Gestirne daraus ableiten. Durch Annahme von Anziehungen und Abstossungen der Atome, je nachdem dieselben ungleichartig oder gleichartig sind, erhält man, wie ich oben gezeigt habe, die Porosität der Körper, man kann Krystalle bekommen, aber noch nicht die Welt, wie sie sich um uns her zeigt, denn man erhält noch keine Verschiedenheit der Körper. Hierzu ist eine neue Voraussetzung nöthig, und als solche halte ich für die einfachste die, dass die Atome als verschieden gross vorausgesetzt werden. Dadurch, dass man das einemal die Grösse des Massentheilchens gleich 3, das anderemal gleich 2 setzt, erhält man, wie ich oben gezeigt habe, im ersten Falle tesserale, im zweiten hexagonale Krystalle, man erhält also eine Mannigfaltigkeit der Körper, die auf eine Verschiedenheit der Atomgewichte zurückführt. Es fällt mir natürlich nicht ein, ebenso viele verschiedene Körper als in der Natur gegeben vorauszusetzen, als das bei den sogenannten chemischen Elementen geschieht, denn ich glaube, dass man mit einigen wenigen Combinationen ausreichen kann, allein einige und wenn am Ende nur zwei wird man doch voraussetzen müssen.

Jeder Körper zerfällt in Molecüle, die, aus Aether- und Massenatomen zusammengesetzt sind, für sich durch Hüllen von Aether zu Dynamiden werden, und, so lange sie so eingehüllt sind, wenig oder gar nicht auf einander wirken. Verbinden sich mehrere Molecüle mit einander, so werden die Aetherhüllen, wenigstens zum Theile, abgeschieden, und dieser Vorgang giebt sich durch Freiwerden von Wärme zu erkennen. Bei der darauf folgenden Trennung wird der Aether wieder aufgenommen. Ehe dieses geschieht, muss die gegenseitige Einwirkung verschiedenartiger Molecüle eine

unmittelbarere sein und leichter eine neue Verbindung eintreten. (*Status nascendi* der Chemiker.) Man unterscheidet in der Chemie einen gewissen Gegensatz der einzelnen Körper, wie etwa + und —, und dieser Umstand lässt sich durch 2 verschiedene Verhältnisse erklären, ohne dass man nöthig hätte, zu einer weiteren Verschiedenheit der Materie seine Zuflucht zu nehmen.

1) Wenn die Kugeln der Massentheilchen verschieden gross sind, und sich um die eine derselben 2, 3 oder mehr Aethertheilchen lagern, so ist sehr leicht denkbar, dass in andern Fällen das Entgegengesetzte stattfinde. Man hat dann positive und negative Elemente, indem bei dem einen der Kern von einer Massenkugel, bei dem andern von einer Aetherkugel gebildet wird. Diese Elemente können sich mit einander verbinden, und die Verbindungen erster Ordnung können zu solchen höherer Ordnungen zusammentreten.

2) Bei der Ableitung der tesseralen Krystalle bin ich von der Annahme ausgegangen, dass $am = 3b\mu$, bei den hexagonalen, dass $am = 2b\mu$ sei. Die Erfüllung dieser Gleichungen ist nicht strenge nothwendig, d. h. am muss nicht genau $= 3b\mu$, beziehungsweise $= 2b\mu$ sein. Denkt man sich, dass am von dem ursprünglichen $2b\mu$ allmälig wachse, so wird bis zu einer gewissen Grenze die Zahl der aufgenommenen Aethertheilchen nur 3 betragen und dann auf 4 steigen. Diese Letzteren bleiben wieder, bis bei einem Werthe von am zwischen $3b\mu$ und $4b\mu$ 5 Aethertheilchen aufgenommen werden können. Ist $am < 3b\mu$, so muss dieser Umstand auf die Vertheilung des Aethers in der Umhüllung seinen Einfluss haben. Es wird zwar die allgemeine Form der Dynamide bleiben, aber die Entfernung der einzelnen Schichten von einander muss eine andere sein, als wenn $am = 3b\mu$ wäre, und der entgegengesetzte Fall wird eintreten, wenn $am > 3b\mu$. Es bietet sich also hier ein Gegensatz der chemischen Elemente (denn als solche sind die bisher betrachteten Dynamiden zu nehmen), dessen Nothwendigkeit sich der einfachsten Ueberlegung kund giebt, während die Aufgabe, die Orte zu bestimmen, welche die einzelnen Aethertheilchen einer vollständigen Dynamide einnehmen, eine sehr schwierige, wenn nicht zur Zeit unlösliche ist. Sind mehrere Dynamiden in grösserer Entfernung von einander, so ist ihre gegenseitige Wirkung auf die geringe Schwere reducirt. Drückt man sie zusammen, so wird ein Theil der Aetherhülle abgeschieden, wie sich aus dem Entweichen von Wärme ergiebt, und ausserdem muss eine Verdichtung des Restes der Aetherhülle stattfinden, denn die ganze Hülle ist nichts, als das Product des äusseren Druckes, sie muss also bei wechselndem Drucke dichter werden.

Es giebt hier zwei verschiedene Wege, denen man folgen kann. Man kann voraussetzen, dass die einzelnen Dynamiden ursprünglich weit von einander entfernt und durch freien Aether von einander getrennt gewesen seien. In diesem Falle ist das, was abgeschieden wird, der freie, in-

termoleculare Aether (von dem allerdings angenommen werden muss, dass er auch durch die Wandungen des Gefässes dringen kann, welcher Annahme jedoch bei der Porosität des Letzteren kein erhebliches Bedenken im Wege steht) und die Dynamiden bleiben ganz. Setzt man Letztere als bewegt voraus, so schliesst sich die Erscheinung unmittelbar an die Krönig-Clausius'sche Gastheorie an. Der zweite Fall ist der, dass man annimmt, die Dynamiden seien *a priori* nahe an einander gewesen. Jetzt ist der abgeschiedene Aether von den Hüllen genommen, der Rest der Hüllen ist comprimirt, und das Widerstandsvermögen derselben muss auch bei wachsender Compression zunehmen. Zuletzt kommt die innere eigenthümliche Structur der Dynamide zum Vorschein, und jetzt muss der Widerstand, der einer weiteren Compression entgegengesetzt wird, ein anderes Gesetz befolgen, als vorher der Fall war, als sich die Gestalt der Hüllen noch der der Kugelschale näherte. Das Abscheiden der äusseren Hüllen und mithin das Hervortreten der inneren charakteristischen kann sogar soweit gehen, dass Cohäsionserscheinungen wahrgenommen werden, und das Gas ist dann condensirt.

Bringt man verschiedenartige Dynamiden zusammen, so erfolgt analog dem Vorhergehenden nur schwierig eine Verbindung, so lange die Dynamiden vollständig sind, wie man sehr leicht an der atmosphärischen Luft beobachten kann, die bekanntlich ein Gemenge von Sauerstoff und Stickstoff ist, die sich verbinden können, wenn die Hüllen abgestreift sind.

Kommen verschiedenartige Dynamiden neben einander vor, von denen wir annehmen wollen, dass die äusseren Hüllen entfernt sind, so müssen auch hier wieder Stellungen eintreten, in denen das Maximum der Attraction stattfindet. Nimmt man zunächst ein Atom A und mehrere Atome B an, so wirkt das A auf die B und diese wirken unter einander. Es kann nun im Zustande des Maximums der Attraction die Anziehung von A auf ein B grösser oder kleiner sein als die, welche das günstigst gestellte B auf Letzteres ausübt. Im ersten Falle entsteht die chemische Verbindung AB, im Letzteren findet die Cohäsionserscheinung BB statt, z. B. Bildung eines Niederschlages.*) Wie oben das Elementartetraëder sich mit mehreren anderen verbinden konnte, so ist es auch möglich, dass das A mehrere B aufnimmt, wenn man die chemische Verbindung eintreten lässt, und die kleinen angefügten Tetraëder durch Atome von B ersetzt. Die Atome von B werden sich möglichst von einander entfernen, denn sie stehen zu einander nicht im Maximum der Anziehung (so wenig als oben die Tetraëder) und es kann nun wieder zur Krystallisation kommen, die genau den oben angegebenen Normen folgt, wenn man dort das Massentheilchen des Ele-

---

*) Die Bildung eines Niederschlages in einer Flüssigkeit tritt ein, wenn die Cohäsion (BB) der sich absondernden Theilchen grösser ist als ihre Affinität (AB) zu den Theilchen der Flüssigkeit. Im umgekehrten Falle erhält man eine Auflösung.

mentartetraëders durch ein Atom A, die vier Aethertheilchen durch Atome B ersetzt denkt. Besteht eine chemische Verbindung aus 1 Atom A und 4 Atomen B, so ist die Form des Molecüles die eines Tetraëders, und das, was oben mit r bezeichnet wurde, ist jetzt die Entfernung des Mittelpunktes des Kernes A von einem B-Mittelpunkte, während R nunmehr die Entfernung der Kerne A zweier verschiedener Molecüle bezeichnet. Gewöhnlich scheint $\frac{R}{r}$ nicht den Werth 5 zu erreichen, da selbst die kleinsten Krystalle öfterer Octaëder sind, als Tetraëder, während bei höherem Werthe von $\frac{R}{r}$ das Umgekehrte stattfinden muss.

Die gegenseitige Einwirkung der Dynamiden ist um so grösser, je vollständiger die Aetherhülle von ihnen abgestreift ist, denn das Charakteristische ihrer Construction kommt auf diese Weise am besten zur Geltung. Je mehr die Dynamiden von der äusseren Hülle verlieren, um so inniger muss ihre Verbindung sein, und wenn die bei einer chemischen Verbindung frei werdende Wärme als von der Menge des abgeschiedenen Aethers abhängig betrachtet wird, so muss auch die Wärme, die bei einer chemischen Verbindung frei wird, ein Maass für die Grösse der chemischen Verwandtschaft abgeben. Wenn 2 Dynamiden in einander eindringen, so muss, wenn man sie als ursprünglich in Kugelform gegeben denkt, eine Linse von Aether frei werden.

Ich habe das Vorstehende angeführt, um zu zeigen, dass meine Sätze den Ergebnissen der chemischen Untersuchungen ganz leicht angefügt werden können. Fasst man die ganze Theorie zusammen, so ergiebt sich in Kürze Nachstehendes.

Die Massentheilchen, welche den Aethertheilchen an materieller träger Substanz weitaus überlegen sein können, ziehen eine beschränkte Anzahl der Letzteren an, und diese lagern sich in der Weise um das Massentheilchen herum, dass ihre gegenseitige Abstossung ein Minimum wird. Die so entstandene Gruppe wirkt auf die Aethertheilchen des allgemeinen Raumes aber wegen ihrer Construction in verschiedenen Richtungen verschieden. Die Folge davon ist eine entsprechende Vertheilung des Aethers rings herum. Der Gruppe zunächst ist die Aethervertheilung eine ausgesprochen tetraëdrische u. s. w., bei grösserer Entfernung verliert sich dieses allmälig und verschwindet endlich. Das Ganze, das so entsteht, der Massenkern und die Aetherhülle bis zu derjenigen Grenze, wo die vertheilende Wirkung des Kernes verschwindet, ist eine Dynamide, deren Grenze jedoch nie scharf zu bestimmen sein wird. Jede Dynamide enthält so viel Aether, als der gleiche Raum bei Abwesenheit des Massentheilchens freien Aether enthalten würde, und dazu noch so viele gebundene Aethertheilchen, als zur Neutralisation des Kernes nöthig sind. Die Aethertheilchen der

äusseren Partbien der Hülle lassen sich sehr leicht abstreifen, doch gelingt dieses um so weniger, je näher man an den Kern selbst kommt.

Verschiedenheit der in einer Massenkugel vereinigten materiellen Substanz bedingt eine Verschiedenheit in der ganzen Construction einer Dynamide und mit dieser auch eine chemische Verschiedenheit. Kommen mehrere vollständige Dynamiden zusammen, so ist ihre gegenseitige Einwirkung, von der geringen Schwerewirkung abgesehen, $= 0$. Nähert man sie einander, so stossen sie sich ab (Gasform). Wird die äussere Aetherhülle abgeschieden, so kommt eine andere Wirkung zum Vorschein, die auf der besonderen Art der Gruppirung der in der Nähe des Kernes befindlichen Aethertheilchen beruht. Ist die Abstossung der Dynamiden in der einen oder andern Stellung kleiner, als der von dem Dynamidenvolum abhängige Druck des äusseren Aethers, so erfolgt im allgemeinen eine Cohäsionserscheinung, Krystallisation dann, wenn die Gestalt der Dynamiden den Aufbau eines regelmässigen Körpers gestattet. Ist die Härte gering, so wird der Körper zur Flüssigkeit, denn die gegenseitige Einwirkung der Molecüle ist nach allen Richtungen nahezu gleich; er wird fest, wenn die Härte grösser ist, als die Schwerewirkung gegen die Erde.

Wenn die Schwerewirkung der Dynamiden gegen einander auch nur sehr gering ist, so kann sie doch bei der sehr geringen Moleculardistanz eine etwas grössere Stärke erlangen, und bei solchen Flüssigkeiten, die sehr leicht beweglich sind, deren Atome also nach allen Richtungen in nahe gleicher Weise wirken, ist es denkbar, dass ihre Cohäsion von der Schwerewirkung abhängig ist. Specifisch schwerere Flüssigkeiten würden demnach eine grössere Cohäsion besitzen, als leichtere. Nach den von Müller in seinem Lehrbuche der Physik (VI. Aufl. I, 130) angegebenen Resultaten für Quecksilber*), Wasser, Terpentinöl und Alkohol ist dieses auch der Fall; doch giebt es sicherlich auch Ausnahmen, da andere Ursachen auch noch denkbar sind. Wird ein Krystall gross, so ist auch hier eine Schwerewirkung zu erwarten, und es werden dann Abstumpfungen u. s. w. eintreten, die ja alle auf eine Annäherung der Krystallform an die Kugel hinauslaufen. Hier hat übrigens auch die Schwerewirkung der Erde ihren Einfluss. Lässt man einen Alaunkrystall wachsen, so werden seine Horizontaldimensionen grösser, als die verticale. Ist die Menge der eine Massenkugel bildenden materiellen Substanz bei allen Dynamiden die gleiche, so entsteht ein homogener Körper, im entgegengesetzten Falle bekommt man eine chemische Verbindung.

*) Die Adhäsion zwischen Wasser und Quecksilber ist grösser, als die Cohäsion des Wassers, kleiner als die des Quecksilbers, da Letzteres von Wasser benetzt wird, die beiden Flüssigkeiten sich jedoch nicht mischen.



Es sei mir nun gestattet, einige der hauptsächlichsten Bedenken gegen meine Sätze zu besprechen.

Es gilt allgemein der Satz, dass die Molecularkräfte mit wachsender Entfernung so rasch abnehmen, dass sie durch die Formel a^r, in welcher r die Entfernung bedeutet, ausgedrückt werden könne. Diese Annahme gründet sich jedoch nicht auf irgend ein anderweitiges Gesetz, sondern ist eben eine Hypothese, welche sich auf die Erfahrung stützt, dass man bei messbarer Entfernung der Molecule von deren gegenseitiger Einwirkung nichts mehr wahrzunehmen im Stande ist. Dieser Erfahrung schliessen sich jedoch auch meine Sätze an (vergl. Gleichung 8), wenigstens ist zwischen einer Wirkung, die wie die Schwere mit der zweiten Potenz der Entfernung abnimmt, und einer solchen, bei der wenigstens die fünfte Potenz eintritt, ein grosser Unterschied. Abgesehen davon, dass die Kräfte, welche abnehmen, wie das Quadrat der Entfernung wächst, auf denen auch meine Sätze beruhen, jedenfalls die grössere innere Wahrscheinlichkeit haben, ergiebt sich aus der jetzigen Kenntniss der Molecularerscheinungen nicht, dass dieselben unmöglich aus der Differenz verschiedener Kräfte herzuleiten seien, wie dieses nach meiner Theorie der Fall ist.

Redtenbacher kommt in seinem „Dynamidensystem“ (pag. 66) auf den Schluss, dass die Abstossung zweier Aetheratome nur der ersten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional, und dass die Abstossung der Aethertheilchen im Vergleich zur Anziehung der Aetheratome unter einander und zur Anziehung der Körper- und Aetheratome sehr gross sei. In solcher Weise construirte Dynamiden werden sich bei grösserer Entfernung mit einer Kraft abstossen, die im umgekehrten Verhältnisse zu der Entfernung steht, und da die Weltkörper als Haufen von Dynamiden zu betrachten sind, müssten auch die Gestirne sich abstossen, statt sich anzuziehen. Bei aller Verehrung, die ich für den grossen Mathematiker habe, glaube ich daher doch eine andere Wirkung des Aethers annehmen zu müssen.

Der Satz, dass die Massenelemente nur eine beschränkte Anzahl von Aetherkugeln aufnehmen können, ja dass möglicherweise eine Aetherkugel sich mit mehreren Massenkugeln zu verbinden vermöge, widerspricht der jetzt allgemein herrschenden Ansicht, welcher zufolge die Aethertheilchen Atmosphären um die schweren Atome bilden, und im Vergleiche zu diesen verschwindend klein sind. Die Redtenbacher'schen Dynamiden werden zwar unter den eben angeführten Bedingungen ebenfalls nicht sehr viele Aetherkugeln enthalten können, es ist aber nicht gestattet, die eine Consequenz eines Satzes zurückzuweisen, die andere anzunehmen, und ich muss mich daher um andere Vertheidigungsmittel umsehen.

Als Leeuvenhoek die Atome suchte, entdeckte er bekanntlich die Infusorien, und man sah sich in Folge dessen genöthigt, die Atome als viel kleiner vorauszusetzen, als es vorher geschehen war, ohne dass darum die

Physik einen erheblichen Schaden genommen hätte. Man hätte also jetzt nur die Massenatome kleiner oder die Aetherkugeln grösser zu denken, als dieses gewöhnlich geschieht. Dieses ist jedoch nicht ohne alle Inconvenienzen, denn manche Erscheinungen, wie die des Lichtes und Schalles, weisen darauf hin, dass zwischen den Oscillationen und darum auch zwischen den Grössen der Massen- und Aethertheilchen ein bedeutender Unterschied sei.

Es gehört bekanntlich eine gewisse Menge von Kraft dazu, um einem trägen Körper eine Bewegung zu geben. Nimmt bei der Einwirkung gleicher Kraft die Menge der materiellen Substanz zu, so vermindert sich bekanntlich die Geschwindigkeit derselben. Dieser Satz ist vollständig unabhängig von dem Umstande, ob und in welchem Grade die materielle Substanz die Fähigkeit hat, von irgend einem andern Körper angezogen oder abgestossen zu werden, wie z. B. zwei elektrische Körper ohne merkbare Aenderung ihrer trägen Substanz in der verschiedensten Weise auf einander wirken können. Es ist daher ganz gut denkbar, dass eine grössere Menge Massensubstanz nöthig ist, um die Wirkung einer kleinen Menge von Aethersubstanz zu paralysiren. Nimmt man an, die Massenkugel enthalte eine viel grössere Menge von träger Substanz, als die Aethertheilchen, die auf die Einheit der materiellen Substanz treffende Wirkung nach aussen sei aber um ebenso viel kleiner, so geräth man mit den übrigen Erscheinungen in keinerlei Conflict, und genau betrachtet, ist die gegenwärtig herrschende Ansicht über das Verhältniss der Kräfte keine andere. Wenn daher oben gesetzt wurde $am = 3b\mu$, so kann m im Vergleiche zu μ doch ungemein gross sein.

Meine Annahme, dass alle gleichartige materielle Substanz sich abstosse, dass es also keine „schweren" Atome gebe, steht mit allem, was man in den Büchern über Physik liest, zu sehr im Widerspruche, als dass ich es umgehen könnte, diesen Punkt noch einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

Als Newton seine Gravitationslehre veröffentlichte, war das, was man heute Aether nennt, unbekannt oder vielleicht besser gesagt, von Newton nicht anerkannt. Für ihn existirte also in der Schöpfung nur das, was nach Ausschluss unseres Aethers an materieller Substanz noch vorhanden ist, und er leitete aus den Beobachtungen das Gesetz ab, das wir als das Schweregesetz kennen. Für Newton existirte nur eine Art von materieller Substanz, er musste ihr also eine anziehende Wirkung zuschreiben. Für die Jetztwelt hat sich die Sache insofern geändert, als wir mit 2 verschiedenen Stoffen zu thun haben, von denen der eine notorisch dem Schweregesetze nicht gehorcht. Der Newton'sche Satz, dass alle Materie sich anziehe, ist längst nicht mehr richtig, denn sonst liesse sich der Aether im freien Weltenraume nicht annehmen.

Bei der Annahme des Aethers, den wir nun doch nicht entbehren können, wenn wir nicht die ganze Lichttheorie über den Haufen werfen wollen,

führt das Newton'sche Gesetz in der Art, wie es sich in den Büchern allgemein ausgesprochen findet, jedenfalls auf Inconsequenzen, denn wenn man sagt, dass alle Materie sich anziehe, so ist das nicht richtig, wenn man aber nur das als Materie gelten lassen will, was sich anzieht, oder wenn man annimmt, dass die Anziehung sich auf die wägbaren Körper beschränke, so gelangt man zu dem schönsten *circulus vitiosus*, den man sich denken kann.

Es bleibt mir nun übrig, zu zeigen, dass meine Annahme sich den Beobachtungen so anschliesst, wie es in der That nothwendig ist. Die astronomischen Rechnungen stehen zu fest, als dass sich hieran etwas markten liesse, und jede neue Annahme muss sich unbedingt an sie anschliessen.

Eine Dynamide besteht aus einem Kerne von mit Aether verbundener Massensubstanz und einer Hülle von Aether. Die gesammte Aethermenge theilt sich in 2 Theile, von denen der eine zur Sättigung der Massensubstanz verwendet ist, während der andere sich durch die Art der Stellungen, die die einzelnen Kugeln einnehmen, von dem allgemeinen Aether unterscheidet. Dieser zweite Theil des Dynamidenäthers nimmt irgend einen Raum ein, und dieser ist entweder grösser, gleich oder kleiner, als derjenige, den die gleiche Anzahl von Aetherkugeln im allgemeinen Raume einnimmt. Im ersten Falle kann man den Dynamidenraum als zum Theile leer von Aether, zum Theile so dicht damit besetzt betrachten, als dieses aussen der Fall ist, und nach IV) folgt eine Aetheranziehung, es bildet sich um die Dynamide herum eine Aetherhülle, die etwas dichter ist, als der äussere Aether, und die man nun als ebenfalls noch zur Dynamide gehörend betrachten kann. Endlich muss es einmal zu einer Grenze kommen, wo in der Dynamide so viele (unneutralisirte) Aethertheilchen sind, als in einem gleichen Volumen des freien Raumes.

Nach IV) kann dieser Dynamidenäther nach aussen keine Wirkung auf eine grössere Entfernung ausüben, denn er ist gerade so dicht, als der Aether an irgend einer Stelle des allgemeinen Raumes, und die besondere Art der Vertheilung übt in die Ferne keinen Einfluss. Ist ursprünglich das Volumen der Dynamide im Verhältniss zu der in ihr enthaltenen Aethermenge zu klein, so geschieht das Umgekehrte, und auch jetzt muss man endlich zum gleichen Resultate gelangen. Der zur Sättigung der Massenkugel verwendete Theil des Aethers, der ausser dem eben betrachteten, der Hülle, noch in der Dynamide ist, kann auf ein fernes Aethertheilchen keinen Einfluss ausüben, weil seine Wirkung durch die entgegengesetzte des Massentheilchens aufgehoben wird (1 und 2). Die Dynamide hat also auf ein fernes Aethertheilchen keine Wirkung und ebenso wenig kann dieses bei einem Haufen von Dynamiden, einem Körper, der Fall sein.

Untersucht man die Wirkung zweier Körper, so hat man die Wirkung der Massentheilchen, der zu deren Sättigung nothwendigen Aetherkugeln und des Aethers der Hüllen. Was zunächst den Letzteren anbelangt, so bleibt er für die Ferne ohne Wirkung, wie sich leicht aus IV) ergiebt, da die

Verschiedenheit der Hüllen im Ganzen von dem Aether im freien Raume nicht durch andere Dichtigkeit, sondern nur durch eine andere Anordnung der einzelnen Theilchen hervorgerufen ist, Letztere aber der grösseren Entfernung wegen ohne Einfluss bleibt. Es sind also nur noch die Wirkungen übrig, die von den Massentheilchen und den sie neutralisirenden Aethertheilchen ausgeübt werden. Setzt man in Gleichung 4) $c = \frac{a^2}{b}$, so verhalten sich die Körper gegen einander indifferent; es sind aber die Constanten a, b und c von einander ganz unabhängig, und setzt man c um eine ganz kleine Grösse kleiner als $\frac{a^2}{b}$, so ergiebt sich, dass die Körper sich mit einer Kraft anziehen, die mit dem Producte der Massen wächst, mit dem Quadrate der Entfernungen abnimmt und im Verhältniss zu den Molecularwirkungen sehr klein ist.

Soweit die Bedürfnisse der Astronomie gehen, glaube ich durch meine Annahme ausreichen zu können. Bezüglich der Schwere irdischer Körper haben wir zunächst den Dynamidenhaufen Erde, dessen Wirkung so betrachtet werden kann, als sei ihre Gesammtmasse in deren Mittelpunkt vereinigt. Betrachtet man das Fallen eines irdischen Körpers, so kann man denselben wieder als einen Dynamidenhaufen betrachten. Hier ist es denkbar, dass die so eben besprochene Hüllenausgleichung nicht ganz eingetreten ist; aber nach Satz III) ist dieses auch gar nicht nothwendig, denn man braucht die Correction der Dynamidenhülle nur bei einem der zwei sich anziehenden Körper. Wenn auch Wasser und Eis bezüglich ihrer Zusammensetzung sich dadurch unterscheiden, dass Ersteres mehr Aether hat, so müssen sie nach III) bei gleicher Masse doch gleich schwer sein.

Anders ist es mit den Bessel'schen Pendelversuchen. Gesetzt, wir haben eine Linse von Eis, eine andere von Wasser, so ist in Letzterem bei gleicher Schwerewirkung eine grössere träge Masse, und es wäre also zu erwarten, dass das Wasserpendel langsamer schwingt. Da die Beobachtungen für alle Körper gleiche Schwingungszeiten geben, so kann Uebereinstimmung meiner Theorie mit der Beobachtung nur durch die Annahme erzielt werden, dass die träge Masse der Aethertheilchen gegen die der Massentheilchen verschwindend klein sei. Diese Annahme gilt übrigens auch jetzt allgemein, denn man mag den Aethertheilchen irgend eine Wirkung zuschreiben, man wird stets hier einen Stein des Anstosses finden. Nimmt man an, die Wirkung der Aethertheilchen nehme mit einer hohen Potenz der Entfernung ab, so muss man die gleiche Annahme machen wie ich, denn der Satz, dass die Aethermenge eines Körpers stets der Masse proportional sei, dürfte auf andere Schwierigkeiten stossen, und nimmt man an, die Aethertheilchen stossen sich im umgekehrten Verhältnisse der Entfernung ab, so hat man dieselbe Schwierigkeit und noch die dazu, dass die

gegenseitige Wirkung von Erde und Aether ein ganz anderes Gesetz befolgt, und dass dann diese bei der Dauer der Schwingungszeit mitwirkt.

Der schwache Punkt meiner Theorie liegt in der Beantwortung folgender Frage. Ist es möglich, dass durch dieselbe der grosse Unterschied zwischen der Cohäsion und der Härte des im freien Raume vertheilten Aethers und der der festen Körper abgeleitet werden kann? Die Beantwortung beruht auf der zur Zeit unmöglichen Bestimmung der Verhältnisse, die bei der Vertheilung des Aethers in den Dynamiden stattfinden. Wenn übrigens die Aufgabe sich für jetzt nicht strenge lösen lässt, so ist es doch nicht schwer, nachzuweisen, dass sowohl die Cohäsion der Körper überhaupt, als auch die Härte der Krystalle insbesondere grösser sein müsse, als beide Eigenschaften des allgemeinen Aethers, und was sich nicht nachweisen lässt, ist nicht die Existenz der beiden Eigenschaften, sondern nur der Grad derselben.

Ich muss hier darauf aufmerksam machen, dass nach Gleichung 8) die Cohäsion eines Tetraëders mit (nahe) der 5. Potenz der wachsenden Entfernung abnimmt (oder umgekehrt wächst), und dass es mit der Härte nahe ebenso sei, wenn man als Härte den Widerstand bezeichnet, den die Molecüle einer Drehung aus der Stellung der grössten Wirkung entgegensetzen, denn man braucht nur diese Wirkung zu vergleichen, wie sie sich für die einzelnen Stellungen entziffert. Ein Elementartetraëder stösst ein Aethertheilchen in der Stellung A weniger ab, als dieses ein Aethertheilchen an seinem Platze thun würde, und die Folge davon ist, dass Aethertheilchen und Tetraëder eine geringere Entfernung von einander haben, als die gewöhnliche Aetherdistanz. Ersetzt man das Aethertheilchen durch ein anderes Elementartetraëder, das die Wirkung B_2 hat, so ist die Abstossung noch geringer, und es muss nun eine erneute Annäherung erfolgen. Will man die zwei Tetraeder auf Aetherdistanz von einander entfernen, so muss jedenfalls eine Kraft daran gewendet werden, welche dem Unterschiede der Wirkungen in den beiden Entfernungen gleich ist. Ebenso muss ein grösserer Widerstand stattfinden, wenn man die Elementartetraëder aus ihrer B_2-Stellung herausdrehen will, als der Widerstand ist, der bei der gewöhnlichen Aetherdistanz stattfindet.

Nach Satz IV) ist die Wirkung, die durch einen ätherleeren Raum auf irgend ein beliebiges Aethertheilchen ausgeübt wird, gerade so, als sei der Raum von einer anziehenden Substanz erfüllt, und je grösser dieser Raum ist, um so bedeutender wird die Anziehung. Wäre ein gegebener Raum zwar von Aether besetzt, dieser aber weniger dicht, als der übrige allgemeine Aether, so kann man annehmen, dieser Raum sei zum Theile leer, und es bleibt also noch immer eine Anziehung.

Das Elementartetraëder enthält 4 Aethertheilchen, von denen 3 durch das Massentheilchen neutralisirt sind, und es bleibt also noch ein freies Theilchen übrig. Wir kennen die Vertheilung des Aethers im allgemeinen

Raume allerdings nicht, wenn aber vorausgesetzt wird, die Aetheratome seien Kugeln, so ist nicht wohl eine andere Vertheilung möglich, als die, dass rings um jedes Theilchen in gleicher Entfernung zwölf andere liegen, und denkt man um den Mittelpunkt des inneren Theilchens eine Kugelfläche gezogen, so schneidet diese die Mittelpunkte von 12 Aetheratomen. Nehmen wir zunächst an, bei einer Verbindung von Elementartetraëdern sei die Entfernung der jeweilig einander zunächtsliegenden gleich der Aetherdistanz, und ziehen wir um den Mittelpunkt des inneren Elementartetraëders die Kugelfläche, so ergiebt sich, dass nicht 12, sondern nur 4 Aethertheilchen von derselben berührt werden. In dem gleichen Volum sind also weniger Theilchen, als im allgemeinen Raume, es ist dasselbe als zum Theile leer zu betrachten, und es muss in Folge des dadurch vergrösserten Aetherdruckes wieder eine Vergrösserung von Cohäsion und Härte zum Vorschein kommen. Würde die Entfernung der Elementartetraëder so klein werden, dass eine ebenso grosse Dichtigkeit der freien Aethertheilchen erzielt würde, als sie im allgemeinen Raume ist, so müssten Cohäsion und Härte bei ihrer im Verhältnisse zur Entfernung raschen Zunahme ausserordentlich wachsen. Hätte man in der B_3-Stellung ein Octaëder, so würden sich um ein mittleres Tetraëder 6 andere herumlegen, man hätte also auch hier einen ätherverdünnten Raum. Bildet sich ein Würfel, so hat man zunächst um ein inneres Tetraëder 8 andere herum, die einen kleinen Würfel bilden, aber in einem grösseren Würfel wechseln diese kleinen erfüllten mit ebenso vielen leeren ab.

Einem ähnlichen Verhalten begegnet man bei den Dynamiden. Ist z. B. die Anlage einer solchen eine tetraëdrische, so entsteht jedenfalls ein Umhüllungstetraëder, das einen grösseren Raum einnimmt, als ebenso viele Aethertheilchen im allgemeinen Raume. Um dieses Umhüllungstetraëder kommt wieder eine Gruppe von Aetherkugeln, auf deren Vertheilung die inneren Tetraëder von Einfluss sind. Nach und nach wird die Zahl der eine Hülle bildenden Aetherkugeln grösser und endlich so gross, als sie wäre, wenn man statt des Kernes ein Aethertheilchen nehmen würde. Wenn auch die Distanzen der einzelnen Theilchen etwas kleiner sind, so muss doch jedenfalls bis in einige Entfernung vom Kerne das von dem Ganzen eingenommene Volumen grösser sein, als es bei gleicher Zahl von Aetherkugeln im freien Raume wäre, und nach IV) müssen 2 solche Systeme sich anziehen, ohne dass darum auch eine merkliche Verschiedenheit in den gegenseitigen Stellungen vorhanden wäre; wir haben also eine tropfbare Flüssigkeit, während bei noch weiterer Abscheidung von Aether die charakteristische Constitution der Dynamiden zum Vorschein kommt, und ein fester Körper entsteht.

Es ergiebt sich aus diesen Betrachtungen, dass die Cohäsion und auch die Härte der Körper grösser sein müssen, als die des freien Aethers; es wird dieses schon durch die Molecüle bedingt, wenn man sie ohne Aether-

hüllen betrachtet, und dann haben die Aetherhüllen noch die gleiche Wirkung. Wie weit geht aber dieses?

Einen Beweis dafür, dass bei der engeren Gruppirung der Atome nicht allemal neben der Abnahme des umhüllenden Aethers auch eine entsprechende Volumabnahme stattfinden müsse, kann man bei dem Verhalten des Wassers finden, denn bei dem Uebergange desselben in Eis geht Aether fort, und doch hat das Eis ein grösseres Volumen, als das Wasser, aus dem es hervorging.

Nimmt man eine beschränkte Anzahl von Aetherkugeln an, die ein Wassertheilchen umgeben, so wird der Aether dem Wasserkerne zunächst weniger dicht sein, als in grösserer Enfernung, was der gegenwärtig allgemein herrschenden Annahme geradezu widerspricht. Man könnte hier eine Disharmonie mit dem Umstande finden, dass das Licht in den Körpern stärker gebrochen wird, als im allgemeinen Raume. Nach meinem Dafürhalten ist hier weniger die Zahl der in einem gegebenen Volum vorhandenen Aethertheilchen zu berücksichtigen, als der Widerstand, den die Aetherkugeln einer Kraft leisten, welche sie aus ihrer Lage bringen will; dieser Widerstand fällt aber, wenn auch die Zahl der Theilchen geringer ist, jedenfalls weit bedeutender aus in der Nähe der Massentheilchen, als fern davon.

Es bliebe nun noch übrig, die Einwürfe zu besprechen, die von Seiten der Chemie erhoben werden könnten, da die chemischen Formeln für die Körper, welche eine bestimmte Krystallform haben, nicht auch gleichmässige Zusammensetzung haben. So haben nicht alle in Hexagonalpyramiden krystallisirenden Körper die Formel $A + 3B$. Ich halte diese Einwürfe für nicht sehr ins Gewicht fallend, da man von keinem Körper die Zusammensetzung mit Gewissheit kennt, wie man sich leicht aus den Streitigkeiten überzeugen kann, die man in den Büchern über Zusammensetzung, Moleculargewicht, Atomgewicht u. s. w. findet.

Die Vertheilung der Aetherkugeln in einer Dynamide oder gar in einer Verbindung mehrerer derselben auf mathematischem Wege zu erhalten, ist nach meinem Dafürhalten zur Zeit, wenn nicht unmöglich, doch jedenfalls sehr schwierig, und es dürfte daher gerathen sein, sie an der Hand der Erfahrung zu suchen. Als hierzu geeignet, glaube ich auf eine Norm aufmerksam machen zu müssen, welcher die bei chemischen Processen sich entwickelnde Wärme gehorcht, wenn ein Atom eines Körpers sich mit mehreren Atomen eines andern verbindet.

Verbindet sich 1 Atom A mit einem Atom B, so ist der Vorgang ganz dem analog, wenn 2 Kugeln sich schneiden und die abgesonderten Theile geben die frei werdende Wärme. Tritt noch ein zweites Atom von B hinzu, so wird nicht die gleiche Quantität von Aether frei, denn das eine B wirkt dem andern, vermöge seiner Stellung, entgegen u. s. w. Bezeichnet man bei der Einheit der Entfernung die Einwirkung von A auf B mit a, die

von B auf B mit φ, nimmt man ferner an, die Einwirkung sei dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, so erhält man bei der Verbindung $A+B$ die Wirkung a, bei $A+2B$ bekommt man $2a+\frac{\varphi}{4}$, bei $A+3B$ $3a+\varphi$ u. s. w. Ich habe bereits früher in einer kleinen Schrift „Versuch einer Statik der chemischen Verbindungen" gezeigt, dass, wenn man bei den verschiedenen Combinationen zweier Substanzen*) die Temperaturzunahme mit dem Quadrate aus dem Producte der Masse und der (nach der Schröder-Wöstin'schen Formel berechneten) specifischen Wärme der Verbindung multiplicirt und die so erhaltene Grösse als Wirkung a, $2a+\frac{\varphi}{4}$, $3a+\varphi$ u. s. w. setzt, und daraus a und φ berechnet, für die verschiedenen Verbindungen von A und B stets dieselben Werthe zum Vorschein kommen. Bezeichnet man daher mit α und β die dem a und φ zukommenden Coëfficienten, mit t die Temperaturzunahme, mit s und m die specifische Wärme und die Masse der Verbindung, so gilt allgemein $\alpha a+\beta\varphi=tm^2s^2$ oder wenn man im Versuche Wärmeeinheiten bestimmt hat, $\alpha a+\beta\varphi=wms$, wenn w die Zahl der beobachteten Wärmeeinheiten angiebt.

Ein zweites Hilfsmittel könnte in der specifischen Wärme der Atome liegen, wenn man von dem Redtenbacher'schen Satze ausgeht, dass die specifische Wärme eines Stoffes die Anzahl der Aetheratome sei, welche in der Gewichtseinheit des Stoffes enthalten ist. Nimmt eine Massenkugel 4 Aetheratome auf, so bildet sich ein kleines Tetraëder, es entsteht ein kleines Octaëder oder ein Würfel, wenn die Massenkugel 6, beziehungsweise 8 Aetherkugeln aufnehmen kann. Die so entstandene Gestalt nähert sich derjenigen der Kugel um so mehr, je mehr Atome zu ihrer Bildung beitragen, und es müssen daher weniger Aetheratome der Hülle nöthig sein, um die Kugelgestalt der Dynamide vollständig zu machen, als dieses bei dem Tetraëder der Fall ist. Je grösser also die Massenkugel ist, um so weniger Aether wird in der Hülle sein. Das Dulong'sche Gesetz giebt an, dass Atomgewicht und Aether, d. i. specifische Wärme, zu einander im umgekehrten Verhältnisse stehen, oder wenigstens, dass dieses bei vielen Körpern der Fall ist.

Ein drittes Mittel liegt in der specifischen Wärme der Luftarten, wenn man meine oben ausgesprochene Ketzerei, dass die specifische Wärme einer Luft mit deren Dichtigkeit veränderlich sei, hingehen lässt.

*) Z. B. SO_3 und HO, KO und A_sO_5, KO und PO_5.

X.

Ueber den Zusammenhang einiger physikalischer Eigenschaften der Gase.

Von

J. Bauschinger,

Lehrer an der königl. Gewerbe- und Handelsschule in Fürth.

Wenn man den Druck eines Körper mit p, sein specifisches Volumen (Volumen der Gewichtseinheit) mit v und seine Temperatur mit t bezeichnet, so besteht zwischen diesen drei Grössen eine Abhängigkeit, welche im Allgemeinen durch die zwei Gleichungen

$$1) \qquad p = p(x,t); \quad v = v(x,t)$$

ausgedrückt werden kann. x bezeichnet dabei eine vorläufig noch willkürliche Veränderliche, die späteren Bestimmungen vorbehalten bleibt. Die beiden Gleichungen 1) werden wir in der Folge, der Kürze halber, die „Zustandsgleichungen" des Körpers nennen.

Bezeichnet man ferner die specifische Wärme eines Körpers bei constantem Drucke mit c, die bei constantem Volumen mit c_1 und die bei constanter Temperatur (d. h. die Wärmemenge, welche nothwendig ist, um das Volumen der Gewichtseinheit eines Körpers bei constanter Temperatur um die Einheit des Volumens zu vergrössern) mit c_2, so ergeben die Untersuchungen der mechanischen Wärmetheorie folgende zwei Relationen:

$$2) \qquad (c - c_1)\frac{\partial p}{\partial x} = c_2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t}\right),$$

$$3) \qquad \frac{\partial c_2}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial c_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial c_1}{\partial x} + A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

mit ∂ partielle Differentiale bezeichnet. $\frac{1}{A}$ ist das sogenannte mechanische Aequivalent der Wärme, nach Joule im Mittel gleich 424 Kilogrammmeter.

Die Gleichungen 2) und 3) beruhen allein auf dem Grundprincip der mechanischen Wärmetheorie: In allen Fällen, wo durch Wärme

Arbeit entsteht, wird eine, der erzeugten Arbeit proportionale Menge Wärme verbraucht und umgekehrt kann durch den Aufwand einer ebenso grossen Arbeit dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt werden. Ich habe ihre Ableitung in meinem letzten Aufsatze*) in gedrängter Kürze bereits gegeben.

Wendet man die Sätze, welche sich allein aus jenem Grundprincip der mechanischen Wärmetheorie ergeben, auf den Erfahrungssatz an, dass niemals von sich selbst Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergeht, so erhält man die Gleichung:

$$4)\qquad c_2\frac{\partial v}{\partial x}=A(a+t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

unter a den reciproken Werth des Ausdehnungscoefficienten eines Gases verstanden, welches das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz erfüllt**), und dessen Wärmecapacitäten bei constantem Druck und constantem Volumen constante Grössen sind. Wir werden in der Folge ein solches Gas ein „vollkommenes" nennen. Einer der ersten Sätze, die wir unten nachweisen werden, wird uns lehren, dass die Ausdehnungscoefficienten aller vollkommenen Gase gleich gross sind.

Die Ableitung der Gleichung 4) würde mich auch hier, wie in meinem letzten Aufsatze, zu weit von meinem eigentlichen Ziele abführen. Ich begnüge mich daher wiederum, anzudeuten, dass sie für $x=v$ in die bekannte, im Wesentlichen schon von Carnot aufgestellte

$$c_2=A(a+t)\frac{\partial p}{\partial t}$$

übergeht.

Die drei Gleichungen 2) bis 4) reichen zwar nicht vollständig aus, um die drei Grössen c, c_1 und c_2 mittelst der Zustandsgleichungen 1) als Functionen der Veränderlichen x und t zu bestimmen; es gehen in die Rechnung willkürliche Functionen einer der Veränderlichen, t, mit ein, die durch jene drei Gleichungen nicht näher bestimmt werden können. Aber die Gleichungen 2) bis 4) zeigen doch, dass zwischen den drei Wärmecapacitäten und den Zustandsgleichungen eines Körpers ein inniger Zusammenhang besteht. Die Aufdeckung dieses Zusammenhanges ist besonders für Gase interessant, da für dieselben die in den Gleichungen 1) bis 4) vorkommenden

*) Siehe diese Zeitschrift Bd. X, S. 109.

**) Unter dem Ausdrucke „ein Gas erfülle das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz" (abgekürzt M.-G.-Gesetz) verstehen wir hier und in der Folge immer nur, dass die Zustandsgleichung dieses Gases $pv=R(a+t)$ sei, unter R eine, von der Natur des Gases abhängige Constante und unter a den reciproken Werth von dessen Ausdehnungscoefficienten verstanden. Dass dieser Ausdehnungscoefficient für alle Gase gleich gross ist, soll hier nicht vorausgesetzt werden, wie es denn ja auch bekanntlich strenge nicht der Fall ist.

Grössen und Beziehungen zwar auch nicht vollständig, aber doch besser bekannt sind, als für feste und flüssige Körper.

Es ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen, diesen Zusammenhang im Wesentlichen zu entwickeln. Wir werden dabei auch die von Herrn Clausius*) zuerst aufgestellte Annahme, dass ein permanentes Gas, wenn es sich bei constanter Temperatur ausdehnt, nur so viel Wärme verschluckt, als zu der dabei gethanen äusseren Arbeit verbraucht wird, oder dass die innere Arbeit des Gases gleich Null sei, im Auge haben. Wir werden nachweisen, in wie fern die in diesen Worten ausgesprochene Eigenschaft eines Gases von seinen übrigen Eigenschaften abhängt und umgekehrt, wie sie diese andern Eigenschaften des Gases, seine Wärmecapacität und seine Zustandsgleichungen, bedingt.

Joule und Thomson**) haben durch den Versuch gezeigt, dass für die von ihnen untersuchten permanenten Gase atmosphärische Luft und Wasserstoff jene Annahme Clausius' so nahe richtig ist, dass die Abweichungen in den meisten Rechnungen vernachlässigt werden können. Für das nicht permanente Gas dagegen, welches sie auch untersuchten, die Kohlensäure, fanden sie grössere Abweichungen. Herr Clausius***) schliesst daraus, dass seine Annahme wahrscheinlich für jedes Gas in eben dem Grade genau sei, als in welchem das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz auf dasselbe Anwendung findet. Wir werden unten sehen, in wie weit dieser Schluss durch die Sätze der mechanischen Wärmetheorie selbst gerechtfertigt wird.

Die Bedingung, dass die innere Arbeit eines Gases, das sich bei constanter Temperatur ausdehnt, gleich Null ist, lässt sich analytisch so ausdrücken, dass für $dt = 0$ auch $du = 0$ wird, unter u die Wirkungsfunction der Gewichtseinheit des Gases verstanden. Nun ist****)

$$du = (c_2 - Ap)\frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(c_1 + (c_2 - Ap)\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt.$$

Jene Bedingung erfordert also, dass

$$5)\qquad (c_2 - Ap)\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ist, und diese Gleichung ist somit der analytische Ausdruck der von Herrn Clausius aufgestellten Annahme.

Es ist zu den folgenden Untersuchungen nicht nöthig, die Gleichungen 1) bis 5) in der allgemeinen Form anzuwenden, in welcher wir sie eben aufgestellt haben; aber wir werden sie in zwei verschiedenen Gestalten ge-

*) Poggendorff's Annalen Bd. 79, S. 392 und Bd. 97, S. 443.

**) *Phil. Transact. of the R. Soc. of London Vol. CXLIII, Part. III, p.* 357 und *Vol. CXLIV, Part. II, p.* 321.

***) Poggendorff's Annalen Bd. 97, S. 443.

****) Vergl. diese Zeitschrift Bd. X, S. 112.

brauchen, die man erhält, wenn man in denselben einmal $x=v$, das andere mal $x=p$ setzt.

Wenn man $x=v$ setzt, so fallen die beiden Zustandsgleichungen in die eine

1 a) $$p=p(v,t)$$

zusammen, und die Gleichungen 2) bis 5) gehen über in die folgenden:

2 a) $$(c-c_1)\frac{\partial p}{\partial v}=-c_2\frac{\partial p}{\partial t},$$

3 a) $$\frac{\partial c_2}{\partial t}=\frac{\partial c_1}{\partial v}+A\frac{\partial p}{\partial t},$$

4 a) $$c_2=A(a+t)\frac{\partial p}{\partial t},$$

5 a) $$c_2-Ap=0.$$

Wenn man für x durchweg p setzt, so fallen die beiden Zustandsgleichungen in die einzige

1 b) $$v=v(p,t)$$

zusammen und die Formeln 2) bis 5) nehmen folgende Gestalt an:

2 b) $$c-c_1=c_2\frac{\partial v}{\partial t},$$

3 b) $$\frac{\partial c_2}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial c_2}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial c_1}{\partial p}-A\frac{\partial v}{\partial t},$$

4 b) $$c_2\frac{\partial v}{\partial p}=-A(a+t)\frac{\partial v}{\partial t},$$

5 b) $$(c_2-Ap)\frac{\partial v}{\partial p}=0.$$

I.
Von den vollkommenen Gasen.

Unter einem vollkommenen Gase verstehen wir, wie oben bereits erwähnt, ein solches, dessen Wärmecapacitäten bei constantem Druck und constantem Volumen constante Grössen sind, und welches das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz erfüllt, dessen Zustandsgleichung also ist:

6) $$pv=R(a+t),$$

unter R eine von der Natur des Gases abhängige Constante und unter a den reciproken Werth des Ausdehnungscoefficienten dieses Gases verstanden.

Für ein solches Gas folgt aus den Gleichungen 2a) und 6)

7) $$c_2=(c-c_1)\frac{a+t}{v}.$$

Setzt man diesen Werth von c_2 in 3a) ein und berücksichtigt dabei die Gleichung 6) und die Bedingung, dass c und c_1 constante Grössen sind, so folgt

8) $$c-c_1=AR,$$

und dies mit 7) verglichen giebt

$$c_2 = Ap. \tag{9}$$

Daraus folgt weiter, im Vergleich mit der Bedingungsgleichung 5*a*):

Satz 1. Bei den vollkommenen Gasen ist die innere Arbeit gleich Null.

Um den andern für vollkommene Gase geltenden und schon oben, bei Gelegenheit der Gleichung 4) erwähnten Satz, dass die Ausdehnungscoefficienten derselben die nämliche Grösse haben, nachzuweisen, müssen wir ausser dem Hauptprincip der mechanischen Wärmetheorie auch noch denselben Erfahrungssatz zu Hilfe nehmen, der zur Entwickelung der Gleichung 4) dient, den Satz nämlich, dass niemals von selbst Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann; ja dieser Beweis ist im Grunde nur der erste Theil der Ableitung der Gleichung 4). In Bezug auf die übrigen in dem folgenden Beweise vorausgesetzten, bekannten Sätze von den vollkommenen Gasen füge ich nur noch hinzu, dass sie sich allein schon aus dem Grundprincipe der mechanischen Wärmetheorie und der obigen Definition der vollkommenen Gase ergeben, ohne dass es nöthig wäre, noch einen weiteren Hilfssatz oder gar schon die Carnot'sche Gleichung 4) zu ihrer Entwickelung anzuwenden.

Es seien mit K und K'' zwei Körper bezeichnet, von denen der erstere, als der wärmere, die Temperatur t, der letztere die Temperatur t'' habe. Diese Körper sollen ihre Temperatur unverändert beibehalten, auch wenn ihnen Wärme mitgetheilt oder entzogen wird, was unschwer zu verwirklichen ist. Wir denken uns ferner die Gewichtseinheit eines vollkommenen Gases, dessen Zustandsgleichung die 6), dessen Ausdehnungscoefficient also $\frac{1}{a}$ ist. Dieses Gas habe ursprünglich die nämliche Temperatur t wie der Körper K, ferner den Druck p und das specifische Volumen v; wir lassen es zunächst bei der constanten Temperatur t sich ausdehnen, bis sein Volumen eine bestimmte, aber willkürliche Grösse v' annimmt. Die dazu erforderliche Wärme nehme es von dem Körper K auf, mit dem wir es in Berührung gesetzt denken. Der dem Volumen v' entsprechende Druck des Gases wird dann:

$$p' = \frac{R(a+t)}{v'} \tag{10}$$

und die Wärme, welche es bei diesem Vorgange von dem Körper K aufnehmen musste, ist bekanntlich

$$q_1 = AR(a+t)\,L\,\frac{v'}{v}, \tag{11}$$

sowie die von ihm geleistete Arbeit:

$$A_1 = R(a+t)\,L\,\frac{v'}{v}. \tag{12}$$

Nun denken wir uns das Gas ausser Berührung mit dem Körper K ge-

bracht und seine Temperatur, ohne dass ihm Wärme zugeführt oder entzogen würde (wir sagen in der Folge kurz: „bei constanter Wärme"), auf t'', die des Körpers K'', erniedrigt. Dann findet sich der, dieser Temperatur entsprechende Druck p'' desselben aus der bekannten Gleichung

$$p'' = p'\left(\frac{a+t''}{a+t}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

mit k das Verhältniss $\frac{c}{c_1}$ der beiden specifischen Wärmen bei constantem Drucke und constantem Volumen bezeichnet. Ersetzt man in dieser Gleichung p' durch seinen Werth aus 10), so folgt

$$13)\qquad p'' = R\frac{a+t}{v'}\left(\frac{a+t''}{a+t}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Das der Temperatur t'' entsprechende Volumen des Gases ist:

$$14)\qquad v'' = v'\left(\frac{a+t''}{a+t}\right)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Die Wärme, welche ihm zugeführt wurde, ist der Bedingung gemäss:

$$15)\qquad q_2 = 0$$

und die von dem Gase geleistete Arbeit:

$$16)\qquad A_2 = \frac{1}{A}c_1(t-t'').$$

Wir nehmen nun wieder dasselbe Gas in seinem ursprünglichen Zustande p, v, t und lassen es sogleich bei constanter Wärme sich ausdehnen, bis seine Temperatur auf t'' herabgesunken ist. Dann berechnet sich sein Druck aus der Formel:

$$17)\qquad p''' = p\left(\frac{a+t''}{a+t}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

und sein Volumen aus:

$$18)\qquad v''' = v\left(\frac{a+t''}{a+t}\right)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Die ihm zugeführte oder entzogene Wärme ist der Bedingung gemäss:

$$19)\qquad q_3 = 0,$$

und die von ihm geleistete Arbeit:

$$20)\qquad A_3 = \frac{1}{A}c_1(t-t'').$$

Nun setzen wir das Gas in Berührung mit dem gleichwarmen Körper K'' und lassen es bei constanter Temperatur bis zum Volumen v'', demselben, wie durch die Gleichung 14) gegebenen, ausdehnen, so dass auch sein Druck der in Gleichung 13) berechnete wird, und das Gas also aus dem nämlichen Anfangszustande durch die beiden letzten Processe in denselben

Endzustand p'', v'', t'' übergeführt ist, wie durch die beiden ersten. Bei dem letzten Vorgange musste das Gas die Wärme

$$q_4 = AR(a+t'')L\frac{v''}{v'''}$$

von dem Körper K'' aufnehmen; durch die Gleichungen 14) und 18) geht der letztere Ausdruck über in:

$$21) \qquad q_4 = AR(a+t'')\,L\,\frac{v'}{v},$$

und die dabei von dem Gase geleistete Arbeit ist entsprechend:

$$22) \qquad A_4 = R(a+t'')\,L\,\frac{v'}{v}.$$

Beide Wege, auf welchen wir soeben das Gas aus dem Anfangszustande p, v, t in den p'', v'', t'' übergeführt haben, können offenbar auch umgekehrt und dadurch das Gas wieder aus dem Zustande p'', v'', t'' in den ursprünglichen p, v, t zurückgeführt werden. Aber auf diesem umgekehrten Wege werden dann die Wärmemengen q_1 und q_4 von dem Gase an den Körper K resp. K'' abgegeben, anstatt von demselben aufgenommen, wie imgleichen die Arbeitsgrössen A_1, A_2, A_3, A_4 von dem Gase absorbirt, anstatt geleistet werden.

Da ferner die beiden directen, oben beschriebenen Processe in demselben Zustande p'', v'', t'' des Gases endigen, so können sie offenbar in solcher Weise zu einem Processe verbunden werden, dass man den einen directen den andern umgekehrten anschliesst und dadurch das Gas in seinen ursprünglichen Zustand wieder zurückbringt. Einen solchen Doppelprocess heisst man einen Kreisprocess, und wir können solcher Kreisprocesse offenbar zwei erhalten, je nachdem wir den einen oder den andern der obigen beiden directen Processe zuerst vornehmen. Bei dem einen dieser Kreisprocesse, den wir den directen nennen wollen, durchläuft das Gas der Reihe nach die Zustände $p, v, t — p', v', t' — p'', v'', t'' — p''', v''', t'' — p, v, t$. Es leistet die Arbeitsgrössen A_1 und A_2 und absorbirt die A_4 und A_3. Dabei nimmt es von dem Körper K die Wärme q_1 auf und giebt die Wärme q_4 an den Körper K'' ab. — Bei dem umgekehrten Kreisprocesse durchläuft das Gas der Reihe nach die Zustände $p, v, t — p''', v''', t'' — p'', v'', t'' — p', v', t' — p, v, t$. Es leistet dabei die Arbeitsgrössen A_3 und A_4 und absorbirt die A_2 und A_1; zugleich nimmt es die Wärme q_4 von dem Körper K'' auf und giebt die Wärme q_1 an den Körper K ab.

Am Ende jedes dieser Kreisprocesse ist das Gas vollständig wieder in seinen urspünglichen Zustand zurückgekehrt; und es muss daher die gesammte ihm zugeführte oder entzogene Wärme der geleisteten oder absorbirten äusseren Arbeit proportional sein. Ferner nimmt bei jedem dieser Processe das Gas keine Wärme auf, ausser die, welche es von den Körpern K und K'' empfängt, sowie es auch keine Wärme abgiebt als an die Körper K oder K''. Diese Processe sind also im hohen Grade geeignet, den

schon öfters angeführten Erfahrungsatz zur Anwendung zu bringen, was denn nun auch geschehen soll.

Bei dem directen Kreisprocesse wird die Wärme q_1 dem Körper K entzogen und dagegen die Wärme q_4 dem Körper K'' mitgetheilt. Es ist, wie aus Gleichungen 11) und 21) zu sehen, wenn wie vorausgesetzt $t > t''$, auch $q_1 > q_4$. Das Gas hat also die Wärme:

$$W = q_1 - q_4 = AR(t - t'') L \frac{v'}{v} \tag{23}$$

behalten. Dafür hat es aber auch die Arbeit $A_1 + A_2$ geleistet und nur die $A_3 + A_4$ absorbirt, so dass noch

$$F = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = R(t - t'') L \frac{v'}{v} \tag{24}$$

als geleistete Arbeit bleibt. Bei dem umgekehrten Processe dagegen wird die Wärme q_4 dem Körper K'' entzogen und q_1, welches grösser als q_4 ist, an K abgegeben; es wird folglich die Wärme W dem Gase entzogen, wofür es die Arbeit F absorbirt. Natürlich ist, dem Hauptprincip der mechanischen Wärmetheorie gemäss:

$$W = AF. \tag{25}$$

Vergleicht man die Wärmemengen q_1 und q_4 einzeln mit der Arbeit F, so ergiebt sich:

$$q_1 = \frac{A(a + t)}{t - t''} F, \tag{26}$$

$$q_4 = \frac{A(a + t'')}{t - t''} F. \tag{27}$$

Die Arbeit F hängt nach Gleichung 24) von dem Volumen v' ab, das wir oben noch willkürlich gelassen haben. Wir können daher mit irgend einem andern vollkommenen Gase zwischen denselben Körpern K und K'' einen ganz ähnlichen Kreisprocess so ausführen, dass die nämliche Arbeit F geleistet oder absorbirt wird. Dabei unterscheiden sich dann die (bei dem directen Kreisprocess) den Körpern K und K'' entzogenen und resp. mitgetheilten Wärmemengen q_1' und q_4' von denen oben für das erste Gas G in Gleichungen 26) und 27) erhaltenen q_1 und q_4 nur durch den etwa verschiedenen Werth des Ausdehnungscoefficienten $\frac{1}{a}$; bezeichnen wir daher den reciproken Werth das Ausdehnungscoefficienten des zweites Gases G' mit a', so ist:

$$q_1' = \frac{A(a' + t)}{t - t''} F, \tag{26a}$$

$$q_4' = \frac{A(a' + t'')}{t - t''} F. \tag{27a}$$

Gesetzt nun, es wäre $a' > a$, so wäre auch $q_1' > q_1$, etwa

$$q_1' = q_1 + \delta,$$

wo δ eine positive Grösse bezeichnet. Dann wäre aber auch $q_4' > q_4$ und zwar, da $q_1 - q_4$ sowohl, als auch $q_1' - q_4'$ gleich AF ist, auch

$$q_4' = q_4 + \delta.$$

Dies vorausgesetzt, führen wir dann mit dem Gase G zwischen den Körpern K und K'' den directen Kreisprocess aus, so wird dadurch die Wärme q_1 dem Körper K entzogen, die Wärme q_4 dem Körper K'' mitgetheilt und die Arbeit F geleistet. Diese Arbeit F benutzen wir nun, um mit dem Gase G' den umgekehrten Kreisprocess auszuführen und dadurch die Wärme $q_4' = q_4 + \delta$ dem Körper K'' zu entziehen und die Wärme $q_1' = q_1 + \delta$ dem Körper K mitzutheilen. Am Ende beider Processe wären folglich beide Gase in ihren ursprünglichen Zustand zurückgekehrt; auch hätten wir weder Arbeit gewonnen noch verloren. Ohne irgend etwas zu ändern, hätten wir also die Wärme δ aus dem Körper K'' in den Körper K übergeführt. Dies ist aber nach dem Erfahrungssatze, dass niemals von selbst Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann, nicht möglich. a' kann folglich nicht grösser als a sein.

Ganz ebenso lässt sich beweisen, dass a' nicht kleiner als a sein kann. Es ist also nothwendig

$$a' = a.$$

Satz 2. Alle vollkommenen Gase haben den nämlichen Ausdehnungscoefficienten.*)

Wir werden in der Folge immer nur den reciproken Werth des Ausdehnungscoefficienten vollkommener Gase mit a bezeichnen.

---

*) Die gegenwärtige Arbeit war schon geraume Zeit fertig, als der Aufsatz: „Ueber das gegenseitige Verhältniss des Gay-Lussac'schen Gesetzes zu dem Mariotte'schen und dem Mayer'schen Gesetze" von L. Cohen Stuart in Poggendorff's Annalen, Juniheft 1863, erschien, in welchem dieser Herr die Gleichheit des Ausdehnungscoefffcienten aller der Gase nachweist, welche das Mayer'sche (innere Arbeit gleich Null) und Mariotte'sche Gesetz erfüllen, und welche zum Messen der Temperatur gebraucht werden, d. h. bei welchem das Volumen unter constantem Druck der Temperatur proportional wächst. Es ist also die Bedingung der constanten Wärmecapacitäten bei constantem Druck und Volumen, welche ich habe, bei Herrn Stuart durch die der Erfüllung des Mayer'schen Gesetzes ersetzt, und in der That lässt sich leicht zeigen, dass beide Bedingungen für einander substituirt werden können. — Aber Herr Stuart benutzt zur Ableitung seines Satzes die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie, während ich zur Ableitung des meinigen nur den ersten und den Satz zu Hilfe nehme, dass niemals von selbst Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen kann. Nun ist freilich dieser letztere Satz zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus dem ersten ausreichend, aber die Wege, auf denen dies bisher geschehen ist, waren der Art, dass ich den Wunsch nach einem strengeren Beweise des zweiten Hauptsatzes nicht unterdrücken konnte. Dies führte mich darauf, zuerst den obigen Satz für vollkommene Gase auf dem oben gezeigten Wege nachzuweisen und mittelst desselben dann erst auf die unten im Text angedeutete Weise den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zu entwickeln.

Dieselbe Schlussfolgerung, welche wir soeben für zwei vollkommene Gase durchgeführt haben, kann ganz ebenso auf ein vollkommenes Gas und einen beliebigen andern Körper angewendet werden, nachdem man diesen Körper einen ähnlichen Kreisprocess, wie das Gas, hat durchlaufen lassen. Man erhält auf diesem Wege den für beliebige Körper, also auch für beliebige Gase, giltigen Satz 4), 4*a*) oder 4*b*).

II.

Von den Gasen, welche das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz erfüllen.

Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden; den einen, wo der Ausdehnungscoefficient des Gases, welches das M. G.-Gesetz erfüllt, gleich dem der vollkommenen Gase, den andern, wo das nicht der Fall ist. Der Kürze halber werden wir sagen, das Gas erfülle im ersten Falle das engere, im zweiten Falle das weitere M.-G.-Gesetz. Machen wir also zuerst die Voraussetzung:

a) Das Gas erfülle das engere M.-G.-Gesetz,

seine Zustandsgleichung sei also:

$$pv = R(a + t). \tag{28}$$

Dann folgt aus Gleichung 4*a*):

$$c_2 = \frac{AR(a+t)}{v} = Ap, \tag{29}$$

und diese mit der Bedingung 5*a*) zusammengehalten, ergiebt den

Satz 3. Bei Gasen, welche das engere M.-G.-Gesetz erfüllen, ist die specifische Wärme bei constanter Temperatur gleich dem Product aus dem reciproken Werthe des mechanischen Aequivalents der Wärme in den jeweilig stattfindenden Druck; die innere Arbeit solcher Gase ist gleich Null.

Setzt man den Werth von c_2 aus der Gleichung 29) in die Gleichung 3*a*), so folgt:

$$\frac{\partial c_1}{\partial v} = 0. \tag{30}$$

Satz 4. Bei Gasen, welche das engere M.-G.-Gesetz befolgen, ist die specifische Wärme bei constantem Volumen von dem specifischen Volumen unabhängig; sie kann blos Function der Temperatur sein.

Setzt man den Werth von c_2 aus der Gleichung 29) in die Gleichung 2*a*) ein, so erhält man:

$$c - c_1 = AR. \tag{31}$$

Satz 5. Bei Gasen, welche das engere M.-G.-Gesetz erfüllen, ist die Differenz der specifischen Wärmen bei constantem Druck und bei constantem

Volumen der constanten, von der Natur des Gases abhängigen Grösse AR gleich.

Aus diesem und dem vorigen Satze folgt aber wieder:

Satz 6. Bei Gasen, welche das engere M.-G.-Gesetz befolgen, ist die specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig vom specifischen Volumen, blos eine Function der Temperatur.

Wir machen nun die zweite Voraussetzung:

b) Das Gas erfülle nur das weitere M.-G.-Gesetz, seine Zustandsgleichung sei also:

$$32) \qquad pv = R(a' + t),$$

mit a' den reciproken Werth seines, von dem der vollkommenen Gase verschiedenen Ausdehnungscoefficienten bezeichnet.

Aus der Gleichung 4*a*) folgt zunächst wieder:

$$33) \qquad c_2 = Ap\frac{a+t}{a'+t},$$

und dies mit der Bedingung 5*a*) verglichen, ergiebt:

Satz 7. Bei Gasen, welche nur das weitere M.-G.-Gesetz befolgen, ist $c_2 = Ap\dfrac{a+t}{a'+t}$ und die innere Arbeit im Allgemeinen nicht gleich Null.

Setzt man den Werth von c_2 aus der Gleichung 33) in die Gleichung 3*a*), so folgt nach leichter Reduction unter Benutzung der Zustandsgleichung 32):

$$34) \qquad \frac{\partial c_1}{\partial v} = 0.$$

Satz 8. Bei Gasen, welche das weitere M.-G.-Gesetz erfüllen, ist die specifische Wärme bei constantem Volumen vom specifischen Volumen unabhängig, blos Function der Temperatur. (Vergl. Satz 4.)

Durch Substitution des Werthes von c_2 aus der Gleichung 33) in die 2*a*) erhält man:

$$35) \qquad c - c_1 = AR\frac{a+t}{a'+t}, \qquad \text{(Satz 9.)}$$

was leicht in Worten auszusprechen ist.*)

Vergleicht man diese endlich noch mit dem Satze 8), so folgt:

Satz 10. Bei Gasen, welche das weitere M.-G.-Gesetz erfüllen, ist die specifische Wärme bei constantem Drucke vom specifischen Volumen unabhängig, blos Function der Temperatur. (Vergl. Satz 6.)

---

*) Die Gleichung 31) (S. 217), welche häufig zur Berechnung des Werthes von A angewandt wird, ist also nur für solche Gase giltig, welche das engere M.-G.-Gesetz erfüllen.

Wie oben bereits erwähnt, haben Thomsen und Joule für die permanenten Gase Wasserstoff und atmosphärische Luft nachgewiesen, dass ihre innere Arbeit sehr nahezu gleich Null ist. In dem folgenden Abschnitt soll untersucht werden, welche andere Eigenschaften aus der folgen, dass die innere Arbeit eines Gases vollständig Null ist.

III.
Gase, deren innere Arbeit gleich Null ist.

Der analytische Ausdruck für die Bedingung, dass die innere Arbeit eines Gases, dessen Zustandsgleichung wir in der Form der Gleichung 1a) voraussetzen, gleich Null ist, ist nach Gleichung 5a):

36) $$c_2 = Ap.$$

Hieraus folgt sofort der Satz.

Satz 11. **Bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null ist, ist die specifische Wärme bei constanter Temperatur gleich dem Product aus dem reciproken Werth des mechanischen Aequivalents der Wärme in dem jeweilig stattfindenden Druck.**

Benutzt man die Gleichung 36) in der 3a), so folgt:

37) $$\frac{\partial c_1}{\partial v} = 0.$$

Satz 12. **Bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null ist, ist die specifische Wärme bei constantem Volumen unabhängig vom specifischen Volumen, blos Function der Temperatur.**

Setzt man ferner den Werth von c_2 aus der Gleichung 36) in die 4a) ein, so erhält man:

37a) $$p = (a + t)\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist die Zustandsgleichung des Gases. Diese wird daher, wie sich leicht ergiebt:

38) $$p = (a + t)\,\varphi(v),$$

mit $\varphi(v)$ eine willkürliche Function der Veränderlichen v allein bezeichnet.

Satz 13. **Gase, deren innere Arbeit gleich Null ist, müssen das durch die Gleichung: $p = (a + t)\varphi(v)$ ausgedrückte Gesetz erfüllen.**

Das engere M. G.-Gesetz ist von diesem letzteren nur ein specieller Fall für $\varphi(v) = \frac{R}{v}$. Im Vergleich mit dem Satze 3) ergiebt sich also:

Satz 14. **Gase, welche das engere M.-G.-Gesetz erfüllen, haben die innere Arbeit gleich Null, aber Gase, deren innere Arbeit gleich Null ist, brauchen nicht das engere M.-G.-Gesetz, sondern nur das**

durch die Gleichung $p=(a+t)\varphi(v)$ ausgedrückte zu erfüllen.

Setzt man die Werthe für $\frac{\partial p}{\partial t}$ und $\frac{\partial p}{\partial v}$ aus der Zustandsgleichung 38) in die Gleichung 2a) und benutzt zugleich die Gleichung 3b), so erhält man:

$$c-c_1=-A\frac{\varphi(v)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)}. \tag{39}$$

Satz 15. **Bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null ist, ist die Differenz der specifischen Wärmen $c-c_1$ von der Temperatur unabhängig, blos Function des specifischen Volumens v.**

Dies zusammengehalten mit dem Satze 12. ergiebt:

Satz 16. **Bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null ist, ist die specifische Wärme bei constantem Druck gleich der algebraischen Summe zweier Glieder, von denen das eine blos Function des specifischen Volumens, das andere blos Function der Temperatur ist.**

Wenn wir, anstatt wie oben v und t, p und t als unabhängige Veränderliche genommen und daher die Gleichungen 1b) bis 5b) zu Grunde gelegt hätten, so würde auch hier die Gleichung 5b) als analytischen Ausdruck für die Bedingung, dass die innere Arbeit des Gases Null sein soll, im Allgemeinen

$$c_2=Ap$$

ergeben haben (vergl. Satz 11). Aus der Gleichung 3b) wäre dann:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p}=0,$$

also ein Resultat, übereinstimmend mit dem Satze 12), gefolgt. Aber jene Bedingung in der Gleichung 4b) benutzt, hätte man keine so leicht integrirbare Gleichung als Zustandsgleichung des Gases erhalten. Uebrigens ersieht man jetzt aus Gleichung 38), dass diese Zustandsgleichung die Form:

$$v=F\left(\frac{p}{a+t}\right) \tag{38a}$$

annehmen muss.

Anmerkung. Die in der Gleichung 5b) enthaltene Bedingung für das Verschwinden der inneren Arbeit irgend eines Körpers, dessen Zustandsgleichung in der Form $v=v(p,t)$ vorausgesetzt wird, wird auch noch durch

$$\frac{\partial v}{\partial p}=0$$

befriedigt. Dies würde erfordern, dass das Volumen des Körpers vom Drucke unabhängig, dass also der Körper durch äusseren Druck absolut unzusammendrückbar wäre. Einen solchen Körper kennen wir allerdings

nicht; aber gewisse feste, und namentlich die flüssigen Körper erfüllen jene Bedingung wenigstens nahezu. Es folgt daraus:

Bei flüssigen und festen Körpern ist, soweit man sie als absolut unzusammendrückbar voraussetzen kann, die innere Arbeit immer gleich Null. Ist bei solchen Körpern überdies die specifische Wärme bei constantem Drucke blos Function der Temperatur*), so ist ihre Zustandsgleichung: $v = m(a + t) + n$, m und n absolute Constante bedeutend [siehe unten die Gleichung 43) in Verbindung mit der Bedingung $\frac{\partial v}{\partial p} = 0$], d. h. sie dehnen sich proportional der Temperatur aus.

Bei seinen Untersuchungen über die specifische Wärme der Gase kam Regnault zu folgenden Resultaten**): „Die specifische Wärme (bei constantem Drucke) der atmosphärischen Luft ändert sich, entgegen den Versuchen von Gay-Lussac, nicht merklich mit der Temperatur. Versuche mit einigen anderen permanenten Gasen führten zu demselben Schluss." — „Bei den Versuchen über die atmosphärische Luft, bei denen der Druck von 1 bis 10 Atmosphären schwankte, fand ich keinen merklichen Unterschied zwischen den Wärmemengen, die eine selbe Gasmasse abgiebt, wenn sie um eine selbe Anzahl von Graden erkaltet. Also würde, im Widerspruche mit den Versuchen von de la Roche und Bérard, die für Druckschwankungen von 1 bis blos 1,3 Atmosphären einen sehr merklichen Unterschied angaben, die specifische Wärme einer selben Gasmasse unabhängig sein von der Dichtigkeit. Versuche mit anderen permanenten Gasen haben mich zu analogen Schlüssen geführt. Ich gebe jedoch dieses Gesetz mit einigem Vorbehalte. Ich konnte noch nicht entscheiden, ob die Wärmecapaciät unter verschiedenem Druck absolut constant sei, oder einer sehr geringen Veränderung unterliege etc."

Die folgenden Abschnitte haben den Zweck, die Consequenzen aus diesen, von Regnault gefundenen Eigenschaften der permanenten Gase zu ziehen. Wir untersuchen demgemäss zuerst:

IV.

Gase, bei denen die specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig vom Drucke ist.

Bei den folgenden Untersuchungen ist es vorzuziehen, p und t als unabhängige Veränderliche zu betrachten und folglich die Zustandsgleichung des Gases in der Form 1b) vorauszusetzen und die Gleichungen 2b) bis 5b) zu benutzen.

*) Wie es Regnault für Wasser in der That nachgewiesen.

**) Poggendorff's Annalen Bd. 80, S. 346.

Aus den Gleichungen 2*b*) und 4*b*) folgt:

$$c_1 = c + A(a+t)\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}},$$

und hieraus, weil $\frac{\partial c}{\partial p} = 0$,

$$40)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial p} = A(a+t)\left[\frac{2\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t} - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right].$$

Aus der Gleichung 4*b*) allein folgt:

$$41)\qquad \frac{\partial c_2}{\partial t} = -A\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}} + A(a+t)\left[\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t} - \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial p}}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right],$$

$$42)\qquad \frac{\partial c_2}{\partial p} = -A(a+t)\left[\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}} - \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right].$$

Setzt man diese Werthe für $\frac{\partial c_1}{\partial p}$, $\frac{\partial c_2}{\partial p}$, $\frac{\partial c_2}{\partial t}$ in die Gleichung 3*b*) ein, so erhält man das sehr einfache Resultat:

$$A(a+t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

oder, vorausgesetzt, dass $a + t$ nicht gleich Null,

$$43a)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

woraus:

$$43)\qquad v = (a+t)\varphi(p) + \psi(p),$$

unter $\varphi(p)$ und $\psi(p)$ Functionen von p allein verstanden.

Satz 17. Gase, für welche c unabhängig vom Drucke ist, müssen das in der Gleichung:

$$v = (a+t)\varphi(p) + \psi(p)$$

ausgesprochene Gesetz erfüllen.

Man sieht, das M.-G. Gesetz (das engere sowohl, wie das weitere) ist ein specieller Fall von dem in der Gleichung 43) enthaltenen. Ueberdies zeigt die Gleichung 43), dass sich die in Rede stehenden Gase unter constantem Druck proportional der Temperatur ausdehnen. Ihr Ausdehnungscoefficient bei constantem Drucke ist also für jeden bestimmten Druck constant, im Allgemeinen aber von diesem Drucke abhängig; sein reciproker Werth ist:

$$a' = a + \frac{\psi(p)}{\varphi(p)}.$$

Aus der Zustandsgleichung 43) ergeben sich nun umgekehrt die Wärmecapacitäten. Aus der Gleichung 4*b*) folgt:

$$c_2 = -\frac{A(a+t)\varphi}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dp}}. \tag{44}$$

Die Gleichung 3*b*) ergiebt ferner nach einiger Reduction:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = \frac{2A(a+t)\varphi\frac{d\varphi}{dp}}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dp}} - \frac{A(a+t)\varphi^2}{\left[(a+t)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dp}\right]^2}\left[(a+t)\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{d^2\psi}{dp^2}\right],$$

oder:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{A(a+t)\varphi^2}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dp}},$$

woraus:

$$c_1 = \frac{A(a+t)\varphi^2}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp}+\frac{d\psi}{dp}} + f(t), \tag{45}$$

mit $f(t)$ eine willkürliche Function von t allein bezeichnet. Mittelst der Gleichung 44) kann dieser Werth von c_1 einfacher geschrieben werden:

$$c_1 = -c_2\varphi(p) + f(t). \tag{45a}$$

Aus der Gleichung 2*b*) folgt nun:

$$c = c_1 + c_2\varphi(p),$$

oder nach Gleichung 45*a*):

$$c = f(t), \tag{46}$$

also, wie ursprünglich vorausgesetzt, c blos Function von t.

Es ergiebt sich hieraus folgende Umkehrung des Satzes 17):

Satz 17*a*. **Bei Gasen, welche das in der Gleichung:**

$$v = (a+t)\varphi(p) + \psi(p)$$

ausgesprochene Gesetz erfüllen, haben die specifischen Wärmen bei constanter Temperatur und constantem Druck die in den Gleichungen 44) und 45) enthaltenen Werthe; die specifische Wärme bei constantem Drucke ist unabhängig vom Drucke, blos Function der Temperatur.

Wenn die innere Arbeit der in Rede stehenden Gase Null sein sollte, so müsste die Gleichung 5*b*) befriedigt werden, also im Allgemeinen $c_2 = Ap$ sein. Dies ist, wie Gleichung 44) zeigt, nicht der Fall:

Satz 18. **Bei Gasen, für welche die specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig vom Drucke, blos Function der Temperatur ist, ist die innere Arbeit im Allgemeinen nicht gleich Null.**

Wir gehen nun über zur näheren Untersuchung der

V.

Gase, bei denen die specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig von der Temperatur ist,

und setzen dabei ihre Zustandsgleichung wieder in der Form 1*b*), also p und t als unabhängige Veränderliche voraus.

Aus der Gleichung 2*b*) folgt wieder:

$$c_1 = c - c_2 \frac{\partial v}{\partial t}$$

und daher, weil c von der Temperatur unabhängig:

$$48)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial t} = -c_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial c_2}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Aus der Gleichung 3*b*) folgt aber:

$$49)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial p} = \frac{\partial c_2}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial c_2}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial t} + A\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Wendet man den bekannten Differentialsatz:

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial p}$$

auf die letzten beiden Gleichungen an, so erhält man nach einiger Reduction:

$$50)\qquad -c_2 \frac{\partial^3 v}{\partial p\,\partial t^2} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial p} + 2\frac{\partial c_2}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t} + A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

In diese Gleichung ist nun c_2 aus der Gleichung 4*b*) einzusetzen. Nach etwas weitläufiger aber nicht schwieriger Rechnung erhält man dadurch die einfache Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (a+t)\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung, aus welcher die Zustandsgleichung unseres Gases gefunden werden kann; sie schreibt sich auch in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(a+t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = 0,$$

woraus folgt, unter $\nu(p)$ eine Function von p allein verstanden:

$$(a+t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \nu(p).$$

Hieraus ergiebt sich wieder

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu(p)L(a+t) + \varphi(p),$$

mit $\varphi(p)$ wieder eine Function von p allein, mit L die natürlichen Logarithmen bezeichnet. Aus der letzten Gleichung endlich folgt:

$$51)\qquad v = (a+t)L(a+t)\cdot\nu(p) + (a+t)\varphi(p) + \psi(p),$$

unter $\psi(p)$ wieder eine Function von p allein verstanden.

Satz 20. Gase, für welche die specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig von der Tempe-

ratur, blos Function des Druckes ist, müssen das Gesetz:

$$v = (a+t)L(a+t) \, . \, \nu(p) + (a+t)\varphi(p) + \psi(p)$$

erfüllen.

Man sieht, das M.-G.- und das in der Gleichung 43) des vorigen Abschnittes ausgesprochene Gesetz sind specielle Fälle des Letzeren.

Unter Zugrundelegung der Zustandsgleichung 51) können nun rückwärts die Wärmecapacitäten berechnet werden, wobei sich zugleich ergiebt, ob der letzte Satz auch umgekehrt werden kann.

Nach den Gleichungen 4b) und 51) ist:

$$52) \qquad c_2 = -A(a+t)\frac{\nu(p)L(a+t)+\nu(p)+\varphi(p)}{\frac{d\nu}{dp}(a+t)L(a+t)+\frac{d\varphi}{dp}(a+t)+\frac{d\psi}{dp}}.$$

Aus dieser und der Gleichung 3b) folgt nach etwas weitläufiger Umformung:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = -A\nu(p) + \frac{\partial}{\partial p}\left[A(a+t)\frac{[\nu(p)L(a+t)+\nu(p)+\varphi(p)]^2}{\frac{d\nu}{dp}(a+t)L(a+t)+\frac{d\varphi}{dp}(a+t)+\frac{d\psi}{dp}}\right],$$

woraus wiederum:

$$53) \; c_1 = -A\int \nu(p)\,dp + A(a+t)\frac{[\nu(p)L(a+t)+\nu(p)+\varphi(p)]^2}{\frac{d\nu}{dp}(a+t)L(a+t)+\frac{d\varphi}{dp}(a+t)+\frac{d\psi}{dp}} + N,$$

unter N eine Function von t allein verstanden. Die letztere Gleichung schreibt sich mittelst der 52) einfacher auch so:

$$53a) \qquad c_1 = -A\int \nu(p)\,dp - c_2[\nu(p)L(a+t)+\nu(p)+\varphi(p)] + N.$$

Aus dieser letzteren und der Gleichung 2b) folgt endlich:

$$54) \qquad c = -A\int \nu(p)\,dp + N.$$

Damit also c blos Function von p wird, muss N eine absolute Constante sein. Hieraus folgt, dass sich der Satz 20) nicht ohne weiteres umkehren lässt. Seine Umkehrung lautet vielmehr so:

Satz 21. Bei Gasen, welche das in der Gleichung 51) ausgesprochene Gesetz erfüllen, haben die specifischen Wärmen bei constanter Temperatur und bei constantem Volumen die in den Gleichungen 52) und 53) enthaltenen Werthe, und wenn in dem letzteren Ausdruck N nicht, wie es im Allgemeinen der Fall sein könnte, noch Function der Temperatur allein, sondern eine absolute Constante ist, so ist die specifische Wärme bei constantem Drucke von der Temperatur unabhängig und bekommt den in Gleichung 54) enthaltenen Werth.

Wie schon erwähnt, ist das in Gleichung 43) ausgesprochene Gesetz ein specieller Fall von dem in Gleichung 51) enthaltenen für $\nu(p) = 0$. In der That gehen für diesen Fall die Gleichungen 52), 53) und 54) in die 44), 45) und 46) über. Es folgt daraus:

Satz 22. Bei Gasen, für welche die specifische Wärme c unabhängig vom Drucke ist, ist diese specifische Wärme zugleich unabhängig von der Temperatur, also absolut constant, wenn in dem aus ihrer Zustandsgleichung

$$v = (a + t)\varphi(p) + \psi(p)$$

folgenden Ausdruck für c_1

$$c_1 = \frac{A(a+t)\varphi^2}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp}} + f$$

f als absolute Constante genommen werden kann. Umgekehrt aber, bei Gasen, für welche die specifische Wärme c unabhängig von der Temperatur ist, braucht diese specifische Wärme nicht auch unabhängig vom Drucke zu sein.

Es fragt sich zunächst, ob die Bedingung, dass c absolut constant sein soll, nicht eine nähere Bestimmung der Gleichung 43) zulässt. Dies ist aber, wie man leicht sieht, nicht der Fall. Wir müssen uns daher auf folgenden Satz beschränken:

Satz 23. Gase, für welche die specifische Wärme c absolut constant ist, müssen das Gesetz

$$v = (a + t)\varphi(p) + \psi(p)$$

erfüllen, aber umgekehrt, bei Gasen, welche dieses Gesetz erfüllen, ist die specifische Wärme c nur dann absolut constant, wenn in dem aus jenem Gesetze folgenden Ausdruck für c_1

$$c_1 = \frac{A(a+t)\varphi(p)^2}{(a+t)\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp}} + f$$

f eine absolute Constante ist.

Die Vergleichung des Werthes von c_2 in Gleichung 52) mit der Bedingung 5b) ergiebt:

Satz 24. Bei Gasen, deren specifische Wärme bei constantem Drucke von der Temperatur unabhängig ist, ist im Allgemeinen die innere Arbeit nicht gleich Null.

Der Satz 16. sagt, dass bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null ist, die specifische Wärme bei constantem Drucke im Allgemeinen noch Function von v und t, also auch, wenn wir p und t als unabhängige Veränderliche nehmen, noch Function von p und t ist. Andererseits lehren die Sätze 18. und 24., dass weder bei Gasen, deren specifische Wärme c unabhängig vom Drucke, noch bei Gasen, deren specifische Wärme c unabhängig von der Temperatur ist, die innere Arbeit gleich Null zu sein braucht. Es mag daher Interesse gewähren,

VI.

Gase, deren innere Arbeit gleich Null, und deren specifische Wärme bei constantem Drucke entweder unabhängig vom Drucke oder unabhängig von der Temperatur ist,

einer näheren Betrachtung zu unterwerfen, wobei wir wieder p und t als unabhängige Veränderliche nehmen werden.

a) Wenn bei einem Gase die innere Arbeit gleich Null sein soll, so muss nach Abschnitt III. seine Zustandsgleichung die Form 38a) (S. 220), und wenn die specifische Wärme c vom Drucke unabhängig sein soll, so muss diese Zustandsgleichung nach Abschnitt IV. die Form der Gleichung 43) annehmen. Beide Formen vereinigen sich in der einen:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n, \tag{55}$$

wo m und n absolute Constanten bezeichnen. Um diese Gleichung näher zu begründen, kann man unter anderen folgenden Weg einschlagen: Wenn man unter Zugrundelegung der Form 38a) für v den 2. Differentialquotienten $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ herstellt, so muss derselbe nach Gleichung 43a) Null sein; man erhält also, $\frac{p}{a+t}$ kürzer mit x bezeichnend, folgende Gleichung zur Bestimmung von F:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} \cdot \frac{p^2}{(a+t)^4} + \frac{dF}{dx} \frac{2p}{(a+t)^3} = 0,$$

oder:

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + 2 \frac{dF}{dx} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, mit m und n Constante bezeichnet, wie leicht zu sehen:

$$F = \frac{m}{x} + n,$$

so dass, nach Gleichung 38a):

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n$$

übereinstimmend mit der Gleichung 55) wird.

Satz 25. Gase, deren innere Arbeit gleich Null, und deren specifische Wärme c unabhängig vom Drucke, blos Function der Temperatur ist, müssen das Gesetz:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n$$

erfüllen.

Man sieht, das engere M.-G.-Gesetz ist ein specieller Fall von jenem.

Benutzt man nun umgekehrt die Gleichung 55) in den Gleichungen 46) und 3b) so erhält man, wie natürlich, dieselben Resultate, wie in den Sätzen 11. und 12. wieder. Die Gleichung 2b) giebt das bemerkenswerthe Resultat:

$$c - c_1 = Am. \tag{56}$$

Satz 26. Bei Gasen, deren innere Arbeit gleich Null, und deren specifische Wärme c unabhängig vom Drucke, blos Function der Temperatur ist, welche also das in Gleichung 55) enthaltene Gesetz erfüllen, ist die Differenz der specifischen Wärme c und c_1 gleich einer absoluten Constanten (vergl. Satz 5).

Aus diesem und dem 12. Satze ergiebt sich aber jetzt die Umkehrung des 25ten:

Satz 27. Bei Gasen, welche das Gesetz:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n$$

erfüllen, ist die innere Arbeit gleich Null und die specifische Wärme c unabhängig vom Drucke, blos Function der Temperatur.

b) Wenn bei einem Gase, ausser dass die specifische Wärme c von der Temperatur unabhängig ist, auch noch die innere Arbeit gleich Null sein soll, so muss seine Zustandsgleichung die Formen 38a) und 51) in sich vereinigen. Dies thut aber wieder die Gleichung:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n. \tag{57}$$

Zur näheren Begründung dieser Gleichung kann man folgenden Weg einschlagen.

Die Bedingung $c_2 = Ap$ in die Gleichungen 46), 36) und 26) eingeführt, giebt die Gleichungen:

$$p\frac{\partial v}{\partial p} = -(a+t)\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = 0, \tag{59}$$

$$c - c_1 = Ap\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{60}$$

Aus der letzten folgt, unter Berücksichtigung, dass c von t unabhängig sein soll:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -Ap\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

und hieraus wieder in Rücksicht auf Gleichung 59):

$$-A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Ap\frac{\partial^3 v}{\partial p\,\partial t^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + p\frac{\partial^3 v}{\partial p\,\partial t^2} = 0. \tag{61}$$

Bezeichnet man hierin $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ kürzer mit y, so erhält man die einfachere Differentialgleichung:

$$y + p\frac{\partial y}{\partial p} = 0,$$

deren Integral, wie leicht zu sehen:

$$y = \frac{\varphi'(t)}{p} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ist, unter $\varphi'(t)$ eine willkürliche Function blos von t verstanden. Aus dieser letzteren Gleichung folgt nun leicht:

$$v = \frac{\varphi(t)}{p} + (a+t)\psi(p) + f(p), \tag{62}$$

wo $\varphi(t)$ eine willkürliche Function blos von t und $\psi(p)$ und $f(p)$ willkürliche Functionen blos von p bezeichnen.

Benutzt man nun diese letzte Gleichung in der Formel 58), so erhält man folgende Bestimmungsgleichung für φ, ψ und f:

$$-\frac{\varphi(t)}{p} + (a+t)p\frac{d\psi}{dp} + p\frac{df}{dp} = -(a+t)\frac{1}{p}\frac{d\varphi}{dt} - (a+t)\psi(p).$$

Hieraus folgt, wie leicht zu sehen, einmal:

$$p\frac{df}{dp} = 0,$$

also:

$$f = n,$$

wo n eine absolute Constante bedeutet; ferner:

$$p\frac{d\psi}{dp} = -\psi,$$

also:

$$\psi = \frac{m'}{p},$$

unter m' wieder eine absolute Constante verstanden, endlich:

$$\frac{1}{p}\frac{d\varphi}{dt} = \varphi,$$

oder:

$$\varphi = m''(a+t),$$

mit m'' eine dritte absolute Constante bezeichnet. Setzt man diese Werthe in die Gleichung 62), so folgt:

$$v = \frac{m''(a+t)}{p} + \frac{m'(a+t)}{p} + n,$$

oder kürzer:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n,$$

übereinstimmend mit Gleichung 57).

Bemerkt man, dass die Form der Gleichung 57) keine andere als die der Gleichung 55) ist, und berücksichtigt man den Satz 27, so folgt aus dem Vorhergehenden:

Satz 28. Gase, deren innere Arbeit gleich Null, und deren specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig von der Temperatur ist, erfüllen das Gesetz:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n,$$

und ihre specifische Wärme bei constantem Drucke ist auch unabhängig vom Drucke, also absolut constant. Ebenso ist ihre specifische Wärme bei constantem Volumen absolut constant (vergl. Satz 26).

Da ferner c_1 aus den Gleichungen 2*b*) bis 4*b*) nur bis auf eine willkürliche Function von t bestimmt werden kann, und da c aus der Gleichung 2*b*) nur mittelst c_1 zu finden ist, so kann auch im gegenwärtigen Falle, so wenig wie in Abschnitt V., aus irgend einer Form der Zustandsgleichung auf die Unabhängigkeit des c von der Temperatur geschlossen werden, ohne eine Nebenbedingung für c_1 aufzustellen. Wir können daher nur den folgenden Satz aussprechen:

Satz 29. Gase, deren innere Arbeit gleich Null, und deren specifische Wärme bei constantem Drucke unabhängig vom Drucke ist, erfüllen das Gesetz:

$$v = \frac{m(a+t)}{p} + n,$$

und jene specifische Wärme ist zugleich auch unabhängig von der Temperatur, also absolut constant, wenn die specifische Wärme bei constantem Volumen nicht blos unabhängig vom Drucke (Satz 12), sondern auch unabhängig von der Temperatur, also absolut constant ist.

Wie oben schon erwähnt, hat sich aus den Versuchen Regnault's ergeben, dass die specifische Wärme bei constantem Drucke für atmosphärische

Luft und einige andere Gase unabhängig von der Temperatur und wahrscheinlich auch unabhängig von dem Drucke, also absolut constant ist. Die Versuche, welche Gay-Lussac und Welter zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{c}{c_1} = k$ der specifischen Wärmen bei constantem Drucke und constantem Volumen mit atmosphärischer Luft angestellt haben, ergaben ferner, dass k für sehr verschiedene Drückungen nahezu constant war, und da bei jenen Versuchen auch die Temperatur des Gases bedeutende Aenderungen erleidet, so darf daraus auch wohl auf die Unabhängigkeit des k von der Temperatur geschlossen werden. Neuere Untersuchungen, von Cazin*) angestellt, haben zwar eine, wenn auch nicht sehr bedeutende Aenderung von k mit dem Drucke und der Temperatur ergeben; ich halte es aber nichts desto weniger für interessant genug, die Consequenzen zu verfolgen, welche sich daraus ergeben, dass man c und k und folglich auch c_1, bei einem Gase als constant voraussetzt.

Aber schon ein flüchtiger Ueberblick der Gleichungen 2b) bis 4b) lässt erkennen, dass es nur möglich ist, die Unabhängigkeit der Differenz $c - c_1$ von der Temperatur, nicht aber die von c und c_1 einzeln, in sie einzuführen. Wir untersuchen daher noch:

VII.

Gase, bei denen die specifischen Wärmen c und c_1 einzeln vom Drucke und die Differenz $c - c_1$ von der Temperatur unabhängig sind.

Weil c_1 von p unabhängig ist, so folgt aus Gleichung 3b):

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial c_2}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial t} = -A\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Dies geht durch Einsetzung des Werthes von c_2 aus der Gleichung 4b) über in:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t} + \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = 0,$$

oder auch in:

$$\text{63)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Da ferner auch c von p unabhängig sein soll, so folgt aus 2b):

$$0 = \frac{\partial c_2}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial t} + c_2\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t},$$

oder mit Benutzung der Gleichung 4b) für c_2:

$$\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} - 2\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t} = 0,$$

*) *Annales de chimie et de physique. Nov.* 1862.

oder, da $\frac{\partial v}{\partial t}$ nicht Null werden kann:

64) $$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial t} \frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Da endlich $c - c_1$ von der Temperatur unabhängig ist, so folgt aus der Gleichung 2b) noch:

$$0 = \frac{\partial c_2}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

oder wiederum mit Benutzung der Gleichung 4b) für c_2:

65) $$\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial t} + 2(a+t) \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (a+t) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial p \, \partial t} = 0.$$

Die Zustandsgleichung $v = v(p, t)$ unseres Gases hat also die drei Gleichungen 63) bis 65) zu erfüllen. Aus der 63) und 64) folgt einfacher:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)^2 = 0,$$

oder, da $\frac{\partial v}{\partial p}$ im Allgemeinen nicht Null sein kann:

66) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

woraus:

67) $$v = (a+t)\varphi(p) + \psi(p),$$

unter φ und ψ Functionen von p allein verstanden.

Benutzt man die Gleichung 66) in der 65), so folgt einfacher:

68) $$\frac{\partial v}{\partial p} - (a+t) \frac{\partial^2 v}{\partial p \, \partial t} = 0.$$

An der Stelle der Gleichungen 63) bis 65) können also die drei Gleichungen 64), 66) oder 67), und 68) zur Bestimmung der Zustandsgleichung gebraucht werden. Wenn man die aus 67) folgenden Differentialquotienten von v in die Gleichungen 64) und 68) einsetzt, so kommt:

69) $$\left[(a+t) \frac{d^2 \varphi}{d p^2} + \frac{d^2 \psi}{d p^2}\right] \varphi(p) - 2 \frac{d\varphi}{dp} \left[(a+t) \frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp}\right] = 0.$$

70) $$\frac{d\psi}{dp} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass ψ unabhängig von p, also gleich einer absoluten Constanten k sein muss. Benutzt man dies in Gleichung 69), so kommt:

71) $$\varphi \frac{d^2 \varphi}{d p^2} - 2 \left(\frac{d\varphi}{d p}\right)^2 = 0,$$

eine totale Differentialgleichung der 2. Ordnung, aus welcher φ bestimmt werden muss. Um dieselbe zu integriren, übertragen wir die Abhängigkeit von φ auf p und erhalten dadurch:

72) $$\varphi \frac{d^2 p}{d \varphi^2} + 2 \frac{dp}{d\varphi} = 0.$$

Setzen wir hierin $\frac{dp}{d\varphi} = y$, so erhalten wir die Differentialgleichung der 1. Ordnung:

73)
$$2y + \varphi \frac{dy}{d\varphi} = 0.$$

Der integrirende Factor dieser Gleichung ist $\frac{1}{\varphi y}$, und mit seiner Hilfe erhält man als Integral derselben:

74)
$$\varphi^2 y = r,$$

mit r eine Constante bezeichnet. Für y seinen Werth $\frac{dp}{d\varphi}$ gesetzt, wird die letzte Gleichung:

$$\varphi^2 \frac{dp}{d\varphi} = r,$$

aus welcher nun leicht folgt:

$$p = -\frac{r}{\varphi} + n,$$

unter n eine Constante verstanden. Umgekehrt ist also, wenn die Vorzeichen in die Constanten genommen werden:

75)
$$\varphi = \frac{r}{p+n},$$

und daher die Zustandsgleichung 67) unseres Gases:

76)
$$v = \frac{r(a+t)}{p+n} + k.$$

Berechnen wir nun umgekehrt mittelst derselben die specifischen Wärmen c, c_1 und c_2, so folgt zunächst aus der Gleichung 4*b*):

77)
$$c_2 = A(p+n).$$

Die Gleichung 2*b*) ergiebt:

78)
$$c - c_1 = Ar,$$

also $c - c_1$, wie vorausgesetzt, constant. Endlich folgt aus der Gleichung 3*b*):

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = 0,$$

also c_1 und nach Gleichung 78) auch c unabhängig von p, wie vorausgesetzt:

Satz 30. Gase, bei welchen die specifischen Wärmen c und c_1 einzeln vom Drucke und die Differenz $c - c_1$ von der Temperatur unabhängig sind, müssen das in der Gleichung:

$$v = \frac{r(a+t)}{p+n} + k$$

ausgesprochene Gesetz erfüllen, und umgekehrt, bei Gasen, welche dieses Gesetz erfüllen, ist c, sowie c_1 vom Drucke und $c - c_1$ von der Temperatur unabhängig.

Das engere M.-G.-Gesetz ist ein specieller Fall des obigen für n und $k=0$; in den Sätzen 4. bis 6. ergab sich schon, dass bei Gasen, welche das engere M.-G.-Gesetz erfüllen, die specifischen Wärmen c und c_1 blos Functionen von t und die Differenz derselben constant sein müssen. Wir sehen jetzt, dass umgekehrt zur Erfüllung dieser Bedingungen, die Gase nur das allgemeine Gesetz

$$v=\frac{r(a+t)}{p+n}+k$$

zu erfüllen brauchen.

Aus der Gleichung 77) ist ersichtlich, dass bei den in diesem Abschnitt betrachteten Gasen, so lange n nicht $=0$ ist, die innere Arbeit nicht verschwindet.

Satz 31. Bei Gasen, für welche die specifischen Wärmen c und c_1 einzeln vom Drucke und die Differenz $c-c_1$ von der Temperatur unabhängig sind, welche also das Gesetz:

$$v=\frac{r(a+t)}{p+n}+k$$

befolgen, ist im Allgemeinen, so lange n nicht Null ist, die innere Arbeit nicht gleich Null.

Für $n=0$ geht das in der Gleichung 76) enthaltene Gesetz in das in der Gleichung 57) des vorigen Abschnittes ausgesprochene über.

Fürth, im Februar 1865.

XI.

Harib, Sohn des Zeid, und Garib, Sohn des Said.

Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im X. Jahrhundert.

Von

M. Steinschneider.

1.

Zu den interessantesten Beilagen, durch welche Libri's Geschichte der mathematischen Wissenschften in Italien auch für Männer ausserhalb des speciellen Faches sehr nützlich geworden, gehört die Note XIX des ersten Bandes (p. 393—464), der sogenannten *Liber anoe*, d. h. ein Kalender mit altem astronomischem, meteorologischem und agronomischem Zubehör. Das Schriftchen beginnt: *Harib filii Zeid episcopi: quem composuit Mustansir imperatori. Iste liber positus est etc.* Vermuthlich ist das Wort *Liber* oder ein gleichbedeutendes vor *Harib* weggeblieben, weil der Abschreiber es mit Farbe oder Miniatur nachtragen wollte, wie man dergleichen bekanntlich nicht blos in Handschriften, sondern auch in älteren Drucken antrifft. Die Bedeutung dieses Umstandes wird sich weiter unten ergeben. Ueber den Verfasser und seine Zeit war Libri auf unrichtige Vermuthungen gerathen; aber schon in den Verbesserungen, T. II, p. 521, theilte er die Ansicht Reinaud's mit, dass das Werk im Jahre 961 von einem spanischen Christen verfasst, und dem Hakem, Khalifen von Cordova, gewidmet sei. T. IV, p. 491 wies Libri auf eine Stelle bei Gayangos I, 198 hin, auf welche ich zurückkomme. Die mannigfache Bedeutung dieses Schriftchens für Cultur- und Literaturgeschichte ergab sich aus den daran geknüpften Bemerkungen von Reinaud, in der Einleitung zur französischen Uebersetzung des Abulfeda (1848) p. XC und *Memoire ... sur l'Inde* (1849) p. 359, wie auch von Sedillot, *Materiaux* p. 441. Wir erfahren durch Reinaud, wie sich diese sogenannte Bauernkalenderliteratur in Verbindung mit den sogenannten 28 Mondstationen bei den Arabern unter indischem Einfluss ausgebildet habe; so dass der Almanach des Harib als das älteste Document für die

Herrschaft dieser Ideen in Spanien gelten kann. Der Ursprung der Mondstationen ward in den letzten Jahren Gegenstand einer sehr lebhaften Controverse zwischen dem verstorbenen Biot, Sedillot, Max Müller und A. Weber (und ganz kürzlich auch Whitney in Amerika[1]). Die betreffende Literatur ist verzeichnet zu Anfang meiner Abhandl. in der Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellschaft Bd. XVIII (1864), S. 118–201: „Ueber die Mondstationen und das Buch Arcandam“. Neben der Erörterung arabischer, in lateinischen und hebräischen Bearbeitungen erhaltener Quellen über den Gegenstand, welche für die Ursprungsfrage von Bedeutung sind, war es mir auch darum zu thun, nachzuweisen, welche Rolle die Mondstationen, mit ihrer bisher unbeachteten Eintheilung in trockene und feuchte, in der Astrologie und Meteorologie, u. A. auch in einer Art von Loosbüchern des Mittelalters spielen. Es handelte sich also auch darum, wann und durch wen die indisch-arabischen Vorstellungen im Abendlande geläufig wurden, und daher um den lateinischen Uebersetzer des Kalenders von Harib, eine Frage, die von den genannten Gelehrten gar nicht in Betracht gezogen war. Dass das Buch schon im Jahre 961 aus dem Arabischen übersetzt worden sei, schien mir von vornherein kaum glaublich, weil zu jener Zeit überhaupt schwerlich irgend eine wissenschaftliche Schrift in Spanien aus dem Arabischen übersetzt worden. Dies führte mich gelegentlich (S. 126) auf die von M. Büdinger in Bezug auf Gerbert's (starb 1003) angebliche Reise nach Spanien hervorgehobenen Stellen, in welchen von Uebersetzungen aus dem Arabischen die Rede zu sein scheint; es sind diese: ein von einem gewissen Lupitus in Barzellona übersetztes Buch über Astronomie oder Astrologie, und ein Werk über Multiplication und Division des Weisen Josef, des Spaniers. Ueber Lupitus und sein Werk wäre irgend eine nähere Auskunft oder weitere Nachweisung sehr wünschenswerth, da es mir noch sehr fraglich ist, ob es sich um eine directe Uebersetzung aus dem Arabischen handle. Was Josef betrifft, so hat Büdinger geglaubt, an einen arabischen, bei Middeldorpf erwähnten Autor denken zu dürfen, über welchen ich hier gelegentlich Einiges berichtige, nachdem mir Middeldorpf's Abhandlung selbst (*De institutis liter. in Hispania, quae Arabes etc.* 4. *Goett.* 1810) zugänglich geworden, die aber fast nur auf Citaten aus Casiri beruht. Middeldorpf nennt p. 33 unter den Mathematikern zu Toledo: Josef ben Omar „Algiaheri“ (*sic*) genannt Ibn Abi Thalta, welcher *per* 30 *annos totum se dedit* (*!*) *confectioni tabularum astronomicarum. Decessit Eg.* 435, *Chr.* 1043 (so richtig). In dem Auszuge aus Ibn Baschkowal bei Casiri II, 148 heisst der Name *Algiaheni*, .. *qui praeter literas humaniores Jurisque peritiam*, *Astrorum cognitione maxime claruit*, .. *relictis egregiis libris*,

---

1) Siehe *Journ. of the R. asiat. Soc.* 1865 *vol. I, T. II, p.* 331 ff., dagegen Weber's Abhandlung im letzten Hefte der Indischen Studien. Die Controverse ist noch keineswegs geschlossen, und ich selbst habe die Absicht, in der D. M. Zeitschrift auf den Gegenstand zurückzukommen.

Tabulas Astr. complectentibus novis observationibus illustratas, quas ipse XXX annorum spatio accuratissime fecerat. Unter dem Jahre 1043 erscheint dieser Josef bei Sedillot (*Prolég. des tables astr. d'Oloug-Beg, Introd. p. CLIII*, No. 66, vergl. p. LXXVIII—IX Ibn Abi Thalta); der mit arabischen Lettern (nach welcher Quelle?) umschriebene Name lautet hier *al-Dschijani* oder *al-Dschajjani*, wenn man ihn als Patronymium von Jaen ableitet (siehe Lobb el-Lobab ed. Veth p. 73), was wohl sehr nahe liegt; nach Jaen sind die im Jahre 940 von *Abu Muad* (oder *Moads*) verfassten, wahrscheinlich von Gerard aus Cremona übersetzten „*Tabulae Jahen*" genannt, von welchen ich in meinem 2. Briefe an Boncompagni handle. Hammer (Litgesch. d. Araber, VI, 428, No. 5926) nennt Josef „Dschehini", was er auch mit arabischen Lettern umschreibt, und bemerkt in der Anmerkung: „Nicht Dschajari (!), wie in Sedillot's Prolegomenen." „Thalka" bei Hammer ist wohl nur Druckfehler. Die Form Dschehini ist hier sicherlich unmotivirt und mir überhaupt zweifelhaft. In der hebräischen Bearbeitung eines Commentars über das Buch *Jezira*, über dessen arabischen Verfasser die ersten Autoritäten noch streitig sind, der aber jedenfalls im X. Jahrhundert in Kairowan lebte und auch Schriften über Mathematik verfasste,[2]) wird ein „Omar (?) ben Dschihani" erwähnt, wenn die Lesart im Literaturblatt des Orient 1845, S. 563 richtig ist; in einer andern Abschrift aus derselben (Münchener) Handschrift fand ich Dschihath (Thaw für Nun Jod), und möchte fast vermuthen, dass er der im IX. Jahrhundert im Osten lebende Omar genannt el-Dscha'hitz sei.[3]) Ueber Josef ist mir keine weitere Quelle bekannt, und bedarf Büdinger's Hypothese wohl nunmehr keiner Widerlegung, nachdem das Datum 973 des Briefes von Gerbert schon von Cantor geltend gemacht worden, wie ich aus Martin (*Les signes numéraux etc. Rome* 1864, p. 84, wo noch immer: Algiaheri) ersehe. Mir scheint aber auch die Ansicht des Letzteren angemessener, dass der von Gerbert erwähnte Josef nicht der Verfasser eines arabischen, sondern eines lateinischen Originals. Wenn Cantor sogar an einen Juden denken möchte, so kann ich wenigstens bezeugen, dass nach zwanzigjährigen Specialforschungen auf dem Gebiete der jüdischen Literatur und insbesondere der arabischen Schriften der Juden, und ganz besonders im Bereich der externen Wissenschaften, mir kein jüdischer Verfasser einer mathematischen Schrift vor dem XI. Jahrhundert in Spanien bekannt geworden; denn der von Casiri dahin versetzte Astrolog Sahl ben Bischr (Baschar), dessen Schriften unter dem Namen *Zael Ismaelita* u. s. w. gedruckt sind, gehört jedenfalls nach dem Orient, und ist höchst wahrscheinlich identisch mit Sahl genannt

---

2) Siehe mein *Jewish Literature* p. 363, No. 93, angeführt von Friedlein in der Zeitschr. f. Mathem. Bd. VIII.

3) Ueber diesen Autor (starb 868/9) siehe Wüstenfeld, Gesch. d. arab. Aerzte §. 65; vergl. Hammer, Litgesch. IV, 474, 585, V, 325; Hebr. Bibliographie 1861, S. 21, A. 3.

der Rabbiner aus Tabaristan (um 800), dessen Bearbeitung des Almagest allein das Kapitel von der Projection der Strahlen hatte (vergl. D. M. Zeitsch. XVIII, 183). Ich habe mich bei dieser Nebenuntersuchung etwas länger aufgehalten, weil sie meine Vermuthung unterstützt, dass der lateinische Uebersetzer des Kalenders in einer etwas spätern Zeit zu suchen sei, am ehesten in der Blüthezeit solcher Uebertragungen; und da ich in dem Verzeichniss der Uebersetzungen Gerard's von Cremona ein „*Liber unohe*" fand, und der Pariser Codex, aus welchem der Kalender von Libri abgedruckt worden, nicht wenige Uebersetzungen Gerard's zu enthalten scheint (vergl. Zeitschr. f. Mathem. X, 468 ff.); so liegt nichts näher, als auch den Kalender ihm zu vindiciren. Jene Vermuthung würde nur dann zu verwerfen sein, wenn etwa Spuren einer Bekanntschaft mit der lateinischen Uebersetzung über die Zeit Gerard's hinaufreichen.

2.

Das arabische Original des Almanach scheint fast zu derselben Zeit von einem berühmten muhammedanischen Autor in Spanien benutzt worden zu sein, als es den Christen zugänglich gemacht wurde, und diese Spur wird uns zur näheren Kenntniss des Verfassers führen, der unter etwas verschiedenem Namen auf andern Gebieten sich rühmlich bekannt gemacht, ohne dass meines Wissens arabische Schriftsteller und berühmte Orientalisten, denen wir diese anderweitigen Nachrichten verdanken, die Identität erkannt hätten, obwohl sie ihnen sehr nahe lag.

Gehen wir zunächst auf die Originalquelle über den Kalender zurück, welche erst in den letzten Jahren zugänglich geworden. Makkari (*Analectes sur l'histoire d'Espagne, publiés par R. Dozy etc. Leyde* 1858—61, *T. II, p.* 125, ungenau übersetzt von Gayangos, *The history of the Muhamm. Dynasties in Spain I,* 198, 482) theilt aus den Zusätzen des Historikers Ibn Said (XIII. Jahrhundert) zu einem Panegyrikon Spaniens von Ibn Hazm folgende Stelle mit: „Was die Sternkunde anbetrifft, so hat Ibn Zeid el-Uskuf der Cordubenser darüber Schriften verfasst. Er stand dem Mustan'sir ben Na'sir el-Merwan sehr nahe (war Günstling oder dergleichen), und für diesen verfasste er das Buch: Eintheilung der Zeiten und Beglückung der Körper. Darin geschieht Erwähnung der Mondstationen, und was damit zusammenhängt, in zweckmässiger empfehlenswerther Weise." Ibn Said fügt hinzu, dass ein Autor seiner Zeit, Mutarrif aus Sevilla, Aehnliches versucht, aber von seinen Landsleuten als Ketzer verschrieen worden, und daher von den betreffenden Schriften nichts in die Oeffentlichkeit gekommen. Gayangos (p. 482) bemerkt, dass das Wort Uskuf oder Oskof (so ist zu vocalisiren, entsprechend επισκοπος, nicht: „Askaf") hier zweideutig sei, da „Ibn" Sohn bedeutet, also *filius Zeidi episcopi* oder *episcopus* übersetzt werden kann; er erklärt sich für Ersteres aus sachlichen Gründen, denn wenn nicht etwa Bischof ein Spitzname sei, so dürfte man wohl annehmen,

dass ein solcher zum Islam übergetreten sei, und den Namen Zeid angenommen habe, für den Vater eines Bischofs passe der Name Zeid nicht. — Dennoch liest man bei Hammer (Litgesch. V, 310, No. 4063) unter Anführung von Gayangos: „Ibn Seid el-Askaf um J. 350 (961), der Bischof . . ., Verfasser verschiedener astronomischer Werke, als 1. das Buch der Eintheilung der Zeit und 2. (!) die Herstellung der Leiber“ . . . ! — Ich sehe aber auch gar keinen Grund, warum der Bischof nicht als Christ zugleich den arabischen Namen Zeid haben konnte. Von unserm *Harib fil. Zeid episcopi* wusste auch Hammer noch Nichts. Was ist aber Harib? Der Name quälte mich eine Zeitlang, bis ich ganz zufällig in Wüstenfeld's Geschichte der arabischen Aerzte S. 55, No. 66 auf den Artikel: „Garib ben Said aus Cordoba, Secretair des Spanischen Khalifen Abd el-Rahman III, und el Hakim el-Monstanser billah“ stiess. Namen, Zeit und Stellung waren zu frappant, um an der Identität zu zweifeln, und ich suchte auch über Diesen nähere Nachrichten, bis ich sie zuletzt sogar in derselben Quelle, nur wenige Seiten von Ibn Zeid entfernt, fand; doch mag zuerst noch die Benutzung des arabischen Originals nachgewiesen werden.

Der muhammedanische Autor, welcher den Kalender benutzte, war ein Zeitgenosse Gerard's, der Verfasser eines wohlbekannten, namentlich wegen der zahlreichen Quellen vielfach besprochenen Werkes über Agricultur, Ibn el-Awwam aus Sevilla. Das Werk ist bekanntlich arabisch herausgegeben mit einer spanischen Uebersetzung von J. A. Banqueri (Madrid 1802), welche Viel zu wünschen übrig liess. Im Jahre 1864 erschien in Paris der 1. Band der französischen Uebersetzung von Clement-Mullet, mit einer ausführlichen Vorrede, welche jedoch in der Besprechung der Quellen des arabischen Werkes weniger Neues bietet, als man vielleicht aus dem Erbsitze der orientalischen Wissenschaft erwarten durfte.[4]) Auch die Notiz (p. 49), dass der von Libri edirte Almanach von Cordova benutzt sei, ist nicht von einer näheren Nachricht über den Verfasser begleitet; vielleicht ist noch Manches für einen Specialindex der angeführten Autoritäten am Schlusse des 2. Bandes verspart? Banqueri hat am Schlusse seiner Einleitung, leider ohne Stellennachweis, ein Verzeichniss der im Werke vorkommenden Autoren gegeben, welches stark reducirt wird, wenn man die Identität der mitunter nur sehr wenig abweichenden Namen erkennt, wie das schon aus E. Meyer's Rectificationen ersichtlich ist. Uns interessiren hier die drei auf p. 62 dicht hinter einander vorkommenden Namen: *Azib ben Sa'id* der Cordubenser, *Garib Ibn Sa'id* oder *Sa'ad* und *Garib ben Ma'in* (offenbar ein Lesefehler für *Said*, wie Azib für Garib). Hier haben wir also den Namen des Kalendermachers in etwas abweichender Form. Garib unterscheidet sich von Harib des Lateiners im Arabischen nur durch einen Punkt; denn

4) Vgl. z. B. Rose, *Aristoteles Pseudepigraphus* (1864) p. 268, und D. M. Zeitschr. 1864 (Bd. XVIII), S. 196.



das lateinisccbe H drückt hier den Kehllaut des Buchstaben Ain aus, wie in „Hali" für Ali, „Haomar" für Omar u. dergl.; der lateinische Uebersetzer hatte also den Namen Arib vor sich. Hingegen ist Sa'îd in der That ein ganz anderer Name als Zeid, und eine Verwechslung dieser Beiden ist auf rein arabischem Boden weder in der Schrift, noch in der tönenden Sprache leicht möglich. Ich gestehe, dass mir zur Erklärung dieser Variante der passende Schlüssel fehlt.

3.

Arib (oder Garib) ben Sa'id ist eine, namentlich durch Dozy's Forschungen[5]) jetzt bekannte, und durch die eben nachgewiesene Identität mit dem Bischofssohn noch intessantere Persönlichkeit; ich werde hier nur Quellen und Resultate kurz zusammenstellen, da die meisten Conjecturen Dozy's schon an sich sehr wahrscheinlich, nunmehr als evident bezeichnet werden können, bis auf Einiges, was eben durch jene Identification zu modificiren ist.

Makkari, an der oben erwähnten Stelle (II, p. 123), erwähnt einer Chronik, deren Verfasser in den meisten Handschriften Garib ben Saîd der Secretair aus Cordova heisst; die Herausgeber emendiren Arib ben Sa'ad, wahrscheinlich gestützt auf die Erörterungen Dozy's, und ebenso II, p. 93. Schon Gayangos (p. 494 zu p. 194) hat auf den, bei Casiri irrthümlich so genannten Garibai ben Said oder Saad hingewiesen, welcher ein im Escurial befindliches Werk über „Entstehen des Foetus und Verhalten der Schwangern und Kinder" dem Hakem im Jahre 353 (964) widmete, und bei Ibn Awwam angeführt wird. Casiri (I, 324) setzt hinzu, dass er Secretär des Abd-er-Rahman III. war und über Veterinärkunde schrieb. Die Quelle für Ersteres ist unbekannt, Letzteres wahrscheinlich eine Conjectur (nach den betreffenden Stellen bei Ibn Awwam), die auch Dozy (p. 42) als solche vorbringt. Darauf hin hat auch wohl Hammer (Litgesch. V, 511, No. 4474) „Arib Ibn Said" (*sic*) als Arzt, Oekonom und Geschichtschreiber bezeichnet. Mir ist das Werk über Veterinärkunde noch sehr zweifelhaft. Der Almanach nimmt auf Falknerei, Fischfang u. dergl. Rücksicht (siehe z. B. bei Libri p. 415, 425, 439, 444, 448), und die Citate Ibn Awwan's (bei Banqueri II, 490, 492, eine Vergleichung ist mir nicht möglich gewesen) könnten wohl dem arabischen Original, das vielleicht auch nur auszüglich übersetzt worden, angehören. Aber auch die Namensform scheint mir nicht so gesichert, wie Dozy annimmt, doch mögen zuerst noch einige sachliche Bemerkungen folgen.

---

5) *Histoire de l'Afrique et de l'Espagne etc. par Ibn Adhari et Fragments de la Chronique d'Arib etc. Leyde* 1848—1851, *T. I Indrod., p.* 37 ff. — Die 2. Ausgabe von Dozy's *Recherches* ist leider auf der hiesigen königlichen Bibliothek nicht vorhanden, ich weiss also nicht, ob dort Etwas über unseren Gegenstand zu finden ist.

4.

Dozy hat nachgewiesen (p. 43), dass die Chronik des Arib, deren Fragment er aufgefunden und als Einschaltung in Ibn Adhari (I, p. 144 bis 224?) edirt hat, bis zum Jahre 363 H. reichte, aber nicht 366 H. überschreiten konnte, also zwischen 973—77 abgefasst ist. Er vermuthet, dass Arib ein Client oder Abkömmling eines Freigelassenen (*Maula*) der Omajaden war, und hebt hervor, dass nirgends sein Gentilicium vorkomme, wie auch der Charakter seiner Geschichtsschreibung einem solchen Verhältniss entspreche. Das erklärt sich noch einfacher, wenn Arib selbst Christ, oder von christlicher Abstammung, oder Renegat war. Der Geschichtschreiber war aber auch im Orient bekannt geworden.

Als Dichter erscheint offenbar kein anderer, als unser „Garib ben Said" in der *Jetime* des Thaalebi; denn in dem Gedichte bei Hammer V, 889, No. 5011, grüsst der Dichter vom Norden aus die Freunde in Cordova, im Palast Rossafa, und, wie es scheint, während einer längeren Abwesenheit. Doch darf man auf Hammer's Uebersetzungen nicht zu viel Schlüsse bauen.

Wenn Dozy den Namen Garib, der in allen von ihm und uns angeführten Quellen bedeutend vorwiegt, geradezu verwirft, und Arib vorzieht, selbst ohne das lateinische Harib mit in die Wagschale legen zu können, so giebt bei ihm den Ausschlag eine Stelle eines Historikers des V. Jahrhunderts der H., Ibn Schebat, welcher den Namen vocalisirt, und hinzusetzt: „das ist bekannt", nach Dozy's wohl richtiger Auffassung: „es ist ein bekannter Name". Allein bei Ibn Schebat selbst heisst der Name sonst Garib, und die Vocalisation passt für beide Formen; es ist also ebenso möglich, und nach allen andern Umständen sogar wahrscheinlich, dass an den äusserst wenigen Stellen, zu welchen auch der Text des lateinischen Uebersetzers gerechnet werden kann (wenn man nicht etwa vor Harib noch ein G ausgefallen denkt), der diakritische Punkt des Buchstaben Gain ausgefallen sei. Dafür spricht, soweit ich es übersehen kann, die Frequenz des Namens. Ich habe in den mir eben zugänglichen arabischen Namensverzeichnissen nirgends Arib gefunden, Freytag's kleines Lexicon hat nicht einmal diese Wortform. Hingegen erscheint z. B. Abu Senan Garib ben Muhammed Ibn Maka bei Ibn Khallikan (No. 192 Wüst., in Slane's Uebersetzung I, 453), Abu 'l Garib bei Hadschi Khalfa VII, 1076, No. 2885; vielleicht ist auch Garbib, Dichter in Toledo, bei Hammer V, 790, No. 4815 nur Lesefehler für Garib? Dieses Wort bedeutet aber *peregrinus*, weshalb auch Ptolemäus, der sonst unbekannte Verfasser einer Biographie und Bibliographie des Aristoteles, in dem Specialartikel des al-Kifti das Prädicat el-Garib führt. Aus dieser Bedeutung, die für den Namen eines Christen oder Renegaten sehr wohl passt, würde sich vielleicht auch die gänzliche Weglassung des Eigennamens bei Makkari („Ibn Zeid", als Verfasser des Almanachs) motiviren lassen?

Dass nach allem angegebenen Zusammentreffen in Namen, Zeit, Stel-

lung u. s. w. doch der Verfasser des Almanach ein anderer sei, als der Arzt, Geschichtschreiber und Dichter, das wird wohl Niemand behaupten wollen; es wäre daher jede weitere Aufklärung mit Dank anzunehmen. Unter solchen Umständen wird auch die nachfolgende Notiz, die möglicher Weise auf unbenutzte Quellen führt, am Orte sein.

5.

Gayangos (I, 482) weist bei Gelegenheit des Bischofssohnes auf die Stellung hin, welche die Christen Cordova's unter den erleuchteten Omajaden einnahmen. „Ein anderer Bischof von Cordova" wurde von Abd er-Rahman III. nach Deutschland, Constantinopel u. s. w. gesandt. Dieser Gesandte an Otto, Unterhändler mit Johann v. Görz (956–8) u. s. w., heisst in arabischen Quellen Rabi'u (Makkari II, 235, 373—4, Gagangos I, 236, 502, II, 139, 464); der Begleiter des Johann wird in christlichen Qellen Recemundus genannt und als Secretär (Katib) bezeichnet. Dieser Rabi'u ist es offenbar, welcher von Ibn Abi O'seibia in seiner Geschichte der arabischen Aerzte im XIII. Kapitel (Aerzte Spaniens) erwähnt wird, in einem Artikel, dessen Ueberschrift in den Handschriften nicht übereinstimmt, aber wahrscheinlich Kitani lautet, in der Münchener Handschrift Bd. II, Bl. 105: Tibjani, in der Berliner Handschrift finden sich nur die Anfangszeilen desselben. Dieser spanische Arzt, Namens Abu Abd Allah Muhammed, starb um (*karib min*) 420 H. (1029), beinahe 80 Jahre alt. In einer seiner Schriften las der Richter 'Said von Toledo (schrieb um 1060), dass er die Logik bei verschiedenen Männern studirt habe, deren Namen Hammer (V, 298) zum Theil unrichtig wiedergegeben.[6]) Der siebente ist richtig Muhammed ben Meimun, genannt *Marcus* — wohl ein Renegat —, der neunte Abu 'l 'Hârith der Bischof, Schüler des Rabi'u Ibn Zeid el-Uskuf el-Filusuf. Hammer hat das zweite Uskuf unübersetzt gelassen, vielleicht im Zweifel, ob Rabi'u oder Zeid als Bischof bezeichnet werde. An der Identität dieses Rabi'u mit dem gleichnamigen Bischof bei Makkari kann wiederum kein Zweifel sein. Es bietet sich aber hier der Ausweg, anzunehmen, dass die Bezeichnung Bischof bei Makkari durch Weglassung des Vaternamens auf den Sohn übergegangen. Ist Rabi'u ferner eine Umstellung von Arib, oder sind es zwei Brüder, Söhne des Bischofs Zeid?

Cordova's Bedeutung für die arabische Wissenschaft tritt unter der Regierung Abd er-Rahman's hervor und erreicht eigentlich schon den Höhepunkt unter seinem Nachfolger Hakem. Welchen Einfluss auch hier, wie in Bagdad beim ersten Aufblühen, Christen und Renegaten, sowie einzelne Juden, ausgeübt, wird noch zu untersuchen sein. Ich erinnere an den aus

6) No. 4. Radsi lies Kadsi; 5. lies el-Mes'udi el-Bokhari; 8. in der Handschrift Said ben Jat'hnu (?); 10. Abi Mezia el-Bokhari; 11. el-Merhiti, offenbar ein Schreibfehler für Medschriti, der berühmte Mathematiker, siehe Zur pseudepigr. Lit. S. 13, A. 1.

Constantinopel gesendeten Nicolaos, welcher mit dem Juden 'Hisdai (oder 'Haschdai) den Dioscorides nach Spanien verpflanzte (951—61).[7]) Unter den Aerzten Spaniens, über welche Ibn Abi O'seibia berichtet, sind verhältnissmässig viele Christen und Juden; leider sind die betreffenden Nachrichten bis jetzt meist nur aus den unvollständigen und unzuverlässigen Angaben Hammer's bekannt. Die letzte Quelle scheint in diesem Kapitel das Werk des Richter's 'Sâid aus Cordova zu Toledo, über dessen schon früher conjicirte Identität mit einem bedeutenden Astronomen, dem Gefährten des Instrumentenmachers Zarkali in der Redaction der Toletanischen Tafeln, ich kürzlich durch eine arabische Handschrift in München zu vollständiger Sicherheit gelangt bin. Um so begreiflicher ist es, dass unter den in seinem Werke genannten spanischen Aerzten nicht wenige, und gleich die allerersten einen höheren Rang in den mathematischen Wissenschaften einnehmen, als in der medicinischen. — Da man nun in letzter Zeit vielfach auf die Beziehungen der Araber in Spanien zu den Christen gerathen ist, so glaubte ich, dass auch der Verfasser des Almanachs von Cordova nähere Nachforschung verdiene, welche mit den obigen Mittheilungen nicht abgeschlossen, sondern vielmehr angeregt werden sollen.

Berlin, Anfang des Jahres 1866.

Nachschrift. Erst beim Abdruck des Artikels bin ich im Stande, die Stelle aus Joh. v. Görz (aus Pertz, Monum. IV, 374, Cap. 128) mitzutheilen:

Tandem exstitit inter palatina offitia Recemundus quidam, adprimae catholicus, et litteris optime tam nostrorum quam ipsius inter quos versabatur ling. Arab. institutus. Qui tantum in regia habebat offitii, ut diversorum pro necessitatibus ad palatium occurrentium [concurr.] *causis extra auditis, quia litteris omnes ibi queremoniae vel causae signantur et resignantur, hic notata inferret, itidemque responsa scripta referret. Pluresque eidem alii erant offitio delegati cet.*

7) Siehe Philoss. Luzzatto, *Notice sur Abou-Jousouf Hasdai etc.* Paris 1852, p. 16, 56; Meyer, Gesch. d. Botanik III, 137, 172.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Ueber Vielecke, Vielseite und Vielflache. Von Dr. HERTZER.

1) Das vollständige ebene n-Eck in der Ebene.

Das vollständige ebene n-Eck ist ein Gebilde aus n beliebig in einer und derselben Ebene liegenden Punkten. Dasselbe bestimmt:

$\frac{1}{2}n(n-1)$ Seiten und

$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Diagonalpunkte.

Eine Seite ist die Verbindungsgerade zweier Ecken; in ihr liegen:

2 Ecken und

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Diagonalpunkte.

Ein Diagonalpunkt ist der Schnitt zweier sich nicht in derselben Ecke treffenden Seiten.

Diese Resultate lassen sich sofort auf das vollständige ebene n-Seit übertragen.

Die $\frac{1}{2}n(n-1) = m$ Seiten des n-Ecks bilden ein vollständiges ebenes m-Seit mit $\frac{1}{2}m(m-1)$ gleich

$\frac{1}{8}(n+1)n(n-1)(n-2)$ Ecken; jeder der

n-Eckpunkte (des n-Ecks) ist

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ fach, jeder der

$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Diagonalpunkte

1 fach zu zählen.

---

2) Das vollständige n-Eck im Raume.

Das vollständige n-Eck im Raume ist ein aus n Punkten, welche beliebig im Raume liegen, bestehendes Gebilde. Dasselbe bestimmt:

$\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten,

$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ Ebenen,

$\frac{1}{72}(n+4)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Diagonalen — und zwar:

$\frac{1}{8}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Diagonalen 1. Ordnung,

$\frac{1}{72}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-4)$ „ 2. „ —,

$\frac{1}{1296}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{n^4+n^3-73n^2+257n-102\}$ Diagonalpunkte — und zwar:

$\frac{1}{12}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Kanten-Diagonalpunkte und

$\frac{1}{1296}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{n^3+6n^2-43n+42\}$ Haupt-Diagonalpunkte.

Diese letzteren bilden vier Gruppen, nämlich:

$\frac{1}{8}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ Diagonalpunkte 1. Ordn.,

$\frac{1}{8}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ „ 2. „

$\frac{1}{48}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ „ 3. „

$\frac{1}{1296}n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ „ 4. „

Durch jede Ecke gehen:

$n-1$ Kanten,

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Ebenen,

$\frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Diagonalen 1. Ordnung.

Eine Kante ist die Verbindungsgerade zweier Ecken; durch sie gehen:

$n-2$ Ebenen, in ihr liegen:

2 Ecken und

$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ Kanten-Diagonalpunkte.

In einer Ebene, bestimmt durch

3 Ecken, liegen

3 Kanten,

$\frac{1}{6}(n+4)(n-3)(n-4)$ Diagonalen — und zwar:

$\frac{3}{2}(n-3)(n-4)$ Diagonalen 1. Ordnung,

$\frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-5)$ „ 2. „ —, und

$\frac{1}{72}(n-3)(n-4)\{n^4+n^3-73n^2+293n-246\}$ Diagonalpunkte.

Von diesen Diagonalpunkten sind

$\frac{1}{2}(n-1)(n-3)(n-4)$ Kanten-Diagonalpunkte — nämlich

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)$ auf den 3 Kanten der Ebene und

$\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ als Schnitte der Ebene mit den dieselbe schneidenden Kanten des n-Ecks —, und

$\frac{1}{72}(n-3)(n-4)(n-5)\{n^3+6n^2-43n+42\}$ Haupt-Diagonalpunkte: und zwar:

$3(n-3)(n-4)(n-5)$ erster Ordnung,

$\frac{9}{4}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ zweiter Ordnung:

$\frac{3}{4}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ als Schnitte zweier in der Ebene liegenden Diagonalen 1. Ordnung, und

$\frac{3}{2}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ als Schnitte je einer Diagonale 1. Ordnung mit je einer 2. Ordnung, beide in der Ebene liegend,

$\frac{3}{8}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ dritter Ordnung:

$\frac{1}{4}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ als Schnitte je einer Diagonale 1. Ordnung mit je einer 2. Ordnung, beide in der Ebene liegend,

$\frac{1}{8}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ als Schnitte zweier in der Ebene liegenden Diagonalen 2. Ordnung, und

$\frac{1}{72}(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ vierter Ordnung.

Eine Diagonale 1. Ordnung ist der Schnitt zweier durch dieselbe Ecke gehenden, sich nicht in einer Kante schneidenden Ebenen. In ihr liegen 1 Ecke und

$\frac{1}{6}\{n^3-6n^2-n+42\}$ Diagonalpunkte; von diesen sind

2 Kanten-Diagonalpunkte,

$\frac{1}{6}(n+2)(n-3)(n-5)$ Haupt-Diagonalpunkte, und zwar:

$4(n-5)$ erster Ordnung,

$2(n-5)(n-6)$ zweiter Ordnung,

$\frac{1}{6}(n-5)(n-6)(n-7)$ dritter Ordnung.

Eine Diagonale 2. Ordnung ist der Schnitt zweier Ebenen, welche keinen Eckpunkt gemein haben. In ihr befinden sich

$\frac{1}{6}\{n^3-3n^2-34n+132\}$ Diagonalpunkte; von diesen sind

6 Kanten-Diagonalpunkte und

$\frac{1}{6}(n-2)\{n^2+3n-16\}$ Haupt-Diagonalpunkte, nämlich:

$9(n-6)$ zweiter Ordnung,

$3(n-6)(n-7)$ dritter Ordnung und

$\frac{1}{6}(n-6)(n-7)(n-8)$ vierter Ordnung.

Ein Kanten-Diagonalpunkt ist der Schnittpunkt einer Kante mit einer nicht durch sie gehenden Ebene; durch denselben gehen

1 Kante,

$n-1$ Ebenen und

$n-2$ Diagonalen, nämlich:

3 Diagonalen 1. Ordnung und

$n-5$ „ 2. „ .

Ein Haupt-Diagonalpunkt ist der Schnittpunkt dreier nicht durch eine und dieselbe Ecke gehender Ebenen, von denen je 2 keine Kante gemein haben; in ihm schneiden sich 3 Diagonalen. Der Schnittpunkt von 3 Diagonalen erster Ordnung ist ein Haupt-Diagonalpunkt erster Ordnung, von 2 Diagonalen erster und 1 zweiter Ordnung ein Haupt-Diagonalpunkt zweiter Ordnung, von 1 Diagonale erster und 2 zweiter Ordnung ein Haupt-Diagonalpunkt dritter Ordnung, von 3 Diagonalen zweiter Ordnung ein Haupt-Diagonalpunkt vierter Ordnung.

Die vorstehenden Angaben lassen sich leicht auf ein Gebilde, welches

aus n beliebig im Raume liegenden Ebenen besteht — das sogenannte vollständige n-Flach — übertragen.

Sieht man die $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)=m$ Ebenen eines vollständigen n-Ecks im Raume als ein vollständiges m-Flach an, so hat dasselbe

$\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ gleich

$\frac{1}{1296}n(n-1)(n-2)(n-3)\{n^2+2\}\{n^3-3n^2+2n-12\}$ Ecken.

Diese sind die

n Ecken (des n-Ecks), von denen aber jede

$\frac{1}{48}(n-1)(n-2)(n-3)\{n^3-3n^2-10n+32\}$ fach zu zählen ist, die

$\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ Kanten-Diagonalpunkte, jeder

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ fach zu nehmen, die

$\frac{1}{1296}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{n^3+6n^2-43n+42\}$

1 fachen Haupt-Diagonalpunkte und

$\frac{1}{2}n(n-1)$ auf je einer Kante im Unendlichen liegenden Punkte, von denen jeder

$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ fach zu nehmen ist. —

Dieses m-Flach hat ferner $\frac{1}{2}m(m-1)$ gleich

$\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)\{n^2+2\}$ Kanten, nämlich

$\frac{1}{2}n(n-1)$ Kanten des n-Ecks, jede

$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ fach zu nehmen, und

$\frac{1}{72}(n+4)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

1 fache Diagonalen.

XVII. Ueber die elliptische Constante $\vartheta(0)$.

Jacobi hat schon sehr bald, nachdem Zähler und Nenner der elliptischen Function in unendliche Producte entwickelt waren, diese Functionen, die ϑ-Functionen genannt werden, in Reihen entwickelt und zwar von folgender Form:

$$\prod_{h=0}^{h=\infty}\left(1-\frac{\sin^2 iv}{\cos^2\frac{2h+1}{2}a\,i}\right)=C.\vartheta(v)=C\,.\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}e^{am^2+2mv}.$$

Die Bezeichnung weicht von der Jacobi'schen etwas ab, und ist die, wie sie durch Riemann's Arbeiten gebräuchlich geworden ist. Die Constante C, welche nur von a abhängt, oder $\frac{1}{\vartheta(0)}$, ergiebt sich hier in Reihenform unmittelbar, man kann aber dieselbe nicht mit Hilfe einer naheliegenden Eigenschaft der ϑ-Reihe in Productform darstellen ohne sich besonderer Kunstgriffe zu bedienen, wie Jacobi *fundam. nova pag.* 178 *et seq.* Hierzu

genügt die Eigenschaft der ϑ-Reihe $\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial a}$, welche sich bekanntlich auch dazu verwenden lässt, die Constanten höherer ϑ-Functionen durch Integrale algebraischer Functionen auszudrücken.

Wendet man diese Differentialgleichung auf die Gleichung:

$$\frac{\vartheta(v)}{\Theta(0)} = \prod_{h=0}^{h=\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 iv}{\cos^2 \frac{2h+1}{2} a i}\right)$$

an und setzt nach der Differentiation $v=0$, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v . \partial v}(v=0) = \vartheta(0) . \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{2}{\cos^2 \frac{2h+1}{2} a i},$$

und dies ist gleich $4 . \frac{\partial \vartheta(0)}{\partial a}$. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \lg . \vartheta(0)}{\partial a} = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{1}{2\cos^2 \frac{2h+1}{2} a i} = 2 \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\partial \frac{e^{(2h+1)a}}{1+e^{(2h+1)a}} . \frac{1}{2h+1}}{\partial a}.$$

Und durch Integration:

$$\lg \vartheta(0) + k = 2 \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{e^{2h+1 . a}}{1+e^{2h+1 . a}} . \frac{1}{2h+1} = 2 \sum_{h . g=0}^{h, g_1=\infty\,(2)} \frac{e^{2h+1 . a}}{2h+1} . e^{(2h+1)g . a} . (-1)^g .$$

k ist $=0$, wie man aus Specialisirung von a gleich $-\infty$ erkennt. Man erinnere sich der Formel $\lg \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right)$, aus welcher hier folgt:

$$\lg \vartheta(0) = \sum_{g=1}^{g=\infty} (-1)^g . \lg \left(\frac{1-e^{g . a}}{1+e^{g . a}}\right),$$

und endlich:

$$\vartheta(0) = \frac{1}{C} = \prod_{g=1}^{g=\infty} \left\{\frac{1-e^{2ga}}{1+e^{2ga}} . \frac{1+e^{\overline{2g-1} . a}}{1-e^{\overline{2g-1} . a}}\right\},$$

welches die bekannte Formel für $\vartheta(0)$ ist.

Dr. J. Thomae.

XVIII. Ueber die Summe von Cubikzahlen hat Prof. Angelo Genocchi in Turin am Anfange dieses Jahres eine Abhandlung der päpstlichen Akademie *de' nuovi Lincei* vorgelegt, deren wesentlicher Inhalt hier mitgetheilt werden soll. Es sei eine unbestimmte Gleichung

1) $\quad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^3,$

in welcher $n > 3$ vorausgesetzt wird.

Unter Berücksichtigung der Summenformeln

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{2.3},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 . n^2}{4},$$

geht die Gleichung in folgende über:

$$nx^3 + \frac{3n(n-1)}{2} rx^2 + \frac{(2n-1)n(n-1)}{2} r^2 x + \frac{n^2(n-1)^2}{4} r^3 = y^3,$$

oder:

$$n\left(x + \frac{n-1}{2} r\right)\left(x^2 + (n-1)rx + \frac{n(n-1)}{2} r^2\right) = y^3,$$

und mit Hilfe der Substitution $s = 2x + (n-1)r$ endlich in:

2) $$ns\,[s^2 + (n^2-1)r^2] = 8y^3.$$

Genocchi zeigt nun, theils für specielle Werthe von n, theils allgemein, wie man mittelst neuer Substitutionen von der Gleichung 2) zu einer anderen ihr durchaus ähnlichen Gleichung 3) gelangen kann, welche folglich durch dieselben ganzzahligen Werthe wie 2) erfüllt werden kann, woraus alsdann, da die Unbekannten in 3) mit denen in 2) einfache Verbindungsgleichungen besitzen, neue Auflösungen von 2) ermittelt werden können.

Man setze die complexe Zahl $s + r\sqrt{1-n^2} = (p + q\sqrt{1-n^2})^3$, so geht durch Identificirung der reellen und der lateralen Theile daraus hervor:

$$r = q\,[3p^2 + (1-n^2)q^2] \text{ und } s = p\,[p^2 + 3(1-n^2)q^2].$$

Weiter setze man die irrationale Zahl $p + q\sqrt{3(n^2-1)} = [s_1 + r_1\sqrt{3(n^2-1)}]^3$, so folgt daraus:

$$q = 3r_1\,[s_1^2 + r_1^2(n^2-1)] \text{ und } p = s_1\,[s_1^2 + 9r_1^2(n^2-1)],$$

folglich:

$$np = ns_1\,[s_1^2 + 9r_1^2(n^2-1)].$$

Wird hier noch $np = 8y_1^3$, $3r_1 = r_2$ gesetzt, so erhält man in der That:

3) $$ns_1\,[s_1^2 + (n^2-1)r_2^2] = 8y_1^3.$$

Wird also etwa durch $x=\alpha$, $r=\beta$, $s=2\alpha+(n-1)\beta$, $y=\gamma$ der 1) Genüge gethan, so darf man auch $s_1 = 2\alpha + (n-1)\beta$, $r_2=\beta$, $y_1=\gamma$ setzen. Man findet daraus, mittelst der obigen Zusammenhänge, r_1, p, q, endlich z, s und folglich auch x, worauf y sich von selbst ergiebt.

Eine weitere Methode, neue Auflösungen von 1) zu finden, ist folgende. Man kenne wieder die Wurzeln $x=\alpha$, $r=\beta$, $y=\gamma$, $s=2\alpha+(n-1)\beta=\sigma$. Wird nun in 2) $r=\beta+z$, $2y=2\gamma+f.z$ eingesetzt, welche mit $s=\sigma$ eine neue Auflösung darstellen mögen, so ist nach Weglassung der Theile, welche sich gegenseitig zerstören, weil β, γ, σ Wurzelwerthe von 2) sind, und nach Division durch z:

4) $$n\sigma(n^2-1)(2\beta+z) = 12\gamma^2 f + 6\gamma f^2 z + f^3 z^2.$$

Werthe von f und z, welche diese Gleichung erfüllen, ergeben sich leicht, indem man die z nicht enthaltenden Glieder einander gleich setzt und dadurch:

$$f = \frac{n\sigma(n^2-1)\beta}{6\gamma^2},$$

ferner:

$$z = \frac{n\sigma(n^2-1) - 6\gamma f^2}{f^3}$$

erhält. Somit ist die neue Auflösung:

$$s = \sigma, \quad r = \beta + \frac{n\sigma(n^2-1) - 6\gamma f^2}{f^3}, \quad y = \gamma + \frac{n\sigma(n^2-1) - 6\gamma f^2}{2f^2},$$

während:

$$f = \frac{n\sigma(n^2-1)\beta}{6\gamma^2}.$$

Wird der Werth von f eingeführt, und $\gamma^3 = \frac{n\sigma}{8}[\sigma^2 + (n^2-1)\beta^2]$ benutzt, so folgt nach einigen Reductionen:

$$s = \sigma, \quad r = \frac{27\sigma^4 + 18\beta^2\sigma^2(n^2-1) - \beta^4(n^2-1)^2}{8\beta^3(n^2-1)^2}, \quad y = \frac{9\sigma^2\gamma + (n^2-1)\beta^2\gamma}{4\beta^2(n^2-1)},$$

und daraus wieder neue Auflösungen, indem sämmtliche Werthe mit $8\beta^3(n^2-1)^2$ vervielfacht werden, nämlich:

$$s = 8\beta^3(n^2-1)^2\sigma, \quad r = 27\sigma^4 + 18\beta^2\sigma^2(n^2-1) - \beta^4(n^2-1)^2,$$
$$y = 2\beta\gamma(n^2-1)[9\sigma^2 + (n^2-1)\beta^2].$$

Nachdem Herr Genocchi im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung den Fall $r=1$ noch näher untersucht hat, und auch bei der Gleichung:

$$x^3 + (x+r)^3 + \ldots + [x+(n-1)r]^3 = y^2$$

verweilte, schliesst er mit dem Beweise, dass den 3 Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} xy &= 2s \\ x^2 + y^2 &= z^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= s^3 \end{aligned}\right.$$

in ganzen Zahlen nur die Werthe $x=3$, $y=4$, $z=5$, $s=6$ Genüge leisten. Damit nämlich $x^2+y^2=z^2$ sei, muss man die Formen $x=m(a^2-b^2)$, $y=2mab$, $z=m(a^2+b^2)$ annehmen, in welchem m, a, b ganze Zahlen und a, b theilerfremd. Wegen $xy=2s$ ist also $s=m^2ab(a^2-b^2)$ und wegen $x^3+y^3+z^3=s^3$ endlich

$$2\left(\frac{a^4}{b^2} + 3b^2 + 4ab\right) = m^3ab(a^2-b^2)^3.$$

Also muss $\frac{a^4}{b^2}$ eine ganze Zahl, d. h. $b=1$ sein. Unter dieser Voraussetzung wird:

$$2(a^4 + 3 + 4a) = m^3a(a^2-1)^3,$$

oder:

$$2(a+1)^2(a^2-2a+3) = m^3a(a^2-1)(a+1)^2(a-1)^2,$$

folglich:

$$2(a-1)^2 + 4 = m^3a(a^2-1)(a-1)^2$$

und 4 durch $(a-1)^2$ theilbar, somit $a=3$ oder $a=2$; im ersteren Falle kann m nicht ganze Zahl sein, im zweiten ist $m=1$ und $x=3$, $y=4$, $z=5$, $s=6$.

CANTOR.

XIX. Ueber einige bestimmte Integrale. Von Dr. A. ENNEPER.

In den folgenden Entwickelungen bedeuten p, q ganze, positive Zahlen, von denen immer $q < p$, oder höchstens $q = p$ ist. Die beiden Quantitäten a, b sind reell, und zwar a wesentlich positiv. Nach den von Gauss gebrauchten Bezeichnungen ist:

$$i=\sqrt{-1}, \quad \Pi(z)=\int_0^\infty e^{-u}u^z\,\partial u, \quad \psi(z)=\frac{\partial \log \Pi(z)}{\partial z}.$$

Zur Abkürzung ist mit Cauchy gesetzt:

$$\frac{m\,(m-1)\ldots.(m-r+1)}{1\,.\,2\ldots.\quad r}=(m)_r.$$

Unter der Voraussetzung, dass v positiv ist, findet man leicht, durch partielle Integration, die beiden Reductionsgleichungen:

$$\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p}\,\partial u=\frac{2p\,(2p-1)}{(a+v-bi)^2+(2p)^2}\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p-2}\,\partial u,$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p+1}\,\partial u=\frac{(2p+1)\,2p}{(a+v-bi)^2+(2p+1)^2}\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p-1}\,\partial u,$$

und hieraus:

$$1)\quad \int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p}\,\partial u=$$
$$\frac{\Pi(2p)}{(a+v-bi)\,\{(a+v-bi)^2+2^2\}\ldots\{(a+v-bi)^2+(2p)^2\}},$$

$$2)\quad \int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p+1}\,\partial u=$$
$$\frac{\Pi(2p+1)}{\{(a+v-bi)^2+1^2\}\{(a+v-bi)^2+3^2\}\ldots\{(a+v-bi)^2+(2p+1)^2\}}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$3)\quad \begin{aligned}\varphi\,(v,b)&=(a+v-bi)\{(a+v-bi)^2+2^2\}\ldots\{(a+v-bi)^2+(2p)^2\},\\ \varphi_1(v,b)&=\{(a+v-bi)^2+1^2\}\ldots\{(a+v-bi)^2+(2p+1)^2\},\end{aligned}$$

so folgt durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$4)\quad \begin{aligned}\frac{\Pi\,(2p)\,v^{2q-1}}{\varphi\,(v,b)}&=-\frac{(2p)_p}{2^{2p}}\frac{(a-bi)^{2q-1}}{a+v-bi}\\ &+\frac{1}{2^{2p}}\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^{r-1}(2p)_{p-r}\left\{\frac{[a+(2r-b)\,i]^{2q-1}}{v+a+(2r-b)i}+\frac{[a-(2r+b)\,i]^{2q-1}}{v+a-(2r+b)\,i}\right\},\end{aligned}$$

$$i\,\frac{\Pi(2p+1)\,v^{2q}}{\varphi_1(v,b)} =$$

5) $$\frac{1}{2^{2p+1}}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r(2p+1)_{p-r}\left\{\frac{[a-(2r+1+b)i]^{2q}}{v+a-(2r+1+b)i}-\frac{[a+(2r+1-b)i]^{2q}}{v+a+(2r+1-b)i}\right\}.$$

Durch Vertauschung von b mit $-b$ erhält man hieraus unmittelbar die Zerlegungen von:

$$\frac{\Pi(2p)\,v^{2q-1}}{\varphi\,(v,-b)},\quad \frac{i\,\Pi(2p+1)\,v^{2q}}{\varphi_1(v,-b)},$$

in Partialbrüche. In dem Integral:

$$\int_0^\infty e^{-u(a-bi)}\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial n,$$

setze man:

$$\frac{1}{u^{2q+2z-1}} = \frac{1}{\Pi(2q+2z-2)}\int_0^\infty e^{-uv}\,v^{2z+2q-2}\,\partial v.$$

Hierdurch ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\Pi(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-(a-bi)u}\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u =$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}\,(\sin u)^{2p}\,v^{2q+2z-2}\,\partial u\,\partial v.$$

Integrirt man rechts zuerst nach u, so folgt wegen der Gleichungen 1) und 3):

$$\Pi\,(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-(a-bi)u}\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u = \Pi(2p)\int_0^\infty \frac{v^{2q+2z-2}}{\varphi(v,b)}\,\partial v.$$

Setzt man hierin $-b$ statt b, so folgt durch Addition und Subtraction:

$$\Pi\,(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u =$$

$$\tfrac{1}{2}\,\Pi(2p)\int_0^\infty\left\{\frac{v^{2q-1}}{\varphi\,(v,\,b)}+\frac{v^{2q-1}}{\varphi\,(v,-b)}\right\}v^{2z-1}\,\partial v,$$

6)

$$\Pi\,(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u =$$

$$\frac{1}{2i}\,\Pi(2p)\int_0^\infty\left\{\frac{v^{2q-1}}{\varphi\,(v,\,b)}-\frac{v^{2q-1}}{\varphi\,(v,-b)}\right\}v^{2z-1}\,\partial v.$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man aus:

$$\Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty e^{-(a-bi)u}\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\partial u =$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(a+v-bi)u}(\sin u)^{2p+1}v^{2q+2z-1}\partial u\,\partial v$$

mittelst der Gleichungen 2) und 3):

$$7)\quad \begin{cases} \Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\partial u = \\ \frac{1}{2}\Pi(2p+1)\int_0^\infty\left\{\frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,b)}+\frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,-b)}\right\}v^{2z-1}\partial v, \\ \Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\partial u = \\ \frac{1}{2i}\Pi(2p+1)\int_0^\infty\left\{\frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,b)}-\frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,-b)}\right\}v^{2z-1}\partial v. \end{cases}$$

Zerlegt man in den Gleichungen 6) und 7):

$$\frac{v^{2q-1}}{\varphi(v,b)},\quad \frac{v^{2q-1}}{\varphi(v,-b)},\quad \frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,b)},\quad \frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,-b)},$$

nach 4) und 5) in Partialbrüche, so gehen die rechten Seiten der bemerkten Gleichungen in Summen von Integralen über, welche sämmtlich in der folgenden Form enthalten sind:

$$\int_0^\infty\frac{v^{2z-1}}{v+\alpha+\beta i}\partial v = \frac{\pi}{\sin 2\pi z}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2z-1}{2}}e^{i(2z-1)\operatorname{arctang}\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Führt man in 6) und 7) die Integrationen rechts auf die angegebene Weise aus, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$8)\quad 2^{2p}\Pi(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\partial u =$$

$$-\frac{\pi}{\sin 2\pi z}(2p)_p(a^2+b^2)^{q+z-1}\cos(2q+2z-2)\operatorname{arctang}\frac{b}{a}$$

$$+\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^{r-1}(2p)_{p-r}\Big[\{a^2+(2r-b)^2\}^{q+z-1}\cos(2q+2z-2)\operatorname{arctang}\frac{2r-b}{a}$$

$$+\{a^2+(2r+b)^2\}^{q+z-1}\cos(2q+2z-2)\operatorname{artctang}\frac{2r+b}{a}\Big].$$

$$9) \qquad 2^{2p+1}\Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\,\partial u$$

$$=\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^{r+1}(2p+1)_{p-r}\Big[\{a^2+(2r+1-b)^2\}^{q+z-\frac{1}{2}}\sin(2q+2z-1)\,arctang\,\frac{2r+1-b}{a}$$

$$+\{a^2+(2r+1+b)^2\}^{q+z-\frac{1}{2}}.\sin(2q+2z-1)\,arctang\,\frac{2r+1+b}{a}\Big].$$

$$10) \qquad 2^{2p}\Pi(2q+2z-2)\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin 2\pi z}(2p)_p(a^2+b^2)^{q+z-1}\sin(2q+2z-2)\,arctang\,\frac{b}{a}$$

$$+\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^{r-1}(2p)_{p-r}\Big[\{a^2+(2r-b)^2\}^{q+z-1}\sin(2q+2z-2)\,arctang\,\frac{2r-b}{a}$$

$$-\{a^2+(2r+b)^2\}^{q+z-1}\sin(2q+2z-2)\,arctang\,\frac{2r+b}{a}\Big].$$

$$11) \qquad 2^{2p+1}\Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r(2p+1)_{p-r}\Big[\{a^2+(2r+1-b)^2\}^{q+z-\frac{1}{2}}\cos(2q+2z-1)\,arctang\,\frac{2r+1-b}{a}$$

$$-\{a^2+(2r+1+b)^2\}^{q+z-\frac{1}{2}}\cos(2q+2z-1)\,arctang\,\frac{2r+1+b}{a}\Big].$$

In den vorstehenden Gleichungen ist $0<z<\frac{1}{2}$, es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichungen auch noch für $z=0$ gelten, durch Entwickelung nach Potenzen von z, die sich ergebenden Gleichungen sind indessen sehr complicirt.

Für $a=0$ gehen die Gleichungen 8) bis 11) in folgende über:

$$12) \qquad (-1)^q 2^{2p+1}\Pi(2q+2z-2)\int_0^\infty \cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}(2p)_p b^{2q+2z-2}$$

$$+\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r(2p)_{p-r}\{(2r+b)^{2q+2z-2}+(2r-b)^{2q+2z-2}\}.$$

$$13) \qquad (-1)^q 2^{2p+2}\Pi(2q+2z-1)\int_0^\infty \cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r(2p+1)_{p-r}\{(2r+1+b)^{2q+2z-1}+(2r+1-b)^{2q+2z-1}\}.$$

$$14)\qquad (-1)^{q-1}\Pi(2q+2z-2).2^{2p+1}\int_0^\infty \sin bu \frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q+2z-1}}\partial u =$$

$$\frac{\pi}{\cos\pi z}(2p)_p\, b^{2q+2z-2}$$

$$+\frac{\pi}{\cos\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r(2p)_{p-r}\{(2r+b)^{2q+2z-2}-(2r-b)^{2q+2z-2}\}.$$

$$15)\qquad (-1)^{q-1}\Pi(2q+2z-1)\,2^{2p+2}\int_0^\infty \sin bu\frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+2z}}\partial u =$$

$$\frac{\pi}{\cos\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(-1)^r(2p+1)_{p-r}\{(2r+1+b)^{2q+2z-1}-(2r+1-b)^{2q+2z-1}\}.$$

Es ist bemerkenswerth, dass z in diesen Gleichungen einen grösseren Spielraum hat, wie in den Gleichungen 8) bis 11), und zwar ist in 12), 13) $0<z<1$; in 14), 15) $-\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$. Setzt man in 4) und 5) $a=0$, so enthalten:

$$\frac{v^{2q-1}}{\varphi(v,b)}\pm\frac{v^{2q-1}}{\varphi(v,-b)},\qquad \frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,b)}\pm\frac{v^{2q}}{\varphi_1(v,-b)},$$

durch passende Reduction nur Terme von der Form:

$$\frac{v}{v^2+\alpha^2},\qquad \frac{1}{v^2+\alpha^2}.$$

Die Integrale auf den rechten Seiten der Gleichungen 6) und 7) sind dann sämmtlich in den folgenden enthalten:

$$\int_0^\infty \frac{v^{2z}}{v^2+\alpha^2}\partial v=\frac{\pi\,\alpha^{2z-1}}{\cos\pi z},\quad -\tfrac{1}{2}<z<\tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{v^{2z-1}}{v^2+\alpha^2}\partial v=\frac{\pi\,\alpha^{2z-3}}{\sin\pi z},\quad 0<z<1.$$

In den Gleichungen 12), 13) ist $p\geqq q$ für $0<z<\frac{1}{2}$; $p\geqq q+1$ für $\frac{1}{2}<z<1$. In den Gleichungen 14), 15) ist $p\geq q$. Die Quantität b wird positiv angenommen, und zwar $0\leqq b\leqq 2$ in den Gleichungen 12), 14), $0\leqq b\leqq 1$ in den Gleichungen 13), 15).

Aus:

$$(2\sin\varphi)^{2p}=2\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r(2p)_{p-1}\cos 2r\varphi+(2p)_p$$

folgt:

$$\cos b\varphi(2\sin\varphi)^{2p}=(2p)_p\cos b\varphi+\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r(2p)_{p-r}\{\cos(2r+b)\varphi+\cos(2r-b)\varphi\},$$

$$\sin b\varphi(2\sin\varphi)^{2p}=(2p)_p\sin b\varphi+\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r(2p)_{p-r}\{\sin(2r+b)\varphi-\sin(2r-b)\varphi\}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen differentiire man $2q-2$mal, die

zweite $2q-1$ mal nach φ, ist $q \leqq p$, so verschwinden die beiden Differentialquotienten mit φ, hieraus folgt:

$$16)\quad \begin{aligned} 0 &= (2p)_p b^{2q-2} + \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} \{(2r+b)^{2q-2} + (2r-b)^{2q-2}\}, \\ 0 &= (2p)_p b^{2q-1} + \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} \{(2r+b)^{2q-1} - (2r-b)^{2q-1}\}. \end{aligned}$$

Von den beiden Gleichungen:

$$\cos b\varphi (2\sin\varphi)^{2p+1} = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{\sin(2r+1+b)\varphi + \sin(2r+1-b)\varphi\},$$

$$\sin b\varphi (2\sin\varphi)^{2p+1} = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{\cos(2r+1-b)\varphi - \cos(2r+1+b)\varphi\},$$

differentire man die erste $2q-1$ mal, die zweite $2q$ mal nach φ und setze nach der Differentiation $\varphi = 0$, dann folgt:

$$16)\quad \begin{aligned} 0 &= \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{(2r+1+b)^{2q-1} + (2r+1-b)^{2q-1}\}, \\ 0 &= \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{(2r+1+b)^{2q} - (2r+1-b)^{2q}\}. \end{aligned}$$

Die beiden Seiten der Gleichungen 12), 13) kann man nach Potenzen von z entwickeln und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen mit einander vergleichen. Den von z unabhängigen Term findet man leicht, indem man $z=0$ setzt. Die linken Seiten der bemerkten Gleichungen nehmen dann nach 16) die Form $\frac{0}{0}$ an, nach bekannten Methoden erhält man leicht ihre wahren Werthe. Führt man die analoge Rechnung für die Gleichung 14), 15) für $z=\frac{1}{2}$ durch, so erhält man die folgenden vier Gleichungen:

$$(-1)^q 2^{2p} \Pi(2q-2) \int_0^\infty \cos bu \frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q-1}} \partial u = (2p)_p b^{2q-2} \log b +$$
$$\sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} \{(2r+b)^{2q-2} \log(2r+b) + (2r-b)^{2q-2}.\log(2r-b)\}.$$

$$(-1)^q 2^{2p+1} \Pi(2q-1) \int_0^\infty \cos bu \frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q}} \partial u =$$
$$\sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{(2r+1+b)^{2q-1} \log(2r+1+b) + (2r+1-b)^{2q-1} \log(2r+1-b)\}.$$

$$(-1)^q 2^{2p} \Pi(2q-1) \int_0^\infty \sin bu \frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q}} \partial u = (2p)_p b^{2q-1} \log b +$$
$$\sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} \{(2r+b)^{2q-1} \log(2r+b) - (2r-b)^{2q-1} \log(2r-b)\}.$$

$$(-1)^q 2^{2p+1} \Pi(2q) \int_0^\infty \sin bu \frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+1}} \partial u =$$

$$\sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} \{(2r+1+b)^{2q} \log(2r+1+b) - (2r+1-b)^{2q} \log(2r+1-b)\}.$$

Ein ähnliches System von Gleichungen wie das vorstehende erhält man auf folgende Weise. Die Gleichungen 12), 13) differentiire man nach z, setze nach der Differentiation $z=\frac{1}{2}$, die Gleichungen 14), 15) differentiire man nach z und setze dann $z=0$. Hieraus folgt:

$$(-1)^{q-1} 2^{2p+1} \Pi(2q-1) \int_0^\infty \cos bu . \frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q}} \log u . \partial u =$$

$$\pi (2p)_p b^{2q-1} \{\log b - \psi(2q-1)\}$$

$$+ \pi \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} (2r+b)^{2q-1} \{\log(2r+b) - \psi(2q-1)\}$$

$$+ \pi \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} (2r-b)^{2q-1} \{\log(2r-b) - \psi(2q-1)\}.$$

$$(-1)^{q-1} 2^{2p+1} \Pi(2q) \int_0^\infty \cos bu \frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q+1}} \log u \, \partial u =$$

$$\pi \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} (2r+1+b)^{2q} \{\log(2r+1+b) - \psi(2q)\}$$

$$+ \pi \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} (2r+1-b)^{2q} \{\log(2r+1-b) - \psi(2q)\}.$$

$$(-1)^q 2^{2p+1} \Pi(2q-2) \int_0^\infty \sin bu \frac{(\sin u)^{2p}}{u^{2q-1}} \log u \, \partial u =$$

$$\pi (2p)_p b^{2q-2} \{\log b - \psi(2q-2)\}$$

$$+ \pi \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} (2r+b)^{2q-2} \{\log(2r+b) - \psi(2q-2)\}$$

$$- \pi \sum_{r=1}^{r=p} (-1)^r (2p)_{p-r} (2r-b)^{2q-2} \{\log(2r-b) - \psi(2q-2)\}.$$

$$(-1)^q 2^{2p+2} \Pi(2q-1) \int_0^\infty \sin bu \frac{(\sin u)^{2p+1}}{u^{2q}} \log u \, \partial u =$$

$$\pi \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-r} (2r+1+b)^{2q-1} \{\log(2r+1+b) - \psi(2q-1)\}$$

$$- \pi \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r (2p+1)_{p-p} (2r+1-b)^{2q-1} \{\log(2r+1-b) - \psi(2q-1)\}.$$

In der Gleichung 12) nehme man $q=1$, $z=\frac{1}{2}$; setzt man zur Abkürzung:

$$\sum_{r=1}^{r=p}(-1)^r\,(2p)_{p-r}\,.\,r=P,$$

so geht die bemerkte Gleichung über in:

$$2^{2p+1}\int_0^\infty \cos bu\,\frac{(\sin u)^{2p}}{u^2}\,\partial u=\pi[4P-(2p)_p\,b].$$

Setzt man in der vorstehenden Gleichung successive $b=0$,

$$\frac{2a}{2n},\ \frac{4a}{2n},\ \ldots\ \frac{2n-2}{2n}a;\ \text{ferner } b=\frac{a}{2n},\ \frac{3a}{2n},\ \ldots\ \frac{2n-1}{2n}a;$$

bildet die Summen und substituirt in den so erhaltenen Integralen u statt $\frac{u}{2n}$, so folgt:

$$2^{2p}\int_0^\infty \frac{\sin(2n-1)\,au}{\sin au}\,\frac{(\sin 2nu)^{2p}}{u^2}\,\partial u=2\pi n\left\{2(2n-1)P-(2p)_p\,\frac{n-1}{2}a\right\},$$

$$2^{2p}\int_0^\infty \frac{\sin 2nau}{\sin au}\,.\,\frac{(\sin 2nu)^{2p}}{u^2}\,\partial u=2\pi n\left\{4nP-(2p)_p\,\frac{n}{2}a\right\}.$$

Durch Subtraction erhält man hieraus:

$$2^{2p-2}\int_0^\infty \frac{\cos(4n-1)\,au}{\cos au}\,\frac{(\sin 4nu)^{2p}}{u^2}\,\partial u=\pi n[2P+\tfrac{1}{2}(2p)_p\,a].$$

Mittelst der Gleichungen 8) bis 11) lassen sich die Integrale von der Form:

$$\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p+\varepsilon}}{u^{1+2z}}\,\partial u,\quad \int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p+\varepsilon}}{u^{2+2z}}\,\partial u,$$

entwickeln, wo $\varepsilon=0$ oder $\varepsilon=1$ ist. Da dieses Verfahren indessen ziemlich umständlich ist, so wird es besser sein, die bemerkten Integrale direct abzuleiten. Ersetzt man in:

$$\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{1+2z}}\,\partial u$$

$\frac{1}{u^{1+2z}}$, $1-(\cos u)^{2p}$ respective durch:

$$\frac{1}{\Pi(2z)}\int_0^\infty e^{-uv}\,v^{2z}\,\partial v,\ \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\,(1-\cos 2ru),$$

so folgt:

$$2^{2p}\,\Pi(2z)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{1+2z}}\,\partial u=$$

$$2\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-u(a+v)}\,v^{2z}\cos bu\,(1-\cos 2ru)\,\partial u\,\partial v.$$

Integrirt man rechts zuerst nach u, so geht der Ausdruck auf der rechten Seite über in:

$$\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\int_0^\infty v^{2z}\left\{2\frac{a+v}{(a+v)^2+b^2}-\frac{a+v}{(a+v)^2+(2r-b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{a+v}{(a+v)^2+(2r+b)^2}\right\}\partial v=$$

$$\Sigma(2p)_{p-r}\int_0^\infty v^{2z-1}\left\{-\frac{a-bi}{v+a-bi}-\frac{a+bi}{v+a+bi}+\frac{1}{2}\frac{a-(2r-b)i}{v+a-(2r-b)i}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{a+(2r-b)i}{v+a+(2r+b)i}+\frac{1}{2}\frac{a-(2r+b)i}{v+a-(2r+b)i}+\frac{1}{2}\frac{a+(2r+b)i}{v+a+(2r+b)i}\right\}\partial v.$$

Führt man hierin die Integration nach v aus, so erhält man folgende Gleichung:

$$2^{2p}\,\Pi(2z)\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{1+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\left\{-2(a^2+b^2)^z\cos 2z\,\mathrm{arctang}\,\frac{b}{a}\right.$$

$$\left.+[a^2+(2r-b)^2]^z\cos 2z\,\mathrm{arctang}\,\frac{2r-b}{a}+[a^2+(2r+b)^2]^z\cos 2z\,\mathrm{arctang}\,\frac{2r+b}{a}\right\}.$$

Für $a=0$ geht diese Gleichung über in:

17) $$2^{2p+1}\,\Pi(2z)\int_0^\infty \cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{1+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\{-2b^{2z}+(2r-b)^{2z}+(2r+b)^{2z}\},$$

wo $0<1<z$, $b<1$. Analog findet man mittelst der Gleichung:

$$2^{2p}\{1-(\cos u)^{2p+1}\}=\sum_{r=0}^{r=p}(2p+1)_{p-r}[1-\cos(2r+1)u],$$

18) $$2^{2p+2}\,\Pi(2z)\int_0^\infty \cos bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p+1}}{u^{1+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(2p+1)_{p-r}\{-2b^{2z}+(2r+1-b)^{2z}+(2r+1+b)^{2z}\}.$$

Man findet ohne Schwierigkeit die folgende Gleichung;

$$\Pi(2z+1)\,2^{2p}\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{2+2z}}\,\partial u=$$

$$2\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-u(a+v)}\sin bu.v^{2z+1}(1-\cos 2ru)\,\partial u\,\partial v$$

$$=\Sigma(2p)_{p-r}\int_0^\infty v^{1+2z}\left\{\frac{2b}{(a+v)^2+b^2}+\frac{2r-b}{a^2+(2r-b)^2}-\frac{2r+b}{v^2+(2r+b)^2}\right\}\partial v$$

$$=\frac{1}{i}\,\Sigma(2p)_{p-r}\int_0^\infty v^{2z-1}\left\{\frac{(a-bi)^2}{v+a-bi}-\frac{(a+bi)^2}{v+a+bi}+\tfrac{1}{2}\,\frac{[a-(2r-b)i]^2}{v+a-(2r-b)i}\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\,\frac{[a+(2r-b)i]^2}{v+a+(2r-b)i}-\tfrac{1}{2}\,\frac{[a-(2r+b)i]^2}{v+a-(2r+b)i}+\tfrac{1}{2}\,\frac{[a+(2r+b)i]^2}{v+a+(2r+b)i}\right\}.$$

Durch Integration nach v erhält man folgende Gleichung:

$$2^{2p}\,\Pi(2z+1)\int_0^\infty\sin bu\,.\,e^{-au}\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{2+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin 2\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\left\{-2(a^2+b^2)^{\frac{2z+1}{2}}\sin(2z+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{b}{a}\right.$$

$$-[a^2+(2r-b)^2]^{\frac{2z+1}{2}}\sin(2z+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{2r-b}{a}$$

$$\left.+[a^2+(2r+b)^2]^{\frac{2z+1}{2}}\sin(2z+1)\,\mathrm{arctang}\,\frac{2r+b}{a}\right\}.$$

Für $a=0$ erhält man die einfachere Gleichung:

19) $$2^{2p+1}\,\Pi(2z+1)\int_0^\infty\sin bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^{2+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r}\{-2b^{2z+1}-(2r-b)^{2z+1}+(2r+b)^{2z+1}\}.$$

Auf ganz analoge Weise folgt:

20) $$2^{2p+2}.\,\Pi(2z+1)\int_0^\infty\sin bu\,\frac{1-(\cos u)^{2p+1}}{u^{2+2z}}\,\partial u=$$

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}\sum_{r=0}^{r=p}(2p+1)_{p-r}\{-2b^{2z+1}-(2r+1-b)^{2z+1}+(2r+1+b)^{2z+1}\}.$$

Für den besondern Fall $z=\frac{1}{2}$ lassen sich die Summationen auf den rechten Seiten der Gleichungen 17) bis 20) ausführen. Mit Hilfe von:

$$2^{2p}-(2p)_p=2\sum_{r=1}^{r=p}(2p)_{p-r},\qquad 2^{2p+1}=2\sum_{r=0}^{r=p}(2p+1)_{p-r},$$

findet man leicht:

$$\sum_{r=1}^{r=p}2r(2p)_{p-r}=(2p)_p.p,\qquad \sum_{r=0}^{r=p}(2r+1)(2p+1)_{p-r}=(2p+1)(2p)_p.$$

Setzt man in 17) bis 20) $s=\frac{1}{2}$, so folgt mittelst der vorstehenden Gleichungen:

$$2^{2p+1}\int_0^\infty \cos bu\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^2}\partial u=-\pi b\{2^{2p}-(2p)_p\}+2p\pi.(2p)_p.$$

$$2^{2p+2}\int_0^\infty \cos bu\frac{1-(\cos u)^{2p+1}}{u^2}\partial u=-\pi b.2^{2p+1}+2(2p+1)\pi(2p)_p,$$

$$2^{2p+2}\int_0^\infty \sin bu\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^3}\partial u=-\pi b^2\{2^{2p}-(2p)_p\}+4p\pi b.(2p)_p,$$

$$2^{2p+3}\int_0^\infty \sin bu\frac{1-(\cos u)^{2p+1}}{u^3}\partial u=-\pi b^2 2^{2p+1}+4(2p+1)b\pi.(2p)_p.$$

Für den besondern Fall $b=0$, geben die beiden ersten Gleichungen:

$$\frac{1}{2p}\int_0^\infty\frac{1-(\cos u)^{2p}}{u^2}\partial u=\frac{1}{2p+1}\int_0^\infty\frac{1-(\cos u)^{2p+1}}{u^2}\partial u=\frac{\pi(2p)_p}{2^{2p+1}},$$

eine Relation, welche Herr Stefan in dieser Zeitschrift in etwas anderer Form aufgestellt hat (t. VII, p. 256).

XX. Ueber einen neuen Fallapparat, von F. Lippich, Professor am Joanneum in Graz.

Um die Fallgesetze an einem vollkommen frei fallenden Körper mit hinreichender Genauigkeit und unter Benutzung sehr mässiger Fallhöhen durch einen einzigen Versuch demonstriren zu können, wurde ein Princip zur Construction des Apparates in Anwendung gebracht, welches, wie es sich später zeigte, im Wesentlichen schon von Laborde zu einem ähnlichen Zwecke benutzt wurde, in der gegenwärtigen Form jedoch eine grössere Genauigkeit und allgemeinere Anwendbarkeit gewährt.

Ein elastischer Stab, vertical aufgestellt, trägt senkrecht zur Schwingungsebene einen Arm, an welchem ein feiner Schreibstift befestigt ist. Vor diesem Stab befindet sich zweckmässig aufgehängt eine mit berusstem Papier bespannte Schiene so, dass sie den Schreibstift mit ihrem unteren Ende leise berührt und ihre Ebene der Schwingungsebene parallel steht. Während der Stab schwingt, wird die Schiene im geeigneten Momente, etwa dann, wenn der Stab die Gleichgewichtslage passirt, frei fallen gelassen, und es zeichnet der Schreibstift in der Russschichte sofort eine wellenförmige Curve, aus der auf leicht ersichtliche Weise die Fallgesetze entnommen werden können.

Bei einem ausgeführten Apparate betrug die Länge der Schiene und somit die ganze Fallhöhe etwa 1 Fuss, die Schwingungsdauer des Stabes

wurde so regulirt, dass etwas mehr als 6 Schwingungen auf die ganze Länge der Schiene gingen. Das Gesetz, nach welchem die Wege mit den Zeiten wachsen, konnte aus erhaltenen Curven mit einer durch andere Apparate nicht erreichten Genauigkeit ersichtlich gemacht werden. Aus drei Curven wurde im Mittel die Acceleration für Prag 9,8075 Meter gefunden, während der nach der üblichen Formel berechnete Werth 9,801 ergiebt. Die Messungen der Weglängen waren hierbei, den zu Gebote stehenden Hilfsmitteln entsprechend, keineswegs so genau, als sie es bezüglich der Zeichnung der Curve hätten sein können.

Mit dem construirten Apparate wurde es auch versucht, den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Bewegung ersichtlich zu machen, wofür das angewendete Princip besonders geeignet scheint, weil es auch über den Vorgang beim Beginne der Bewegung Aufschluss zu geben vermag. Bei einer Widerstandsfläche von 808□cm. (Gewicht des Körpers 133,1 Grm.) zeigte sich die unerwartete Erscheinung, dass während der ersten zwei Schwingungen des Stabes die Schiene sich schneller bewegte, als wenn die Widerstandsfläche fortgelassen wurde, so dass die Lufttheilchen beschleunigend beim Beginne der Bewegung einzuwirken scheinen. Da die zwei Curven, die hierbei erhalten werden konnten, vollkommen mit einander übereinstimmten, so dürfte es schwer sein, diese Erscheinung einem zufälligen, durch die Construction des Apparates bedingten störenden Einfluss zuzuschreiben.

(Wiener Akad.)

XXI. Ueber das Modell eines Elektromotors, von Dr. H. Milliszer, Inspector der k. k. Staatstelegraphen, und den durch diesen Apparat zu erreichenden Zweck.

Der Cavaliere Bonelli wollte im vergangenen Jahre ponderable Sendungen durch Elektricität von einem Orte zum andern befördern, indem er diese Orte durch ein in seiner ganzen Länge mit elektrischen Multiplicatoren versehenes und in Sectionen getheiltes cylindrisches Rohr verband. In der Axe dieses Rohres sollte eine bewegliche Drahtspirale von kleinerem Durchmesser durch die elektrodynamische Anziehung fortbewegt werden, welche die sectionsweise elektrisch gemachte Röhre auf die von demselben Strome durchflossenen parallelen Windungen der beweglichen Spirale ausübte.

In dem vorgezeigten Modelle wird derselbe Zweck mit grösserer Sicherheit und durch einfachere Mittel erreicht. Zwölf kleine Hufeisen Elektromagnete sind senkrecht auf den Armen eines zwölfstrahligen Sternes so befestigt, dass die Linien ihrer Pole in der Richtung der Radien liegen; die Richtung der Polflächen sind alternirend nach den beiden Seiten der gemeinschaftlichen Basis gewendet. Das ganze System wird durch eine frei

durch seine Mitte gehende Axe und durch ein kleines als Führung dienendes Rad getragen; die Ebene des als Basis der Elektromagnete dienenden Sternes steht auf dem Horizonte senkrecht und bleibt stets sich selbst parallel. Die ebenerwähnte Axe befindet sich an ihren beiden Enden in fester Verbindung mit zwei Triebrädern, deren Speichen durch die Anker der Elektromagnete gebildet werden. Sobald die eine Hälfte der letztern elektrisch erregt wird, erleiden die zugehörigen Anker eine laterale Anziehung und die Triebräder werden sammt ihrer gemeinschaftlichen Axe so weit gedreht, bis die Anker ihren Polflächen gegenüberstehen; das ganze System bewegt sich also auf den als Träger vorhandenen Metallschienen um eine entsprechende Strecke vorwärts. Durch einen an der Triebaxe angebrachten Commutator wird nun der galvanische Strom in den ersten sechs Elektromagneten unterbrochen, dagegen in den zweiten sechs hergestellt, wodurch eine abermalige Fortbewegung des Apparates in derselben Richtung durch eine der vorigen gleiche Wegstrecke hervorgerufen wird, u. s. w.

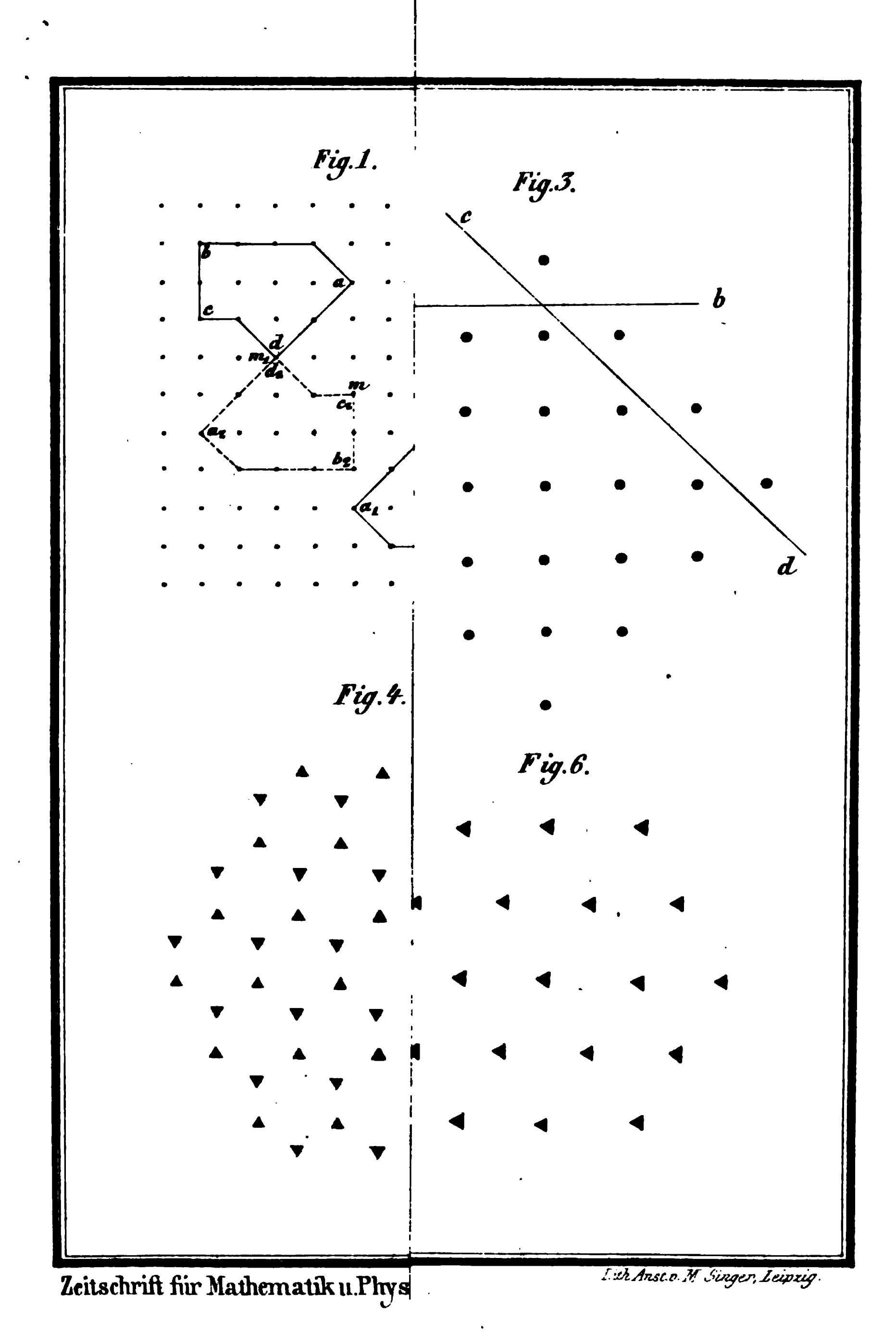
Die erforderliche Elektricität wird von einer galvanischen Batterie geliefert, deren Pole mit den beiden Laufschienen in Verbindung stehen. Durch entsprechende Isolirung der einzelnen Bestandtheile des Apparates ist Sorge getragen, dass der Elektricitätsübergang von einem Schienenstrange zum andern immer nur durch je eine Serie der zu den Elektromagneten gehörigen Multiplicatoren gelangen kann. (Wiener Akad.)

XXII. Ueber einen Interferenzversuch mit dem Quarzprisma, von Dr. Ditscheiner.

Bei einem einfach brechenden Prisma treten bekanntlich, nach ein oder dreimaliger Reflexion im Innern des Prismas, alle Strahlen, welche auf das Prisma fielen, welche Brechungsquotienten sie auch haben mögen, wieder unter sich parallel und symmetrisch zu den einfallenden Strahlen, bezüglich der den brechenden Winkel halbirenden Linie aus, sobald die Winkel an der der brechenden Kante gegenüber liegenden Seite gleich sind. Nimmt man aber statt einem einfach brechenden Prisma ein doppelt brechendes, etwa ein zur optischen Axe parallel geschnittenes Quarzprisma, so werden nach den bezeichneten Reflexionen die ordentlichen und die ausserordentlichen Strahlen parallel austreten; da sie ferner im Innern des Prismas verschiedene Wege zurückgelegt haben und senkrecht zu einander polarisirt sind, werden sie sich im Allgemeinen zu elliptisch polarisirten Strahlen zusammensetzen, die sich in geradlinig polarisirte verwandeln, sobald der Gangunterschied der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen gleicher Farbe eine ganze Anzahl von ganzen oder eine ungerade Anzahl von halben Wellenlängen beträgt, vorausgesetzt dass geradlinig polarisirtes Licht, des-

sen Schwingungsrichtung gegen die Prismenkante geneigt ist, auf das Prisma fällt. Lässt man also weisses Licht, das unter 45° gegen die Collimatorspalte geneigt ist, nach dem Austritte aus dem Collimator auf ein geeignetes Quarzprisma fallen, zerlegt man ferner das aus dem Quarzprisma nach den angeführten Reflexionen wieder austretende weisse Licht durch ein Flintglasprisma, und betrachtet man das entstehende Spectrum durch ein Fernrohr, an dessen Ocular ein Analyseur angebracht ist, so zeigt sich dieses von zahlreichen Interferenzstreifen durchzogen, sobald die Schwingungsrichtung des Polariseurs und jene des Analyseurs parallel oder gekreuzt sind. Bei einem Quarzprisma, dessen drei Winkel nahezu 60° sind und dessen Seite 20^{mm} ist, waren nach einmaliger Reflexion zwischen den Fraunhofer'schen Linien *B* und *F* 104, nach dreimaliger Reflexion aber 192 solcher Interferenzstreifen zu beobachten. Im letzteren Falle war das Quarzprisma so gestellt, dass die aus ihm austretenden weissen Strahlen den einfallenden parallel waren, was immer dann der Fall ist, wenn die die brechende Kante halbirende Linie senkrecht auf der Collimatoraxe steht.

(Wiener Akad.)



Lith Anst. v. M. Singer, Leipzig.

XII.

Ueber Hamilton's partielle Differentialgleichung,

mit besonderer Rücksicht auf die Probleme der relativen Bewegung,

von

Dr. Carl Neumann,
ordentlicher Professor an der Universität Tübingen.

Das Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu ermitteln, mögen dieselben nun frei beweglich sein, oder mag ihre Beweglichkeit gegebenen Beschränkungen unterliegen, lässt sich bekanntlich immer, falls nur die einwirkenden Kräfte ein Potential besitzen, auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückführen. Bedeuten nämlich $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ die independenten Variablen, welche an Stelle der, im Allgemeinen durch gegebene Bedingungen mit einander verbundenen, rechtwinkligen Coordinaten des Punktsystems eingeführt sind, so ist das mechanische Problem gelöst, sobald man diese q_i als Functionen der Zeit t der Art bestimmt hat, das dass Integral

$$\int (T + V)\, dt$$

ein Maximum oder Minimum wird. Es bedeutet hier T die halbe lebendige Kraft des Systems und V das Potential*) der einwirkenden Kräfte.

Ich werde nun im vorliegenden Aufsatze die partielle Differen-

---

*) Da das Wort „Potential" nicht immer in ganz gleichem Sinne gebraucht wird, so sei bemerkt, dass ich, wenn m die Masse eines Punktes (x, y, z) vorstellt, unter dem Potential der auf diesen Punkt einwirkenden Kraft diejenige Function V verstehe, vermittelst deren sich die Differentialgleichungen des Punktes in folgender Weise darstellen lassen: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = + \frac{\partial V}{\partial x}$, etc.

tialgleichung, auf deren Lösung die Ermittelung der q_i recurrirt, vollständig aufstellen, und zwar

in §. 2 für den Fall, dass die Beschränkungen, denen die Beweglichkeit des Punktsystems unterworfen ist, unabhängig von der Zeit sind;

in §. 3 für den Fall, dass die eben genannten Beschränkungen gegebene Functionen der Zeit sind;

ferner in §. 4 für den Fall, dass die relative Bewegung eines einzelnen frei beweglichen Punktes in Bezug auf ein in vorgeschriebener Bewegung begriffenes Axensystem ermittelt werden soll,

und endlich in §. 5 auch dann, wenn es sich nicht, wie im vorhergehenden Falle, um die relative Bewegung eines einzelnen, frei beweglichen Punktes, sondern um die relative Bewegung eines Punktsystems handelt, mag nun die Beweglichkeit desselben frei, oder mag sie gegebenen Beschränkungen unterworfen sein.

Als Fundament meiner Untersuchung dient das in §. 1 mitgetheilte, durch die Vorlesungen von Richelot mir bekannt gewordene Theorem I, sowie das allgemein bekannte, in demselben Paragraphen angegebene Theorem II.

§. 1.

I. Theorem. „Versteht man unter $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ unbekannte Func- „tionen von t, und unter L irgend welchen gegebenen, aus t, aus den q_k „und den $\frac{dq_k}{dt}$ zusammengesetzten Ausdruck, so sind die aus der Bedingung

$$1) \qquad \delta.\int L\,dt = 0$$

„fliessenden Differentialgleichungen:

$$2) \qquad \frac{dq_k}{dt} = q'_k, \quad \frac{d.}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

„immer der Reduction auf die Hamilton-Jacobi'sche Form fähig."

„Setzt man nämlich:

$$2a) \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1}q'_1 + \frac{\partial L}{\partial q'_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}q'_\alpha\right) - L = H$$

„und bezeichnet man mit $H(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, p_1, p_2 \ldots p_\alpha)$ denjenigen Aus- „druck, in welchen sich H verwandelt, sobald man darin an Stelle der q'_k „die mit diesen durch die Relationen

$$\frac{\partial L}{\partial q'_1} = p_1, \frac{\partial L}{\partial q'_2} = p_2 \ldots \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = p_\alpha$$

„verbundenen neuen Variablen p_k einführt; ferner mit $\frac{DH}{Dq_k}, \frac{DH}{Dp_k}$ die die- „sem Ausdruck $H(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, p_1, p_2 \ldots p_\alpha)$ zugehörigen partiellen Differential-

„coefficienten: so nehmen die Differentialgleichungen 2) durch Einführung
„der p_k an Stelle der q'_k folgende Form an:

$$3) \qquad \frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{DH}{Dq_k}."$$

II. Theorem. „Die Integration der Gleichungen 3) lässt sich redu-
„ciren auf die vollständige Auflösung einer gewissen partiellen Differential-
„gleichung. Bezeichnet man mit Φ eine unbekannte von $t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ abhän-
„gende Function, ferner mit $H\left(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}\right)$ oder
„kürzer mit $\overline{H}$ denjenigen Ausdruck, in welchen sich das in 3) enthaltene
„$H = H(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, p_1, p_2 \ldots p_\alpha)$ verwandelt, sobald man darin an
„Stelle der Argumente $p_1, p_2 \ldots p_\alpha$ die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}$ sub-
„stituirt, so ist die in Rede stehende partielle Differentialgleichung
„folgende:

$$4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \overline{H} = 0.$$

„Gelingt es nämlich, die vollständige Lösung φ dieser partiellen Differen-
„tialgleichung zu finden und bezeichnet man die in derselben enthaltenen;
„willkürlichen Constanten mit $A_1, A_2 \ldots A_\alpha$; ferner mit $B_1, B_2 \ldots B_\alpha$ ganz
„beliebig gewählte Constanten, so sind:

$$5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial A_k} = B_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} = p_k$$

„die vollständigen Integrale der Gleichungen 3)."

„Da ferner Φ nur die Variablen $t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ enthält, so sind
„zugleich:

$$6) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial A_k} = B_k$$

„diejenigen endlichen Gleichungen, durch welche $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ als Func-
„tionen von t der Art bestimmt werden, wie es die in 1) gestellte Bedingung
„$\delta . \int L\,dt = 0$ verlangt."

Das Theorem II) zu beweisen, würde überflüssig sein. Dagegen scheint es wohl erforderlich, die in Theorem I) ihrem Resultat nach angegebene Transformation ausführlich darzustellen.

Es handelt sich darum, in den aus 1) unmittelbar fliessenden Differentialgleichungen 2):

$$7) \qquad \frac{dq_k}{dt} = q'_k, \quad \frac{d.}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

an Stelle der q'_k neue Variablen einzuführen, nämlich die Variablen p_k, welche mit jenen durch die α Relationen

8) $$\frac{\partial L}{\partial q'_k} = p_k$$

zusammenhängen. Zu diesem Zweck leiten wir zunächst aus dem gegebenen Ausdruck L einen andern ab, welcher mit H bezeichnet werden mag und folgende Form besitzen soll:

$$H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k \frac{\partial L}{\partial q'_k} \right) - L.$$

Denken wir uns nun in diesem Ausdruck die darin enthaltenen Variablen q_k, q'_k um beliebige kleine Incremente Δq_k, $\Delta q'_k$ vermehrt, und bezeichnen wir den daraus für H selber entstehenden Zuwachs mit ΔH, so ist:

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_k} . \Delta q'_k + q'_k . \Delta \frac{\partial L}{\partial q'_k} \right) - \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k + \frac{\partial L}{\partial q'_k} . \Delta q'_k \right),$$

d. i.:

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k . \Delta \frac{\partial L}{\partial q'_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k \right),$$

also mit Benutzung von 8):

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k . \Delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k \right).$$

Diese Formel macht ΔH abhängig von den Δq_k und den Δp_k, giebt also den Zuwachs, welchen der Ausdruck H empfängt, der Art an, als wäre derselbe nicht aus den q_k und q'_k, sondern aus den q_k und p_k zusammengesetzt. Wir können demnach aus dieser Formel unmittelbar auf die Werthe derjenigen partiellen Ableitungen $\frac{DH}{Dq_k}$, $\frac{DH}{Dp_k}$ schliessen, welche dem Ausdrucke H zukommen, sobald man denselben als Function der q_k und p_k ansieht. Für die genannten Ableitungen ergeben sich nämlich sofort folgende Formeln:

9) $$\frac{DH}{Dq_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad \frac{DH}{Dp_k} = q'_k.$$

Vermittelst dieser Gleichungen 9) und der Gleichungen 8) verwandeln sich aber unsere Differentialgleichungen 7) augenblicklich in:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{DH}{Dq_k}.$$ q. e. d.

§. 2.

Wenden wir uns zunächst zur Behandlung eines Punktsystems, dessen Beweglichkeit durch gegebene, und zwar von der Zeit unabhängige Bedingungen beschränkt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Punkte des Systemes mit n und die Anzahl der gegebenen Bedingungsgleichungen mit β, so wird man die $3n$ Coordinaten sämmtlicher Punkte des Systems abhängig machen können von $3n - \beta = \alpha$ independenten Variablen $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$. Da die gegebenen Bedingungen von der Zeit t unabhängig

sind, so werden die Relationen, durch welche die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes m des Systems mit den independenten Variablen zusammenhängen:

$$9a)\quad \begin{cases} x = \varphi(q_1, q_2 \dots q_\alpha) \\ y = \psi(q_1, q_2 \dots q_\alpha) \\ z = \chi(q_1, q_2 \dots q_\alpha) \end{cases}$$

ebenfalls frei von t sein. Demnach ergiebt sich für die halbe lebendige Kraft T des Systems folgender Werth:

$$T = \tfrac{1}{2} Sm. \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \dots \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \\ + &\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \dots \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \\ + &\left(\frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \dots \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \end{aligned} \right\},$$

wo q'_k für $\frac{dq_k}{dt}$ steht, und die Summation S über alle Punkte m (x, y, z) des Systems auszudehnen ist. Dieser Ausdruck für T verwandelt sich, wenn man ihn nach Potenzen und Producten der q'_k ordnet, in:

$$10)\quad T = \tfrac{1}{2}. \sum_{k=1}^{k=\alpha} \sum_{i=1}^{i=\alpha} u_{ki} \,.\, q'_k q'_i,$$

wo:

$$11)\quad u_{ki} = Sm \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

ist. Es ist also T hinsichtlich der q'_k ein homogenes Polynom 2ten Grades.

Das Potential V der auf das Punktsystem einwirkenden Kräfte wird zunächst als eine Function gegeben sein, welche von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und möglicher Weise auch noch von der Zeit t abhängt. Diese Function kann aber mit Hilfe der Relationen 9a) sofort in einen von den q_k und t abhängenden Ausdruck umgewandelt werden, so dass also:

$$V = F(t, q_1, q_2 \dots q_\alpha)$$

wird.

Um die Bewegung des Punktsystems zu ermitteln, hat man bekanntlich $q_1, q_2 \dots q_\alpha$ der Art als Functionen der Zeit zu bestimmen, dass das Integral:

$$\int (T + V)\, dt$$

ein Maximum oder Minimum wird. Um nun diese Bestimmung der q_k nach den Vorschriften des §. 1 auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zu reduciren, müssen der Reihe nach die dort angegebenen Ausdrücke L, H, $\bar{H}$ gebildet werden. Zunächst ist hier:

$$L = T + V.$$

Sodann ergiebt sich aus 2a), mit Rücksicht darauf, dass V von den q'_k unabhängig ist:

$$H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k\right) - (T + V),$$

oder, weil T ein homogenes Polynom in Bezug auf die q'_k ist, und demzufolge die identische Gleichung:

12) $$T = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k \right)$$

stattfindet:

13) $$H = 2T - (T + V) = T - V.$$

Aus diesem H muss nun der in §. 1 angegebene Ausdruck $H(t, q_1, q_2 .. q_\alpha, p_1, p_2 .. p_\alpha)$ abgeleitet werden, d. h. es müssen in H an Stelle der q'_k die mit diesen durch die Relationen:

14) $$\frac{\partial L}{\partial q'_k} = p_k, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k$$

verbundenen neuen Variablen p_k eingeführt werden. Zu diesem Zweck bilden wir mit Hilfe von 12) und 13) die Formel:

$$H + V = T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \dots \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha \right),$$

oder mit Rücksicht auf 14):

$$2(H + V) = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \dots p_\alpha q'_\alpha,$$

ferner mit Hilfe von 10) und 14) die Formeln:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_{11} q'_1 + u_{12} q'_2 + \dots u_{1\alpha} q'_\alpha \\ p_2 &= u_{21} q'_1 + u_{22} q'_2 + \dots u_{2\alpha} q'_\alpha \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_\alpha &= u_{\alpha 1} q'_1 + u_{\alpha 2} q'_2 + \dots u_{\alpha\alpha} q'_\alpha \end{aligned}$$

und erhalten sodann aus den letzten $(\alpha + 1)$ Gleichungen, durch Elimination der q'_k, sofort:

$$\begin{vmatrix} 2(H+V) & p_1 & p_2 & \dots & p_\alpha \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ p_\alpha & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Da sowohl V als auch die u_{ki} unabhängig sind von dem q'_k, so ist H durch diese Gleichung als Function von $t, q_1, q_2 \dots q_\alpha, p_1, p_2 \dots p_\alpha$ dargestellt. Um nun ferner das in §. 1 angegebene $\bar{H}$ zu erhalten, hat man nur in dem Ausdrucke $H(t, q_1, q_2 \dots q_\alpha, p_1, p_2 \dots p_\alpha)$ die Argumente $p_1, p_2 \dots p_\alpha$ durch die Ableitungen einer unbekannten Function, nämlich durch $\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}$ zu ersetzen. Folglich ergiebt sich für $\bar{H}$ die Gleichung:

15) $$\begin{vmatrix} 2(\bar{H}+V) & \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich endlich $\bar{H}$ aus dieser Gleichung 15) berechnet, und den so erhaltenen Werth in die Formel:

16) $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{H} = 0$$

substituirt, so stellt alsdann diese letztere die gesuchte partielle Differentialgleichung vor. Da man nun aber offenbar zu demselben Resultate gelangt, mag man $\bar{H}$ aus 15) berechnen, und dann in 16) substituiren, oder mag man umgekehrt $\bar{H}$ aus 16) berechnen und dann in 15) einsetzen, so lässt sich die partielle Differentialgleichung, durch Anwendung des letzeren Verfahrens, augenblicklich darstellen. Man erhält dann für dieselbe diejenige Form, welche in 17) sogleich angegeben werden soll.

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich folgendermaassen aussprechen:

„Sind $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ die independenten Variablen, „welche an Stelle der durch gegebene Bedingungen „von einander abhängigen Coordinaten x, y, z ein- „geführt sind; bedeutet ferner $V = F(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha)$ das „Potential der einwirkenden Kräfte, und bezeichnet „man ausserdem mit u_{ki} folgende α^2 Ausdrücke:

$$u_{ki} = Sm\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right),$$

„so hängt die Ermittelung der Bewegung des Punkt- „systems von der Auffindung einer Function Φ ab, „welche der partiellen Differentialgleichung:

17) $$\begin{vmatrix} 2V - 2\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1\alpha} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2\alpha} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \cdots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0$$

„identisch Genüge leistet, und zugleich α willkür- „liche Constante $A_1, A_2 \ldots A_\alpha$ enthält. Ist nämlich „diese Function φ gefunden, so sind alsdann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_1} = B_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial A_2} = B_2 \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial A_\alpha} = B_\alpha$$

„die mit 2α willkürlichen Constanten A, B versehenen „endlichen Gleichungen, durch welche die Bewegung „des Punktsystems dargestellt wird."

§. 3.

Ich gehe nun über zu der Bewegung eines Punktsystems, dessen Beweglichkeit durch gegebene, und zwar von der Zeit abhängende Bedingungen beschränkt ist. Bezeichnet man mit $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ die independenten Variablen, welche an Stelle der, durch die gegebenen Bedingungsgleichungen mit einander verbundenen, rechtwinkligen Coordinaten des Punktsystems eingeführt sind, so werden sich die letzteren nicht mehr (wie in §. 2) durch die q_k allein, sondern durch diese und durch die in den Bedingungen enthaltene Zeit t darstellen. Man wird also für die Coordinaten x, y, z irgend eines dem Systeme angehörigen Punktes m Ausdrücke von folgender Gestalt haben:

$$18)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi\,(t, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha) \\ y = \psi\,(t, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha). \\ z = \chi\,(t, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha) \end{array}\right.$$

In der Formel:

$$\delta . \int (T + V)\, dt = 0,$$

durch welche die Unbekannten q_k wiederum ihre Bestimmung finden, ist dann im Allgemeinen das Potential V ein von den q_k und t, und andererseits die halbe lebendige Kraft T ein von den q_k und t und auch von den q'_k abhängiger Ausdruck. Der wesentliche Unterschied der vorliegenden Aufgabe von der in §. 2 behandelten besteht darin, dass T nicht mehr wie dort in Bezug auf die q'_k ein homogenes Polynom 2ten Grades ist, sondern gegenwärtig ein Polynom darstellt, dessen Terme hinsichtlich der q'_k theils 0ter, theils 1ter und theils 2ter Dimension sind.

Bei Bildung von T ist es zweckmässig, das in den Gleichungen 18) vorkommende t durch die Bezeichnung q_0 zu ersetzen, also zu schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi\,(q_0, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha) \\ y = \psi\,(q_0, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha), \\ z = \chi\,(q_0, q_1, q_2 \;\ldots\; q_\alpha) \end{array}\right.$$

wo dann:

$$18a)\qquad q_0 = t, \quad q'_0 = 1$$

ist. Für T ergiebt sich nunmehr folgender Werth:

$$T = \tfrac{1}{2} Sm \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial q_0} q'_0 + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \ldots \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial y}{\partial q_0} q'_0 + \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \ldots \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial q_0} q'_0 + \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \ldots \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} q'_\alpha\right)^2 \end{array}\right\},$$

oder:

$$T = \tfrac{1}{2} . \sum_{k=0}^{k=\alpha} \sum_{i=0}^{i=\alpha} (u_{ki}\, q'_k\, q'_i),$$

wo:

$$u_{ki} = Sm\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

ist, und wo S wieder die über alle Punkte m des Systems auszudehnende Summation andeutet.

Wenden wir nun die in §. 1 aufgestellten Theoreme an, so ist für L wiederum der Ausdruck $T + V$ zu nehmen:

$$L = T + V,$$

oder nach 18a):

$$L = T + V . q'_0 q'_0,$$

d. i.:

$$19)\qquad L = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\alpha} \sum_{i=0}^{i=\alpha} (u_{ki} q'_k q'_i) + V . q'_0 q'_0.$$

Dieser Ausdruck für L stellt in Bezug auf die $(\alpha + 1)$ Grössen $q'_0, q'_1, q'_2 \ldots q'_\alpha$ ein **homogenes** Polynom 2ten Grades dar, und genügt also folgender Gleichung:

$$20)\qquad 2L = q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0} + q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + \ldots q'_\alpha \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}.$$

Demzufolge können wir dem in §. 1 angegebenen Ausdruck H

$$H = q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial L}{\partial q'_2} + \ldots q'_\alpha \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} - L$$

im vorliegenden Falle, mit Rücksicht auf 20), die Form geben:

$$21)\qquad H = L - q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0}.$$

Führen wir nun die in §. 1 angegebenen neuen Variablen ein:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q'_1},\; p_2 = \frac{\partial L}{\partial q'_2} \;\ldots\; p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}$$

und daneben noch die Variable:

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial q'_0},$$

so ergiebt sich aus 19), 20), 21) sofort:

$$\begin{aligned}
2L &= \qquad\quad p_0\, q'_0 + p_1\, q'_1 + \ldots + p_\alpha\, q'_\alpha \\
p_0 &= (u_{00} + 2V)\, q'_0 + u_{01}\, q'_1 + \ldots + u_{0\alpha} q'_\alpha \\
p_1 &= \qquad (u_{10} q'_0 + u_{11} q'_1 + \ldots + u_{1\alpha} q'_\alpha \\
&\qquad \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
p_\alpha &= \qquad (u_{\alpha 0} q'_0 + u_{\alpha 1} q'_1 + \ldots + u_{\alpha\alpha} q'_\alpha \\
H &= L - p_0 q'_0.
\end{aligned}$$

Wenn man durchgängig für q'_0 seinen Werth 1 substituirt, ferner die beiden ersten Gleichungen von einander subtrahirt und dabei für $2L - 2p_0$, der letzten Gleichung gemäss, $2H$ einsetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&u_{00} + 2(H + V) + (u_{01} - p_1) q'_1 + (u_{02} - p_2) q'_2 + \ldots (u_{0\alpha} - p_\alpha) q'_\alpha = 0 \\
&(u_{10} - p_1) \qquad + \qquad u_{11} q'_1 + \qquad u_{12} q'_2 + \ldots \qquad u_{1\alpha} q'_\alpha = 0 \\
&(u_{20} - p_2) \qquad + \qquad u_{21} q'_1 + \qquad u_{22} q'_2 + \ldots \qquad u_{2\alpha} q'_\alpha = 0 \\
&\qquad \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
&(u_{\alpha 0} - p_\alpha) \qquad + \qquad u_{\alpha 1} q'_1 + \qquad u_{\alpha 2} q'_2 + \ldots \qquad u_{\alpha\alpha} q'_\alpha = 0
\end{aligned}$$

und daraus endlich durch Elimination von $q'_1, q'_2 \dots q'_\alpha$:

$$22)\quad \begin{vmatrix} u_{00}+2(H+V) & u_{01}-p_1 & u_{02}-p_2 & \dots & u_{0\alpha}-p_\alpha \\ u_{10}-p_1 & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ u_{20}-p_2 & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ u_{\alpha 0}-p_\alpha & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diese Gleichung ist H als Function von $t, q_1, q_2 \dots q_\alpha, p_1, p_2 \dots p_\alpha$ dargestellt. Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \overline{H} = 0,$$

auf welche das vorliegende Problem führt, wird daher, wie man leicht übersieht, aus der Formel 22) sofort erhalten, wenn man darin an Stelle von $H, p_1, p_2 \dots p_\alpha$ respective $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}$ substituirt. Demnach ergiebt sich folgender Satz:

„Handelt es sich um die Bewegung eines dem Po-„tential V unterworfenen Punktsystems, welches in „seiner Beweglichkeit durch irgend welche mit der „sich ändernde Bedingungen beschränkt ist; sind „demnach die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z „irgend eines Punktes m mit den independenten Va-„riablen $q_1, q_2 \dots q_\alpha$ durch Relationen verbunden, in „welchen ausser den genannten Grössen auch noch die „Zeit vorkommt, so hängt die Ermittelung der in „Frage stehenden Bewegung von der vollständigen „Lösung Φ folgender partiellen Differentialgleichung „ab:

$$23)\quad \begin{vmatrix} u_{00}+2V-2\frac{\partial \Phi}{\partial t} & u_{01}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & u_{02}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & \dots & u_{0\alpha}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} \\ u_{10}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1\alpha} \\ u_{20}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2\alpha} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ u_{\alpha 0}-\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha} & u_{\alpha 1} & u_{\alpha 2} & \dots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

„wo unter den u_{ki} die Ausdrücke:

$$u_{ki} = Sm\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

„und in diesen unter $q_1, q_2 \dots q_\alpha$ die independenten „Variablen, unter q_0 dagegen die Zeit t zu verstehen „ist."

Man übersieht leicht, dass die im vorhergehenden Paragraphen gefundene partielle Differentialgleichung 17) einen speciellen Fall der gegenwärtig gefundenen 23) bildet. Wendet man nämlich 23) auf ein mechanisches Problem an, bei welchem die Bedingungsgleichungen von der Zeit t unabhängig sind, so verschwinden die mit dem Index (o) behafteten u. Fallen diese aber fort, so wird 23) identisch mit 17); wie man sofort erkennt, sobald man beachtet, dass der Werth einer Determinante ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig die Glieder der ersten Horizontal- und die der ersten Verticalreihe mit -1 multiplicirt werden.

§. 4.

Wir wollen nun zu den Problemen der relativen Bewegung übergehen, und hierbei beginnen mit dem Fall eines einzelnen und frei beweglichen Punktes m. Sind x, y, z die nach drei unbeweglichen und auf einander senkrechten Axen gemessenen Coordinaten dieses Punktes, und andererseits ξ, η, ζ die Coordinaten desselben in Bezug auf ein in vorgeschriebener Bewegung begriffenes ebenfalls rechtwinkliges Coordinatensystem, so finden zwischen diesen x, y, z und ξ, η, ζ Relationen von folgender Form statt:

$$\text{23a)} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \sigma_1 + \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ y &= \sigma_2 + \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ z &= \sigma_3 + \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta \end{aligned} \right.$$

wo die σ_k, α_k, β_k, γ_k gegebene Functionen der Zeit sind, welche den bekannten 6 Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Genüge leisten. Um die halbe lebendige Kraft:

$$T = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z')$$

durch die relativen Coordinaten ξ, η, ζ darstellen zu können, wird es zweckmässig sein, folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$\text{24)} \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_1\beta'_1 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\beta'_3 &= -(\beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 + \beta_3\gamma'_3) = a \\ \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2 + \alpha_3\gamma'_3 &= -(\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3) = b, \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3 &= -(\alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\beta'_3) = c \end{aligned} \right.$$

$$\text{25)} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1\sigma''_1 + \alpha_2\sigma''_2 + \alpha_3\sigma''_3 &= A \\ \beta_1\sigma''_1 + \beta_2\sigma''_2 + \beta_3\sigma''_3 &= B, \\ \gamma_1\sigma''_1 + \gamma_2\sigma''_2 + \gamma_3\sigma''_3 &= C \end{aligned} \right.$$

wo die Accente ($'$), ($''$) durchgängig Differentialquotienten nach der Zeit vorstellen sollen. Auch wird es gut sein, sogleich zu bemerken, dass für die Functionen a, b, c folgende Gleichungen gelten:

$$\text{26)} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'_1 &= c\beta_1 - b\gamma_1 \\ \beta'_1 &= a\gamma_1 - c\alpha_1. \\ \gamma'_1 &= b\alpha_1 - a\beta_1 \end{aligned} \right.$$

Was die Ableitung dieser Gleichungen anbelangt, so ergiebt sich z. B. die erste derselben sofort, wenn man die Formeln:

$$\alpha_1\alpha'_1+\alpha_2\alpha'_2+\alpha_3\alpha'_3=0$$
$$\beta_1\alpha'_1+\beta_2\alpha'_2+\beta_3\alpha'_3=c$$
$$\gamma_1\alpha'_1+\gamma_2\alpha'_2+\gamma_3\alpha'_3=-b$$

der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1 multiplicirt, und sodann alle drei addirt; in analoger Weise die beiden übrigen.

Nunmehr können wir zur Bildung des Ausdruckes T übergehen, und erhalten zunächst aus 23 a):

27) $$x'=\sigma'_1+(\alpha_1\xi'+\beta_1\eta'+\gamma_1\zeta')+(\alpha'_1\xi+\beta'_1\eta+\gamma'_1\zeta),$$

sodann mit Berücksichtigung der Gleichungen 26):

28) $$x'=\sigma'_1+\alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w,$$

wo für den Augenblick u, v, w zur Bezeichnung folgender Ausdrücke gebraucht sind:

$$u=\xi'+b\zeta-c\eta$$
$$v=\eta'+c\xi-a\zeta.$$
$$w=\zeta'+a\eta-b\xi$$

Durch gleichzeitige Benutzung von 27) und 28) ergiebt sich nun:

$$x'x'=\sigma'_1\sigma'_1+2\sigma'_1\frac{d.(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)}{dt}+(\alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w)^2,$$

oder:

$$x'x'=\frac{d.[2\sigma'_1(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)+\int\sigma'_1\sigma'_1 dt]}{dt}$$
$$-2\sigma''_1(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)+(\alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w)^2,$$

folglich mit Rücksicht auf 25):

29) $$T=\frac{m}{2}\left(\frac{dF}{dt}-2(A\xi+B\eta+C\zeta)+(u^2+v^2+w^2)\right),$$

wo F eine Function ist, deren Bedeutung nicht weiter von Gewicht sein wird.

Soll nun die Bewegung des Punktes m in Bezug auf das selber in Bewegung begriffene Axensystem (ξ, η, ζ) ermittelt werden, so hat man die Coordinaten ξ, η, ζ als Functionen der Zeit so zu bestimmen, dass:

30) $$\delta.\int(T+V)\,dt=0$$

wird, wo V das gegebene, von ξ, η, ζ und möglicher Weise auch noch von t abhängige Potential der auf den Punkt einwirkenden Kraft vorstellt. Da übrigens der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck $T+V$ zufolge 29) den Term $\frac{m}{2}\frac{dF}{dt}$ enthält, dieser Term aber in der Formel 30) vollständig überflüssig ist, so kann man die zur Bestimmung von ξ, η, ζ dienende Bedingung folgendermaassen hinstellen:

31) $$\delta.\int L\,dt=0,$$

wo L folgenden Ausdruck vorstellen soll:



$$L = \frac{m}{2}\left[-2(A\xi + B\eta + C\zeta) + (u^2 + v^2 + w^2)\right] + V,$$

d. i.:

$$L = \frac{m}{2}\left\{\begin{array}{l}(\xi' + b\zeta - c\eta)^2 \\ + (\eta' + c\xi - a\zeta)^2 \\ + (\zeta' + a\eta - b\xi)^2\end{array}\right\} - m(A\xi + B\eta + C\zeta) + V.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch:

$$L = \tfrac{1}{2}(u_{11}\xi'^2 + u_{22}\eta'^2 + u_{33}\zeta'^2 + 2u_{23}\eta'\zeta' + 2u_{31}\zeta'\xi' + 2u_{12}\xi'\eta' \\ + 2u_{01}\xi' + 2u_{02}\eta' + 2u_{03}\zeta' + u_{00}) + V,$$

wo also:

$$32)\quad \left\{\begin{array}{l} u_{11} = u_{22} = u_{33} = m \\ u_{23} = u_{31} = u_{12} = 0 \\ u_{01} = m(b\zeta - c\eta) \\ u_{02} = m(c\xi - a\zeta) \\ u_{03} = m(a\eta - b\xi) \\ u_{00} = m[(b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2] - 2m(A\xi + B\eta + C\zeta) \end{array}\right.$$

ist, so hat derselbe in Bezug auf ξ', η', ζ' dieselbe Form, wie der in §. 3 (19) angegebene Ausdruck in Bezug auf $q'_1, q'_2 \ldots q'_\alpha$.

Nach §. 3, 23) ist demnach die partielle Differentialgleichung, auf deren Lösung das vorliegende Problem zurückkommt, folgende:

$$\left|\begin{array}{cccc} u_{00} + 2V - 2\frac{\partial\Phi}{\partial t} & u_{01} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} & u_{02} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} & u_{03} - \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \\ u_{10} - \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} & m & 0 & 0 \\ u_{20} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} & 0 & m & 0 \\ u_{30} - \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} & 0 & 0 & m \end{array}\right| = 0,$$

welche schliesslich durch Einsetzung der in 32) für die u angegebenen Werthe übergeht in:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} \\ + \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} & \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} & \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \\ \xi & \eta & \zeta \\ a & b & c \end{array}\right| + (A\xi + B\eta + C\zeta) = V.$$

Hier sind a, b, c, A, B, C bekannte Functionen von t, welche mit den ursprünglich gegebenen $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \sigma_k$ durch die Gleichungen 24), 25) zusammenhängen. Ferner ist V ebenfalls eine gegebene, von ξ, η, ζ und möglicherweise auch noch von t abhängende Function.

§. 5.

Schliesslich mag noch der Fall eines Punktsystems behandelt werden, dessen Bewegung in Bezug auf ein, in vorgeschriebener Bewegung begriffenes Axensystem (ξ, η, ζ) bestimmt werden soll; mag nun das Potential der einwirkenden Kräfte allein von der Lage des Punktsystems zu den Axen (ξ, η, ζ), oder mag dasselbe ausserdem auch noch abhängig sein von seiner Lage zu den festen Axen (x, y, z); mag ferner die Beweglichkeit des Systems frei oder in gegebener Weise beschränkt sein. Falls jedoch derartige Beschränkungen, d. i. gegebene Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ existiren, so soll (allerdings nur der Einfachheit willen) angenommen werden, dass diese Bedingungsgleichungen unabhängig von t sind.

Bezeichnet man die Masse irgend eines der Punkte des Systems mit m, und die Coordinaten desselben in den beiden Axensystemen mit x, y, z und ξ, η, ζ, so ergiebt sich aus 29) für die halbe lebendige Kraft T des Punktsystems folgender Ausdruck:

$$T = \frac{d.S\frac{m}{2}F}{dt} - Sm\,(A\xi + B\eta + C\zeta) + S\frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Die zur Bestimmung der Bewegung des Systems dienende Formel ist demnach:

$$33)\qquad \delta.\int L\,dt = 0,$$

wo L folgenden Werth hat:

$$34)\qquad L = S\frac{m}{2}\left\{\begin{array}{l}(\xi' + b\zeta - c\eta)^2 \\ +\,(\eta' + c\xi - a\zeta)^2 \\ +\,(\zeta' + a\eta - b\xi)^2\end{array}\right\} - Sm(A\xi + B\eta + C\zeta) + V,$$

wenn nämlich V das gegebene Potential vorstellt, und die Summation S über alle Punkte m des Systems ausgedehnt gedacht wird. Bezeichnet α die Anzahl von Gleichungen, welche zu den gegebenen zwischen ξ, η, ζ stattfindenden Bedingungsgleichungen noch hinzugefügt werden müsste, um die relative Lage des Punktsystems in Bezug auf die Axen (ξ, η, ζ) vollständig festzustellen, kann man demnach die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ auf α independente Variable $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ reduciren: so sind nun diese q_k der Art zu bestimmen, dass sie der Formel 33) Genüge leisten, dass also die nach i h n e n genommene Variation des Integrals $\int L dt$ verschwindet.

Führt man nun in 34) an Stelle der ξ', η', ζ' die q'_k ein, so ergiebt sich:

$$L = S\frac{m}{2}\left\{\begin{array}{l}\left(b\zeta - c\eta + \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial q_k}q'_k\right)^2 \\ +\left(c\xi - a\zeta + \Sigma\frac{\partial\eta}{\partial q_k}q'_k\right)^2 \\ +\left(a\eta - b\xi + \Sigma\frac{\partial\zeta}{\partial q_k}q'_k\right)^2\end{array}\right\} - Sm\,(A\xi + B\eta + C\zeta) + V,$$

wo Σ die über $k = 1, 2, 3 \ldots \alpha$ ausgedehnte Summation andeuten soll. Daraus folgt:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\alpha} \sum_{i=0}^{i=\alpha} (u_{ki}\, q'_k\, q'_i) + V . q'_0\, q'_0, \tag{35}$$

wo q'_0 (ebenso wie in §. 3) gleich 1 sein soll, und wo die Grössen u_{ki}, u_{0k}, u_{00}, je nachdem beide Indices von 0 verschieden, oder einer derselben, oder beide gleich 0 sind, folgende Werthe besitzen:

$$u_{ki} = Sm\left(\frac{\partial \xi}{\partial q_k}\frac{\partial \xi}{\partial q_i} + \frac{\partial \eta}{\partial q_k}\frac{\partial \eta}{\partial q_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_k}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right)$$

$$u_{0k} = Sm\left[(b\zeta - c\eta)\frac{\partial \xi}{\partial q_k} + (c\xi - a\zeta)\frac{\partial \eta}{\partial q_k} + (a\eta - b\xi)\frac{\partial \zeta}{\partial q_k}\right]$$

$$u_{00} = Sm\left[(b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2\right] - S2m(A\xi + B\eta + C\zeta).$$

Da nun der Ausdruck 35) dieselbe Form besitzt, wie der in §. 3, 19) aufgestellte, so ergiebt sich,

> dass die partielle Differentialgleichung, auf deren Lösung das gegenwärtig vorliegende mechanische Problem recurrirt, sofort erhalten wird, wenn man in der dort gefundenen partiellen Differentialgleichung 23) die soeben für u_{ki}, u_{0k}, u_{00} aufgestellten Werthe substituirt.

Auf meinen besondern Wunsch wird dieser Aufsatz, welcher schon im Jahre 1862 in einem Russischen Journal (Вѣстникъ Математическихъ Наукъ изданный подъ редакціею ГУСЕВА. ВИЛЬНО. 1862, S. 111.) erschienen ist, hier von Neuem veröffentlicht.

Tübingen, 10. März 1866. C. Neumann.



XIII.

Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades.

Von

Dr. Th. Reye,
Privatdocent in Zürich.

Denken wir uns aus zwei Punkten S und S_1 einer Fläche F zweiter Ordnung die sämmtlichen in derselben liegenden Punkte durch Strahlen projicirt, so werden S und S_1 Mittelpunkte von zwei Strahlenbündeln[1]), die so auf einander bezogen sind, dass je zwei entsprechende Strahlen derselben sich in einem Punkte der Fläche F schneiden. Jedem Strahle des einen Bündels entspricht also im Allgemeinen ein einziger Strahl des andern, jeder Ebene aber, d. h. jedem ebenen Strahlenbüschel des einen Bündels entspricht eine Kegelfläche des andern, welche durch die Schnittlinie jener Ebene und der gegebenen Fläche F hindurchgeht. Eine Ausnahme hiervon macht jedoch der gemeinschaftliche Strahl $\overline{SS_1}$ der beiden Bündel und jede durch ihn gehende Ebene. Denn jede solche Ebene entspricht offenbar sich selbst, weil ihre Schnittlinie mit F durch S und S_1 geht und also aus keinem dieser Punkte durch eine Kegelfläche projicirt wird. Sind aber σ und σ_1 die Berührungsebenen von F in S und S_1, so entsprechen dem Strahle $\overline{SS_1}$, je nachdem er zum Bündel S oder zu S_1 gerechnet wird, die sämmtlichen in resp. σ_1 oder σ liegenden Strahlen der Bündel. Haben ferner σ und σ_1 je eine oder je zwei Gerade mit F gemein, ist also die Fläche zweiter Ordnung eine geradlinige, d. h. eine Kegelfläche oder eine Regelfläche, so bilden auch diese Geraden und alle durch sie gelegten Ebenen eine Ausnahme von obiger Regel. Denn sei u eine solche in σ liegende Gerade, die also auch als Strahl des Bündels S betrachtet werden kann: so entsprechen diesem Strahl in S_1 die sämmtlichen Strahlen der Ebene S_1u, weil jeder derselben dem Strahle u in einem Punkte der Fläche F begegnet, wie verlangt wird. Und da jede durch u gelegte Ebene noch eine Gerade

---

1) Die Ausdrücke „Strahlenbündel, Mittelpunkt, reciprok, involutorisch etc." haben in vorliegender Arbeit diejenige Bedeutung, welche ihnen beigelegt wird u. A. in v. Staudt's Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 und in meinen Vorträgen über die Geometrie der Lage. Hannover 1866 bei Rümpler.



v mit F gemein hat, so entspricht dieser Ebene uv von S die Ebene $S_1 v$ von S_1, nicht aber eine Kegelfläche.

Schneiden wir die Strahlenbündel S und S_1 durch die resp. Ebenen Σ und Σ_1, so sind auch diese auf einander bezogen. Und zwar entspricht jedem Punkte der einen Ebene im Allgemeinen ein einziger Punkt der andern, jeder Geraden aber ein Kegelschnitt. Nur je ein oder höchstens je drei Punkte der Ebenen machen hiervon eine Ausnahme, indem jedem derselben die sämmtlichen Punkte einer Geraden entsprechen, jeder durch einen von ihnen gehenden Geraden aber wieder eine Gerade.

Zwei Ebenen, welche eine Fläche zweiter Ordnung berühren, können auch so auf einander bezogen werden, dass je zwei Strahlen derselben einander entsprechend genannt werden, welche in irgend einer Berührungsebene der Fläche liegen. Jedem Strahl der einen Ebene entspricht dann im Allgemeinen ein einziger Strahl der anderen, den sämmtlichen Strahlen eines Punktes aber die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts. Auch hier treten jedoch Ausnahmen auf; z. B. die Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen bildet eine solche. — Durch Projiciren aus zwei beliebigen Mittelpunkten können wir von den Ebenen zu Strahlenbündeln übergehen. Jeder Ebene des einen dieser Bündel entspricht dann im andern eine Ebene, jedem Ebenenbüschel aber die sämmtlichen Berührungsebenen einer Kegelfläche. — Wir können auch zwei Ebenen so auf einander beziehen, dass jedem Strahl der einen ein Punkt der anderen entspricht, jedem Strahlenbüschel aber ein Kegelschnitt. Hieraus lassen sich dann wieder analoge Beziehungen zwischen Strahlenbündeln ableiten.

Alle diese verschiedenen Arten von Beziehungen zwischen Ebenen und Strahlenbündeln will ich im Folgenden unter dem Namen „Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades“ zusammenfassen, zur Unterscheidung namentlich von den Verwandtschaften der Collinearität und der Reciprocität, oder der Verwandtschaften ersten Grades. Sind nämlich zwei Ebenen collinear, so entspricht ebenfalls jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen, nicht aber jeder Geraden ein Kegelschnitt, sondern wieder eine Gerade. Und sind zwei Ebenen reciprok, so entspricht jedem Strahl der einen ein Punkt in der anderen Ebene, und den sämmtlichen Strahlen eines Punktes entsprechen die sämmtlichen Punkte einer Geraden, und nicht eines Kegelschnitts, wie bei der Verwandtschaft zweiten Grades.

Wie die projectivische Verwandtschaft zwischen Strahlenbüscheln, Ebenenbüscheln und Geraden zu den wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte geführt hat, ebenso möchte das Studium der hier betrachteten geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades analoge Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung aufdecken können. So ist mir schon gelungen, zu neun gegebenen Punkten einer Fläche zweiter Ordnung einen beliebigen zehnten linear zu construiren, d. h. durch 9 Punkte eine Fläche zweiter

Ordnung zu legen. Und zwar ist die unten im §. 2 angegebene Construction zwar weitläufig in der Ausführung, aber doch im Princip ebenso einfach wie diejenige, durch welche mittelst projectivischer Strahlenbüschel zu fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnitts ein sechster gefunden wird.

Steiner[1]), Seydewitz[2]) und in neuester Zeit die Herren Geiser[3]) und Hirst[4]) haben bereits über die Verwandtschaften zweiten Grades geschrieben, jedoch theils besondere Fälle, theils besondere Lagen der geometrisch verwandten Systeme angenommen. Ferner hat Magnus[5]) diese Verwandtschaften ganz allgemein, aber auf analytischem Wege untersucht, wobei ihm aber die vor Allem wichtigen projectivischen Beziehungen entgangen sind. Ich glaube deshalb ungeachtet so bedeutender schon vorhandener Arbeiten über diesen Gegenstand meine Untersuchungen nicht zurückhalten zu sollen, zumal da der von mir eingeschlagene Weg bisher nicht betreten war. Schon bekannte Sätze werde ich, wo sie erwähnt werden müssen, mit möglichster Kürze behandeln.

§. 1.
Wichtigste Beziehungen zwischen geometrisch verwandten Ebenen.

Ich beschränke mich darauf, die Verwandtschaften zweiten Grades zwischen Ebenen zu untersuchen. Denn diejenigen zwischen Strahlenbündeln oder zwischen einem Strahlenbündel und einer Ebene werden auf jene zurückgeführt, wenn wir jeden Strahlenbündel durch eine Ebene schneiden. Zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 sind nun drei Arten solcher geometrischer Verwandtschaften möglich, nämlich im Allgemeinen entspricht entweder:

1) jedem Punkt von Σ ein Punkt von Σ_1 und jeder Geraden von Σ oder Σ_1 ein Kegelschnitt in resp. Σ_1 oder Σ; oder
2) jedem Strahl von Σ ein Strahl von Σ_1, und den sämmtlichen Strahlen eines Punktes von Σ oder Σ_1 die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts in resp. Σ_1 oder Σ; oder
3) jedem Punkt von Σ ein Strahl von Σ_1, und jeder Geraden von Σ die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts von Σ_1, sowie jedem Strahlenbüschel von Σ_1 die sämmtlichen Punkte eines Kegelschnitts von Σ.

Uebrigens genügt es, wenn ich nur auf den ersten Fall näher eingehe. Denn ersetzt man eine oder jede der Ebenen Σ und Σ_1 durch eine reciproke Ebene, so ergeben sich aus diesem ersten Fall sofort die beiden übrigen, und alle für 1) gewonnenen Ergebnisse lassen sich ohne Weiteres auf 2)

1) Systematische Entwickelung etc. pag. 251 — 295.
2) Grunert's Archiv Bd. 7, pag. 113—148.
3) Mittheilungen der Berner Naturf. Gesellschaft 1865.
4) *Proceedings of the Royal Society* 1865 pag. 92 — 106.
5) Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie pag. 229—240.

oder 3) übertragen. Nur wo besondere Lagen in Betracht kommen, müssen die letzteren Arten der Verwandtschaft, sowie die Verwandtschaften zwischen Strahlenbündeln besonders untersucht werden.

Die einfachste Art, zwei Ebenen Σ und Σ_1 auf die in 1) angedeutete Weise auf einander zu beziehen, ist wohl die folgende. Man beziehe Σ und Σ_1 in doppelter Weise reciprok auf einander, so dass jeder Punkt der einen Ebene zwei Polaren in der andern besitzt, und nenne dann je zwei Punkte einander entsprechend, von denen der eine, und folglich jeder auf beiden Polaren des andern liegt.[1]) Jedem Punkte von Σ entspricht hiernach im Allgemeinen ein einziger Punkt in Σ_1, nämlich der Schnittpunkt seiner beiden Polaren; jeder Geraden aber ein zu ihr projectivischer Kegelschnitt. Denn die Polaren der sämmtlichen Punkte einer Geraden k bilden zwei zu dieser und folglich auch zu einander projectivische Strahlenbüschel, welche sich schneiden in dem jener Geraden entsprechenden Kegelschnitt $\varkappa_1$. Im Folgenden soll der ganz specielle Fall ausgeschlossen sein, in welchem jeder solche Kegelschnitt, wie $\varkappa_1$, aus Geraden besteht. Derselbe tritt dann ein, wenn die beiden in Σ_1 angenommenen und zu Σ reciproken Ebenen perspectivische Lage haben.

In den Ebenen Σ und Σ_1 giebt es gewisse Punkte, die mehr als einen Punkt zu entsprechenden haben. Jeder solche Punkt soll ein Hauptpunkt genannt werden. Da seine beiden Polaren mehr als einen Punkt gemein haben, so fallen dieselben zu einer einzigen Geraden zusammen, welche eine Hauptlinie heissen soll. Jeder Punkt einer solchen Hauptlinie entspricht sonach dem Hauptpunkte, dessen Polare sie ist, und dessen entsprechende Hauptlinie sie aus diesem Grunde genannt wird. Da nun alle Hauptlinien der einen Ebene mit jeder in derselben gelegenen Geraden Punkte gemein haben, so folgt:

> Jeder Kegelschnitt der einen Ebene, welcher einer Geraden der andern Ebene entspricht, geht durch alle Hauptpunkte der ersteren.

Es kann daher nur eine beschränkte Zahl von Hauptpunkten geben.

Mögen nun den Geraden k und l von Σ die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 von Σ_1 entsprechen, so haben die letzteren den Punkt P_1 gemein, welcher dem Schnittpunkte P von k und l entspricht, und folglich noch mindestens einen und höchstens drei weitere reelle Punkte. Denn dass $\varkappa_1$ und λ_1 sich etwa nur berühren in P_1, ohne sich ausserdem zu schneiden, lässt sich leicht vermeiden, indem l durch zwei solche Punkte gelegt wird, deren entsprechende durch $\varkappa_1$ von einander getrennt sind. Alsdann liegt λ_1 theilweise innerhalb und theilweise ausserhalb $\varkappa_1$, und hat deshalb mit $\varkappa_1$ mindestens

2) Nennt man zwei Strahlen der Ebenen einander entsprechend, wenn jede durch die beiden Pole der anderen geht, so erhält man die zweite Art der geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades. Ebenso entsteht die dritte Art, wenn Σ in doppelter Weise collinear auf Σ_1 bezogen wird u. s. w.

einen und höchstens drei reelle Punkte ausser P_1 gemein. Jeder dieser letzteren ist ein Hauptpunkt von Σ_1, weil ihm sowohl auf k als auch auf l ein von P verschiedener Punkt entspricht. Also:

Jede der Ebenen Σ und Σ_1 hat mindestens einen reellen Hauptpunkt und höchstens drei solche.

Sei u eine Hauptlinie von Σ und a_1 eine beliebige durch den entsprechenden Hauptpunkt U_1 gehende Gerade von Σ_1. Dann bilden die Polaren der sämmtlichen Punkte von a_1 in Σ zwei zu a_1 und folglich zu einander projectivische Strahlenbüschel, welche perspectivisch liegen, weil sie die Hauptlinie u entsprechend gemein haben. Sie schneiden sich daher in einer zu a_1 projectivischen Geraden a, welche mit u zusammen den der a_1 entsprechenden Kegelschnitt ausmacht. Umgekehrt entspricht der Geraden a die Gerade a_1 und kein krummer Kegelschnitt. Daraus aber folgt, dass a durch einen reellen Hauptpunkt der Ebene Σ gehen muss. Denn weil die Polaren der sämmtlichen Punkte von a sich paarweise auf a_1 schneiden, so bilden dieselben zwei perspectivische Strahlenbüschel, und in dem gemeinschaftlichen Strahle dieser Büschel fallen daher die beiden Polaren irgend eines Punktes von a, d. h. eines Hauptpunktes zusammen. Also:

Jede Gerade, welcher ein aus Geraden bestehender Kegelschnitt entspricht, geht durch einen reellen Hauptpunkt, und umgekehrt.

Durch den Strahlenbüschel U_1 werden die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 und folglich auch die entsprechenden Geraden k und l projectivisch so auf einander bezogen, dass die Kegelschnitte den Punkt P_1, und somit die Geraden ihren Schnittpunkt P entsprechend gemein haben. Letztere liegen daher perspectivisch, und die sämmtlichen Geraden a, welche den durch U_1 gehenden Geraden a_1 entsprechen, bilden einen (zu k, $\varkappa_1$ und folglich) zu U_1 projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt mit U bezeichnet werde. Die Hauptlinie u geht nur dann durch U oder ist nur in dem Falle ein Projectionsstrahl der perspectivischen Geraden k und l, wenn $\varkappa_1$ und λ_1 sich in U_1 berühren, und deshalb U_1 sich selbst entspricht in $\varkappa_1$ und λ_1. Weil nun auf jeder durch U gehenden Geraden a ein Hauptpunkt liegen muss, so ist U selbst dieser Hauptpunkt; denn sonst enthielte die Ebene Σ unendlich viele Hauptpunkte, was unmöglich ist. Wir wollen die Hauptpunkte U_1 und U einander zugeordnet nennen, so dass jedem Hauptpunkte der einen Ebene ein solcher in der anderen Ebene zugeordnet ist. Daraus ergiebt sich zunächst:

Die Zahl der reellen Hauptpunkte und daher auch der reellen Hauptlinien ist in beiden Ebenen die gleiche, und jede der Ebenen enthält ebenso viele Hauptpunkte wie Hauptlinien.

Auch lassen sich die eben gefundenen Sätze wie folgt zusammenstellen:

Jeder durch einen Hauptpunkt U_1 gehenden Geraden a_1 entspricht (ausser der dem U_1 entsprechenden Hauptlinie u) eine durch den zugeordneten Hauptpunkt U gehende und zu a_1 projectivische Gerade a. Die Büschel U_1 und U sind projectivisch in Ansehung ihrer einander entsprechenden Geraden, und sollen zugeordnete Hauptbüschel genannt werden.

Liegt U auf u, so berühren sich im zugeordneten Hauptpunkte U_1 je zwei Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1, welche irgend zwei Geraden k und l von Σ entsprechen, und umgekehrt.

Ueber die gegenseitige Lage der Hauptpunkte und Hauptlinien giebt uns der Satz Aufschluss:

Der Schnittpunkt von zwei Hauptlinien jeder Ebene ist ein Hauptpunkt, und die Verbindungslinie von zwei Hauptpunkten eine Hauptlinie.

Nämlich der Schnittpunkt von zwei Hauptlinien entspricht zwei Hauptpunkten, mit deren Verbindungslinie daher seine beiden Polaren zusammenfallen. Da überhaupt jedem Hauptpunkt diejenige Hauptlinie entspricht, in welcher seine beiden Polaren sich vereinigen, so dürfen wir auch sagen:

Von zwei in Σ und Σ_1 gegebenen Hauptpunkten liegt entweder keiner oder jeder in der entsprechenden Hauptlinie des andern.

Endlich lässt sich noch folgender Satz leicht beweisen:

Wenn ein krummer Kegelschnitt, der einer Geraden entspricht, irgend eine Hauptlinie seiner Ebene schneidet oder berührt, so ist jeder dieser gemeinschaftlichen Punkte ein Hauptpunkt.

Einem solchen gemeinschaftlichen Punkte entspricht nämlich nicht nur ein Hauptpunkt, sondern ausserdem ein Punkt jener Geraden.

Zu den Hauptpunkten, welche hiernach auf einer Hauptlinie u_1 von Σ_1 liegen, gelangen wir auch durch folgende Betrachtung. Sei U derjenige Hauptpunkt von Σ, dessen beide Polaren in u_1 liegen. Jeder Strahl von Σ hat im Allgemeinen zwei Pole in Σ_1, und zwar liegen die Pole der sämmtlichen Strahlen von U auf der Hauptlinie u_1, wo sie zwei zu dem Büschel U und folglich auch zu einander projectivische Gerade bilden. Dieselben haben nach bekannten Sätzen zwei Punkte entsprechend gemein, so dass für zwei Strahlen von U die beiden Pole zusammenfallen; und diese beiden Punkte sind die in u_1 liegenden Hauptpunkte. Wie bekannt, können die beiden Punkte, welche zwei auf einander liegende projectivische Gerade gemein haben, auch zusammenfallen, oder auch conjugirt imaginär werden. Dieser letztere Fall verdient eine besondere Erörterung.

Sei k eine beliebige Gerade in Σ, welche den Hauptbüschel U schneidet, $\varkappa_1$ der entsprechende Kegelschnitt in Σ_1. Dann können wir uns $\varkappa_1$ wie folgt construirt denken. Wir suchen zu k die beiden Pole in Σ_1 und ebenso zu irgend einem Strahle a von U. Die Polaren des Schnittpunktes S von k und a sind dann diejenigen beiden Geraden, welche die Pole von k beziehungsweise mit den Polen von a verbinden, und dem Punkte S entspricht der Schnittpunkt S_1 dieser beiden Verbindungslinien. Wir finden also den Kegelschnitt $\varkappa_1$, indem wir aus den Polen von k beziehungsweise die in u_1 liegenden projectivischen Geraden durch zwei Strahlenbüschel projiciren, und deren Schnittcurve aufsuchen. Dieser Kegelschnitt geht durch die reellen oder imaginären Punkte, welche jene projectivischen Geraden gemein haben. Da dasselbe von jedem zweiten Kegelschnitt λ_1 der Ebene Σ_1 gilt, welche einer Geraden l von Σ entspricht, so folgt der Satz:

> Jede Hauptlinie der einen Ebene ist entweder eine gemeinschaftliche Tangente, oder eine gemeinschaftliche reelle oder ideale Secante der sämmtlichen Kegelschnitte, welche den Geraden der andern Ebene entsprechen. Jeder dieser Kegelschnitte geht durch alle reellen oder imaginären Hauptpunkte seiner Ebene.

Seien nun U und U_1 zwei zugeordnete Hauptpunkte der Ebenen Σ und Σ_1, und resp. u_1 und u die entsprechenden Hauptlinien von Σ_1 und Σ; sei ferner wie vorhin k eine beliebige Gerade von Σ, und $\varkappa_1$ der entsprechende, durch U_1 gehende Kegelschnitt von Σ_1. Dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Wenn U_1 ausserhalb u_1 liegt, und folglich U ausserhalb u, so kann:

1) u_1 von $\varkappa_1$ in noch zwei reellen Hauptpunkten V_1 und W_1 geschnitten werden. Jede der beiden Ebenen enthält dann ein reelles Dreieck, dessen drei Eckpunkte die Hauptpunkte, und dessen drei Seiten die Hauptlinien der Ebene sind. Jeder Hauptpunkt liegt derjenigen Hauptlinie gegenüber, welche dem zugeordneten Hauptpunkte entspricht (vergl. den Fall 5).

2) u_1 kann von $\varkappa_1$ in einem Hauptpunkte V_1 berührt werden. Dann enthält jede Ebene zwei Hauptpunkte und zwei Hauptlinien. Und zwar sind die Schnittpunkte der zwei Paar Hauptlinien das eine Paar zugeordneter Hauptpunkte; das andere Paar liegt auf den beiden Hauptlinien, welche jenem ersten Paar Hauptpunkten entsprechen.

3) u_1 hat mit $\varkappa_1$ zwei imaginäre Punkte gemein. In jeder Ebene liegt nur ein reeller Hauptpunkt und eine nicht durch denselben gehende reelle Hauptlinie; ausserdem aber zwei imaginäre Hauptpunkte und zwei imaginäre Hauptlinien. Die Hauptpunkte und Hauptlinien jeder Ebene bilden die Eckpunkte und Seiten eines

imaginären Dreiecks, in welchem nur ein Eckpunkt nebst der gegenüberliegenden Seite reell ist.

Liegt dagegen U_1 auf u_1 und folglich U auf u, so kann:

4) u_1 von $\varkappa_1$ in U_1 berührt werden. In diesem Falle enthält jede Ebene nur einen Hauptpunkt und eine durch denselben gehende Hauptlinie.

5) Oder u_1 wird von $\varkappa_1$ in noch einem Hauptpunkte V_1 geschnitten. Da alsdann die entsprechende Hauptlinie v durch U gehen muss, so ist dieser Fall mit dem unter 2) angeführten identisch, abgesehen von der Bezeichnung. Denn aus der Untersuchung über zugeordnete Hauptpunkte ergab sich, dass $\varkappa_1$ in U_1 von jedem andern, einer Geraden l entsprechenden Kegelschnitt λ_1 der Ebene Σ_1 berührt wird, wenn U auf u liegt. Also haben $\varkappa_1$ und λ_1 keinen Hauptpunkt ausser U_1 und V_1 mit einander gemein.

Sei nun P der Schnittpunkt von k und l, so haben die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 ausser den Hauptpunkten von Σ_1 noch denjenigen Punkt P_1 mit einander gemein, welcher dem Punkt P entspricht. Wenn $\varkappa_1$ und λ_1 einander berühren in P_1, so entspricht ihrer gemeinschaftlichen Tangente ein Kegelschnitt, welcher mit jeder der Geraden k und l nur den Schnittpunkt P gemein hat, und also aus zwei durch P gehenden Geraden bestehen muss. Jene Tangente enthält deshalb einen Hauptpunkt, und weil alle Hauptpunkte von Σ_1 auf $\varkappa_1$ und λ_1 liegen, so kann nur P_1 jener Hauptpunkt sein, und P liegt folglich auf einer Hauptlinie. Wenn also P nicht auf einer Hauptlinie von Σ liegt, so müssen $\varkappa_1$ und λ_1 einander *schneiden* in P_1. Wir wollen diesen Fall hier annehmen und bemerken, dass zwei so sich schneidende Kegelschnitte entweder vier Schnittpunkte, von denen zwei imaginär sein können, oder zwei Schnittpunkte und einen Berührungspunkt, oder zwei Schnittpunkte, von denen der eine zugleich Berührungspunkt ist, mit einander gemein haben. Daraus folgt:

> Die Kegelschnitte k_1 und λ_1 schneiden einander und die Hauptlinien im Falle 1) in den drei reellen und im Falle 3) in dem reellen und den beiden imaginären Hauptpunkten. Im Falle 2) dagegen berühren sie einander und die eine Hauptlinie einfach in dem einen Hauptpunkte, und schneiden einander, sowie die zweite Hauptlinie in dem zweiten Hauptpunkte. Endlich im Falle 4) berühren sie einander (dreipunktig) und die Hauptlinie in dem Hauptpunkte.

Hiernach ist es wohl gestattet, die genannten vier Fälle wie folgt zusammen zu fassen:

> *Die Hauptlinien und Hauptpunkte jeder Ebene bilden die Seiten und Eckpunkte eines Dreiecks, welchem jeder, einer Geraden der zweiten Ebene entsprechende Kegelschnitt umschrieben ist, und wel-*

ches das **Hauptdreieck** der Ebene heissen soll. Zwei Seiten und die ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte können conjugirt imaginär sein; auch können zwei oder alle drei Eckpunkte, und damit auch die gegenüberliegenden Seiten zusammenfallen.

Wenn nämlich zwei Eckpunkte eines Dreiecks, welchem zwei Kegelschnitte umschrieben sind, zusammenfallen, so wird die verbindende Seite zu einer gemeinschaftlichen Tangente der Kegelschnitte. Wenn auch der dritte Eckpunkt sich mit den beiden ersten vereinigt, so berühren sich die Kegelschnitte dreipunktig. Werden dagegen zwei Eckpunkte conjugirt imaginär, so ist ihre Verbindungslinie eine ideale Secante der Kegelschnitte. — In der Folge sollen die Hauptdreiecke eigentliche Dreiecke genannt werden, wenn sie je drei reelle Eckpunkte und folglich auch drei reelle Seiten haben, von denen keine zwei zusammenfallen.

Von den vier soeben aufgestellten Fällen haben Steiner und Seydewitz nur den ersten behandelt, und Seydewitz hat den zweiten beiläufig angedeutet. Auch scheint es unmöglich, auf dem Wege, welchen dieselben eingeschlagen haben, zu den übrigen Fällen zu gelangen.

§. 2.

Kegelschnittbüschel. Beziehen von Ebenen auf einander unter gegebenen Bedingungen.

Bekanntlich ist ein Kegelschnitt, welcher drei gegebene Punkte mit einem gegebenen Kegelschnitt gemein haben soll, eindeutig bestimmt, sobald noch irgend zwei, also im Ganzen fünf Punkte desselben bekannt sind. Und zwar dürfen die drei Punkte des gegebenen Kegelschnitts theilweise oder alle auf die oben angegebene Art zusammenfallen, auch können zwei derselben conjugirt imaginär sein. Daraus können wir schliessen:

Jeder dem Hauptdreieck der einen Ebene umschriebene Kegelschnitt entspricht einer Geraden der andern Ebene.

Der Geraden nämlich, welche irgend zwei Punkte verbindet, deren entsprechende auf dem gegebenen Kegelschnitt liegen und keine Hauptpunkte sind, entspricht ein Kegelschnitt, welcher offenbar mit jenem fünf Punkte gemein hat, also mit ihm identisch ist. Streng genommen entspricht übrigens diesem Kegelschnitt nicht nur jene Gerade, sondern ausserdem jede Seite des Hauptdreiecks der zweiten Ebene, also eine Linie vierter Ordnung.

Den sämmtlichen Geraden der Ebene Σ, welche durch einen Punkt P gehen, entsprechen in Σ_1 die sämmtlichen Kegelschnitte, welche dem Hauptdreieck umschrieben sind und durch den entsprechenden Punkt P_1 gehen. Durch jeden andern Punkt Q_1 von Σ_1 geht nur ein einziger Kegelschnitt dieses Linienbüschels P_1, weil durch den entsprechenden Punkt Q nur eine einzige Gerade des Strahlenbüschels P geht. Wenn P auf keiner Haupt-

linie von Σ liegt, so schneiden sich alle jene Kegelschnitte in P_1; liegt dagegen P auf einer Hauptlinie u, so fällt P_1 mit dem entsprechenden Hauptpunkte U_1 zusammen, in welchem sodann alle jene Kegelschnitte einander und diejenige Gerade berühren, welche dem Strahle $\overline{UP}$ des zugeordneten Hauptpunktes U entspricht. Denn die Kegelschnitte haben mit jener Geraden nur den Punkt U_1 gemein, weil ihre entsprechenden Geraden mit $\overline{UP}$ nur den auf u liegenden Punkt P gemein haben. Je nachdem nun das Hauptdreieck $U_1 V_1 W_1$ von Σ_1 reell oder imaginär ist, und je nachdem keine, oder zwei, oder alle Hauptpunkte desselben zusammenfallen, haben die Kegelschnitte des Büschels P_1 eine der folgenden Lagen zu einander:

A. Wenn P auf keiner Hauptlinie von Σ liegt, und folglich P_1 mit keinem Hauptpunkte von Σ_1 zusammenfällt:

1) Sämmtliche Kegelschnitte des Büschels P_1 schneiden sich in den vier Punkten P_1, U_1, V_1, W_1, von denen zwei, etwa V_1 und W_1, auch imaginär sein können;
2) Sie schneiden sich in zwei reellen Punkten P_1 und U_1, und berühren einander einfach in einem dritten Punkte V_1;
3) Sie schneiden einander in zwei Punkten P_1 und U_1, und berühren einander zugleich dreipunktig im letzteren U_1.

B. Liegt dagegen P auf einer Hauptlinie u von Σ, und fällt sonach P_1 zusammen mit dem entsprechenden Hauptpunkte U_1 von Σ_1, so folgt:

4) Sämmtliche Kegelschnitte berühren einander einfach in U_1, und schneiden einander in zwei reellen oder imaginären Punkten V_1 und W_1;
5) Sie berühren einander einfach in zwei Punkten U_1 und V_1;
6) Sie berühren einander vierpunktig in U_1.

Alle diese sechs Fälle lassen sich zusammenfassen zu dem Satze:

Die sämmtlichen Kegelschnite des Büschels sind einem Viereck $U_1 V_1 W_1 P_1$ umschrieben.

Wir brauchen nämlich nur anzunehmen, dass zwei von den Eckpunkten des Vierecks conjugirt imaginär sein dürfen, sowie dass beliebig zwei, drei oder alle Eckpunkte zusammenfallen können. Denn fallen nur zwei Eckpunkte zusammen, so entsteht einer der Fälle 2) oder 4); fallen drei zusammen, so erhalten wir den Fall 3); vereinigen sich zweimal zwei Eckpunkte, so entsteht 5), und vereinigen sich alle vier, so haben wir die vierpunktige Berührung von 6).

Der Kegelschnittbüschel P_1 soll zu dem ihm entsprechenden Strahlenbüschel P projectivisch heissen, weil jeder Geraden a, welche den letzteren schneidet, im Allgemeinen ein projectivischer Kegelschnitt a_1 entspricht, welcher durch P_1 geschnitten wird, so dass nämlich je zwei entsprechende

Punkte von a und α_1 auf zwei entsprechenden Linien der Büschel P und P_1 liegen. Geht die Gerade a durch einen Hauptpunkt U, so entspricht ihr eine projectivische Gerade a_1, die durch den zugeordneten Hauptpunkt U_1 geht, und für welche ganz dasselbe gilt, wie für den Kegelschnitt α_1. Endlich wird auch jede Gerade g_1, welche durch P_1 geht, von dem Kegelschnittbüschel P_1, und der entsprechende, durch P gehende Kegelschnitt γ von dem Strahlenbüschel P so geschnitten, dass g_1 und γ projectivisch auf einander bezogen werden.

Wir wollen den Kegelschnittbüschel P_1 auch zu jedem Gebilde projectivisch nennen, welches zu dem Strahlenbüschel P projectivisch ist; so dass P_1 nicht nur zu allen Geraden a und allen durch P gehenden Kegelschnitten γ, welche vom Büschel P geschnitten werden, sondern auch zu den entsprechenden Kegelschnitten α_1 und Geraden g_1 projectivisch ist. Da aber jeder Punkt von α_1 oder g_1 auf dem ihm entsprechenden Kegelschnitt des Büschels P_1 liegt, so ist es zweckmässig, von diesen Gebilden zu sagen, sie liegen perspectivisch zum Büschel P_1. Je zwei zum Büschel P_1 (und folglich auch zu P) projectivische Gebilde sind auch zu einander projectivisch. Um so mehr folgt:

Gerade und Kegelschnitte, welche zu einem Büschel von Kegelschnitten perspectivisch liegen, sind zu einander projectivisch.

Wir nennen deshalb vier Kegelschnitte des Büschels harmonisch, wenn sie eine und folglich jede Gerade, die durch einen Hauptpunkt, sowie jeden Kegelschnitt, der durch drei Hauptpunkte des Büschels hindurchgeht, in vier harmonischen Punkten schneiden. Um einen Kegelschnittbüschel auf irgend ein anderes Gebilde, z. B. eine Gerade, projectivisch zu beziehen, brauchen wir nur letztere auf irgend ein zum Kegelschnittbüschel perspectivisches Gebilde projectivisch zu beziehen. Also dürfen wir irgend drei Kegelschnitte des Büschels drei beliebigen Punkten der Geraden willkürlich zuweisen, wodurch aber dann jedem Kegelschnitt des Büschels ein bestimmter Punkt der Geraden zugewiesen ist. Daraus folgt indirect:

Wenn ein Kegelschnittbüschel P_1 projectivisch ist zu einer Geraden g_1, die durch einen Hauptpunkt, oder zu einem Kegelschnitt α_1, der durch drei Hauptpunkte des Büschels geht, und wenn drei Punkte von g_1 oder α_1 auf den ihnen entsprechenden Kegelschnitten von P_1 liegen, so ist g_1 oder α_1 perspectivisch zu P_1.

Endlich stelle ich noch den folgenden Satz auf:

Wenn die Kegelschnitte eines Büschels P_1 in einem Hauptpunkte U_1 von verschiedenn Geraden berührt werden, so bilden diese sämmtlichen Tangenten einen zu P_1 projectivischen Strahlenbüschel U_1.

Denn der zugeordnete Strahlenbüschel U liegt zum Strahlenbüschel P per-

spectivisch, indem je zwei entsprechende Strahlen sich auf der Hauptlinie u schneiden.

Diese Sätze gelten für jeden Büschel von Kegelschnitten, welche einem Viereck umschrieben sind; und zwar können irgend drei von den Eckpunkten des Vierecks (von denen auch zwei imaginär sein und beliebig viele zusammenfallen dürfen) als Hauptpunkte der Ebene angesehen werden. Denn auf diese Ebene Σ_1 lässt sich eine zweite Ebene Σ stets so beziehen, dass zwischen Σ_1 und Σ eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades besteht, und zugleich jene drei Eckpunkte die Hauptpunkte von Σ_1 bilden. Weil aber dann nach dem am Eingang dieses Paragraphen aufgestellten Satze dem Kegelschnittbüschel ein Strahlenbüschel entspricht, so sind unsere Sätze über Kegelschnittbüschel evident. Die Möglichkeit jedoch, zwei Ebenen Σ_1 und Σ in der soeben angegebenen Weise auf einander zu beziehen, ergiebt sich aus folgendem Satze:

> Soll zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 eine Verwandtschaft zweiten Grades aufgestellt werden, so können in Σ irgend zwei Gerade k und l angenommen, und auf diese irgend zwei Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 in Σ_1 resp. projectivisch so bezogen werden, dass einem gemeinschaftlichen reellen Punkte P_1 der letzteren der Schnittpunkt P von k und l entspricht. Dadurch aber ist nicht nur jedem Punkte von k und l ein bestimmter Punkt von resp. $\varkappa_1$ und λ_1, sondern überhaupt jedem Punkte von Σ ein Punkt von Σ_1 zugewiesen; und jeder Geraden von Σ oder Σ_1 entspricht im Allgemeinen ein Kegelschnitt in Σ_1 oder Σ.

Das Hauptdreieck in Σ_1, welchem die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 umschrieben sind, kann also ganz willkürlich angenommen werden, und muss z. B. nicht nothwendig ein eigentliches Dreieck sein.

Zum Beweise unseres Satzes beziehen wir die Ebenen Σ und Σ_1 reciprok so auf einander, dass der Punkt P von Σ eine durch P_1 gehende Gerade von Σ_1 zur Polaren hat, dass ferner die Punkte K_1 und L_1, in welchen die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 zum zweiten Male von dieser Geraden geschnitten werden, die Pole der resp. Geraden k und l sind, und dass endlich jeder Punkt der letzteren denjenigen Strahl von resp. K_1 und L_1 zur Polaren hat, welcher durch den entsprechenden Punkt von $\varkappa_1$ oder λ_1 hindurchgeht. Indem wir der Geraden $\overline{K_1 L_1 P_1}$ eine andere Lage geben, beziehen wir die Ebenen Σ und Σ_1 noch einmal reciprok so auf einander, dass die Polaren der sämmtlichen Punkte von k und l zwei zu resp. $\varkappa_1$ und λ_1 perspectivische Strahlenbüschel K_1 und L_1 bilden. Da aber jetzt jeder Punkt von Σ zwei Polaren in Σ_1 besitzt, so sind die Ebenen gleichzeitig so auf einander bezogen, dass jedem Punkte von Σ im Allgemeinen ein Punkt von Σ_1, und

jeder Geraden ein Kegelschnitt entspricht; und zwar entsprechen namentlich den Punkten von k und l die ihnen in resp. $\varkappa_1$ und λ_1 von vornherein zugewiesenen Punkte.

Es könnte scheinen, dass mehr als eine den Annahmen genügende geometrische Verwandtschaft zweiten Grades zwischen Σ und Σ_1 möglich sei, weil die Gerade $\overline{K_1 L_1 P_1}$ nicht bloss zwei, sondern unzählig viele Lagen annehmen kann. Allein die Kegelschnitte $\varkappa_1$ und λ_1 bestimmen sofort das Hauptdreieck der Ebene Σ_1, weil jeder von P_1 verschiedene Punkt, den $\varkappa_1$ und λ_1 mit einander gemein haben, ein Hauptpunkt von Σ_1 ist, und auch der Punkt P_1, wenn in ihm jene Kegelschnitte einander berühren. Und jeder Geraden von Σ, welche k und l in zwei Punkten schneidet, entspricht daher in Σ_1 ein Kegelschnitt, welcher mit $\varkappa_1$ und λ_1 die entsprechenden beiden Punkte gemein hat, und ausserdem jenem Hauptdreieck umschrieben, also völlig bestimmt ist. Daraus folgt, dass jedem Punkte von Σ, da derselbe als Schnittpunkt von zwei Geraden betrachtet werden kann, ein ganz bestimmter Punkt, nämlich der vierte gemeinschaftliche Punkt der entsprechenden beiden Kegelschnitte von Σ_1, zugewiesen ist, wie oben behauptet wurde.

Wir schliessen aus dieser Untersuchung, dass zwischen Σ und Σ_1 eine gegebene Verwandtschaft zweiten Grades auf unzählig viele Arten dadurch erzeugt werden kann, dass Σ und Σ_1 in doppelter Weise auf einander reciprok bezogen werden. Oder man kann Σ und Σ_1 auf unendlich viele Arten reciprok auf einander beziehen, so dass die sämmtlichen Polaren eines Punktes von Σ sich in dem entsprechenden Punkte von Σ_1 schneiden, die sämmtlichen Pole einer Geraden aber auf dem ihr entsprechenden Kegelschnitt liegen, und dass allemal dem Hauptdreieck von Σ das Hauptdreieck von Σ_1 reciprok entspricht. Ich will diesen wichtigen Satz noch einmal direct beweisen und wie folgt aussprechen:

> Werden die Ebenen Σ und Σ_1 in dreifacher Weise reciprok auf einander bezogen, so dass die Polaren der drei Hauptpunkte von Σ mit den entsprechenden Hauptlinien von Σ_1 zusammenfallen, und dass die drei Polaren a_1, a'_1 und a''_1 irgend eines zu keiner Hauptlinie gehörigen Punktes A von Σ sich in einem eben solchen Punkte A_1 von Σ_1 schneiden, so müssen sich die Polaren jedes Punktes P von Σ in einem Punkte P_1 von Σ_1 schneiden.

Die Polaren der sämmtlichen Punkte einer durch A gehenden Geraden k bilden drei zu k und folglich auch zu einander projectivische Strahlenbüschel K_1, K'_1 und K''_1. In diesen entsprechen dem Punkte A die Strahlen a_1, a'_1 und a''_1, und dem Schnittpunkte von k mit einer Hauptlinie von Σ die drei nach dem entsprechenden Hauptpunkte von Σ_1 gehenden Strah-

len. Also erzeugt der Strahlenbüschel K_1 mit den ihm projectivischen K'_1 und K''_1 zwei dem Hauptdreieck von Σ_1 umschriebene Kegelschnitte, welche auch die Punkte K_1 und A_1, oder zusammen fünf Punkte gemein haben und deshalb identisch sind. In jedem Punkte der Curve schneiden sich somit drei einander entsprechende Strahlen der Büschel K_1, K'_1 und K''_1; oder die Polaren p_1, p'_1 und p''_1 jedes beliebigen Punktes P der Geraden k schneiden sich in einem Punkte P_1. Da nun k ein ganz beliebiger Strahl des Punktes A ist, so ist auch P ein ganz beliebiger Punkt der Ebene Σ, und der Satz somit bewiesen.

Wenn a_1 sich dreht um A_1, so muss der Punkt K_1 dieser Geraden sich auf dem durch die Büschel K'_1 und K''_1 erzeugten Kegelschnitt bewegen. Also dreht sich auch die Gerade p_1, welche von a_1 im Punkte K_1 geschnitten wird, um ihren Punkt P_1, und die so beschriebenen Strahlenbüschel A_1 und P_1 sind projectivisch in Ansehung ihrer entsprechenden Strahlen a_1 und p_1, weil diese sich schneiden auf einem durch A_1 und P_1 gehenden Kegelschnitt. So oft a_1 durch einen Hauptpunkt von Σ_1 geht, muss p_1 durch denselben Hauptpunkt gehen, weil dieser auch auf jenem Kegelschnitt liegt. Also:

> Werden zwei Ebenen Σ und Σ_1 beliebig oft reciprok auf einander bezogen, so dass alle Polaren eines jeden Punktes von Σ durch einen und denselben Punkt von Σ_1 hindurchgehen, so bilden die Polaren von irgend zwei beliebigen Punkten A und P von Σ zwei Strahlenbüschel A_1 und P_1, welche projectivisch sind in Ansehung ihrer, jenen Punkten A und P gleichzeitig entsprechenden Strahlen.

Nur die Hauptpunkte von Σ bilden eine Ausnahme, weil die Polaren eines jeden derselben keinen Strahlenbüschel ausmachen, sondern zusammenfallen. Wie man leicht sieht, lässt sich dieser nicht unwichtige Satz allgemeiner so darstellen:

> Werden die Ebenen Σ und Σ_1 reciprok so auf einander bezogen, dass den Eckpunkten eines in Σ gegebenen Dreiecks die resp. Seiten eines in Σ_1 gegebenen Dreiecks entsprechen, einem vierten gegebenen Punkte A von Σ aber eine beliebige Gerade a_1 von Σ_1, so ist jedem Punkte P von Σ eine bestimmte Gerade p_1 von Σ_1 als Polare zugewiesen. Beschreibt dann a_1 irgend ein System von Geraden, so beschreibt p_1 ein collineares System von Geraden.

So oft nämlich a_1 einen Strahlenbüschel A_1 beschreibt, muss p_1 einen projectivischen Strahlenbüschel P_1 beschreiben, woraus sich der Satz ergiebt. Wenn also die Polare von A durch einen gegebenen Punkt A_1 geht, so muss auch die Polare jedes anderen Punktes P von Σ durch einen bestimmten

Punkt P_1 von Σ_1 hindurchgehen. Da aber Σ und Σ_1 in Ansehung ihrer so einander entsprechenden Punkte P und P_1 geometrisch verwandt sind, so folgt:

> Soll zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades aufgestellt werden, so können nicht nur irgend zwei eigentliche Dreiecke derselben einander als Hauptdreiecke zugeordnet werden, sondern es kann noch zu irgend einem Punkte A von Σ der entsprechende A_1 von Σ_1 willkürlich gewählt werden. Dadurch ist aber jedem Punkte P von Σ der entsprechende Punkt P_1 von Σ_1 zugewiesen.

Zugleich leuchtet ein, dass zu jedem Punkte der entsprechende durch lineare Constructionen gefunden werden kann, so gut wie in zwei reciproken Ebenen zu jedem Punkte die Polare. Die Punkte A und A_1 dürfen jedoch auf keiner Hauptlinie der Systeme angenommen werden.

Sind die einander zugeordneten Hauptdreiecke keine eigentlichen Dreiecke (fallen z. B. je zwei Eckpunkte derselben zusammen), so ist die reciproke Verwandtschaft der Ebenen Σ und Σ_1 nicht immer völlig bestimmt, wenn wir die Hauptdreiecke reciprok auf einander beziehen und ausserdem dem Punkte A eine durch A_1 gehende Gerade als Polare zuweisen. In diesem Falle können wir deshalb, um zwischen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft aufzustellen, ausser den einander zugeordneten Hauptdreiecken und den Punkten A und A_1 noch andere entsprechende Elemente einander zuweisen. Eine Untersuchung, welche von dem Satze ausgeht, dass je zwei zugeordnete Hauptbüschel der Ebenen zu einander projectivisch sind, und die ich der Kürze wegen unterdrücken muss, ergiebt Folgendes: Sind die Hauptdreiecke imaginär, so können die Ebenen nur auf zweierlei Art so auf einander geometrisch bezogen werden, dass auch A und A_1 einander entsprechen; dagegen auf unendlich viele Arten, wenn zwei oder alle Eckpunkte jedes Hauptdreiecks zusammenfallen. Vereinigen sich nämlich je zwei Eckpunkte in V und V_1, während U und U_1 den jedesmaligen dritten Eckpunkt bezeichnen, so kann noch irgend einem Strahle von U ein beliebiger Strahl von U_1 zugewiesen werden. Vereinigen sich dagegen in resp. U und U_1 alle Eckpunkte der Hauptdreiecke, so können nicht nur die Punkte A und A_1, sondern noch zwei beliebige andere Punkte B und B_1 einander zugewiesen werden. — Dass auf demselben Wege auch der obige Satz gefunden wird, hat schon Seydewitz nachgewiesen.

Die bisherigen Entwickelungen liefern uns nun die Mittel, folgende wichtige Frage zu lösen: „Wie viele Punktenpaare von zwei Ebenen dürfen einander willkürlich zugewiesen werden, wenn zwischen diesen Ebenen eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades aufgestellt werden soll?“ Ich werde zeigen, dass die gesuchte Anzahl gleich sieben ist,

und dass zu jedem achten Punkte der einen Ebene der entsprechende in der anderen Ebene durch lineare Construction gefunden werden kann. Um die Wichtigkeit dieser Untersuchung gebührend hervorzuheben, bemerke ich, dass aus derselben ein synthetischer Beweis des bekannten Satzes sich ergiebt:

> Eine Fläche zweiter Ordnung ist im Allgemeinen durch neun ihrer Punkte oder durch neun ihrer Berührungsebenen bestimmt.

Auch gewinnen wir, was wichtiger ist, eine Lösung der berühmten Aufgabe:

> Von einer so bestimmten Fläche zweiter Ordnung beliebig viele neue Punkte oder Berührungsebenen linear zu construiren.

Nämlich eine Fläche zweiter Ordnung wird aus irgend zwei ihrer Punkte durch geometrisch verwandte Strahlenbündel projicirt. Durch sieben weitere Punkte der Fläche sind also sieben Paar entsprechender Strahlen dieser Bündel gegeben, und zu jedem achten Strahl des einen Bündels lässt sich sonach der entsprechende des anderen durch lineare Constructionen finden, und der Schnittpunkt beider ist dann ein neuer Punkt der Fläche. Eine gegebene Fläche zweiter Ordnung kann auch durch zwei Strahlenbündel, deren Mittelpunkte in ihr liegen, auf unendlich viele Arten dadurch erzeugt werden, dass man diese Bündel reciprok auf einander bezieht, indem sodann jeder Strahl des einen Bündels von der entsprechenden Ebene des anderen in einem Punkte der Fläche geschnitten wird. Darnach lässt sich der obige Satz über diese Flächen auch auf folgenden zurückführen:

> Zwei Ebenen Σ und Σ_1 können auf unendlich viele Arten reciprok so auf einander bezogen werden, dass sieben gegebene Punkte A, B, C, D, E, F, G von Σ die Pole sind von sieben Geraden, welche bezüglich durch sieben gegebene Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$ von Σ_1 hindurchgehen. Für je acht in beiden Ebenen gegebene Punkte lässt sich jedoch im Allgemeinen nur **eine** solche reciproke Verwandtschaft aufstellen.

Um diesen Satz zu beweisen und zugleich die darin enthaltene Constructionsaufgabe zu lösen, nehmen wir zunächst in Σ_1 irgend vier durch resp. A_1, B_1, C_1 und D_1 gehende Gerade a_1, b_1, c_1 und d_1 an als Polaren der resp. Punkte A, B, C und D von Σ. Dann entspricht dem Punkte E eine ganz bestimmte Polare e_1. Lassen wir nun d_1 sich drehen um D_1, so dreht sich e_1 gleichzeitig um einen bestimmten Punkt, und beschreibt einen zum Strahlenbüschel D_1 projectivischen Büschel. Bei irgend einer Lage von d_1 muss deswegen e_1 durch den Punkt E_1 hindurchgehen, und zwar ist diese besondere Lage von d_1 und e_1 durch lineare Constructionen zu bestimmen. Dasselbe kann für eine beliebig veränderte Lage der durch C_1 gehenden Geraden c_1 geschehen. Wir können also die Ebenen Σ und Σ_1 auf unendlich

viele Arten reciprok so auf einander beziehen, dass jedesmal den Punkten A und B von Σ zwei bestimmte Gerade a_1 und b_1 von Σ_1 als Polaren zugewiesen sind, den Punkten C, D und E aber drei durch resp. C_1, D_1 und E_1 gehende Gerade c_1, d_1 und e_1; oder:

> Wenn zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades aufgestellt werden soll, so können in Σ zwei Hauptpunkte A und B und noch drei beliebige andere Punkte C, D und E angenommen, und denselben als resp. entsprechende in Σ_1 zwei beliebige Hauptlinien a_1 und b_1 und drei Punkte C_1, D_1 und E_1 zugewiesen werden. Dadurch ist aber im Allgemeinen jedem Punkte von Σ ein Punkt von Σ_1 zugewiesen.

Beziehen wir nun Σ und Σ_1 auf die oben angegebene Art beliebig oft reciprok auf einander, so bilden die sämmtlichen Polaren von irgend zwei Punkten C und F der Σ zwei projectivische Strahlenbüschel in Σ_1. Bei irgend einer Lage der Polaren c_1 von C muss daher die Polare f_1 von F durch den gegebenen Punkt F_1 gehen. Wir können aber auch der durch B_1 gehenden Geraden b_1 eine beliebig veränderte Lage geben, und wieder die Polaren c_1, d_1, e_1, f_1 von C, D, E, F linear so construiren, dass sie durch resp. C_1, D_1, E_1, F_1 gehen und die Ebenen Σ und Σ_1 reciprok auf einander bezogen sind. Also:

> Die Ebenen Σ und Σ_1 lassen sich auf eine einzige Weise geometrisch so auf einander beziehen, dass dem Hauptpunkte A und den beliebigen fünf Punkten B, C, D, E, F die Hauptlinie a_1 und irgend fünf Punkte B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 zugewiesen sind.

Unter allen Lagen von b_1 und den zugehörigen von c_1, d_1, e_1 und f_1 giebt es aber wieder eine, bei welcher die Polare g_1 des Punktes G durch den gegebenen Punkt G_1 hindurchgeht. Denn beschreibt b_1 den Strahlenbüschel B_1, so beschreibt gleichzeitig g_1 einen zu B_1 projectivischen Büschel, von welchem ein Strahl durch G_1 hindurchgehen muss. Diese Lage des Strahles g_1 ist gleichfalls durch lineare Constructionen zu bestimmen, welche Lage auch die durch A_1 gehende Gerade a_1 haben mag. Also können die Ebenen Σ und Σ_1 auf unzählig viele Arten und mittelst linearer Constructionen reciprok so auf einander bezogen werden, dass den sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G von Σ als Polaren sieben durch resp. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 gehende Gerade a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1 von Σ_1 entsprechen, und unser Satz ist somit bewiesen. Zugleich folgt:

> Zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 ist eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades eindeutig bestimmt, wenn sieben gegebenen Punkten der einen

Ebene sieben gegebene Punkte der anderen Ebene zugewiesen sind.

Dieser Satz enthält die vorhergehenden, wenn ein gegebener Hauptpunkt der einen Ebene und die entsprechende Hauptlinie der anderen für je zwei Punkte gezählt werden.

Uebrigens können die gegebenen sieben Punkte jeder Ebene solche besondere Lage zu einander haben, dass durch sie die geometrische Verwandtschaft der Ebenen nicht völlig bestimmt ist. Bei der oben angeführten Construction kann z. B. der Fall eintreten, dass der Strahlenbüschel, welcher während der Drehung von b_1 um B_1 gleichzeitig von g_1 beschrieben wird, den Punkt G_1 selbst zum Mittelpunkte hat. Die nähere Erörterung dieser Ausnahmefälle muss ich der Kürze wegen übergehen.

Da bei der Drehung von a_1 um A_1 auch jede achte Gerade h_1, die von einem Punkte H die Polare ist, einen Strahlenbüschel beschreibt, so lässt sich offenbar im Allgemeinen eine einzige Lage von a_1 bestimmen, so dass h_1 durch einen gegebenen Punkt H_1 hindurchgeht.

Zwischen zwei Ebenen Σ und Σ_1 ist eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades u. A. auch dann im Allgemeinen völlig bestimmt, wie leicht zu erkennen, wenn in ihnen gegeben sind:

1) ein Paar zugeordneter Hauptpunkte U und U_1 nebst den entsprechenden Hauptlinien u_1 und u (so dass u und u_1 nicht durch resp. U und U_1 gehen), sowie drei Paare entsprechender Punkte; oder
2) das Hauptdreieck von Σ nebst vier Paaren entsprechender Punkte. Durch je zwei Punkte von Σ_1 ist nämlich eine Gerade, durch die entsprechenden beiden Punkte von Σ aber der entsprechende Kegelschnitt bestimmt, u. s. w.
3) Oder wenn gegeben sind zwei Paar projectivischer Strahlenbüschel, deren Mittelpunkt U und U_1 sowie V und V_1 zwei Paare zugeordneter Hauptpunkte der Ebenen sind. Jeder Punkt P von Σ bestimmt nämlich zwei Strahlen von U und V, deren entsprechende Strahlen der Büschel U_1 und V_1 sich in dem entsprechenden Punkte P_1 schneiden. Von dieser Annahme ist Seydewitz ausgegangen. Von den Hauptpunkten jeder Ebene können in diesem Falle keine zwei imaginär sein; auch können nicht alle drei zusammenfallen.
4) Es könnten auch gegeben sein zwei Kegelschnittbüschel, die einem Dreieck (dem Hauptdreieck) von Σ_1 umschrieben sind, und zwei zu jenen resp. projectivische Strahlenbüschel in Σ, so jedoch, dass dem gemeinschaftlichen Kegelschnitt der ersteren der gemeinschaftliche Strahl der letzteren entspricht.

Es lassen sich unschwer noch weitere Fälle aufstellen.

Durch die obigen Entwickelungen ist beiläufig auch die Aufgabe gelöst:

Wenn in zwei Ebenen Σ und Σ_1 je sieben einander entsprechende Punkte gegeben sind, so soll je ein

achter Punkt U und U_1 so bestimmt werden, dass die Strahlenbüschel U und U_1 projectivisch sind in Ansehung derjenigen sieben Strahlenpaare, welche die gegebenen Punkte projiciren.

Nämlich U und U_1 sind zwei zugeordnete Hauptpunkte der mittelst jener sieben Punktenpaare geometrisch auf einander bezogenen Ebenen Σ und Σ_1. Die Aufgabe hat also stets eine, und im Allgemeinen höchstens drei Lösungen.

§. 3.

Besondere Lagen der Ebenen Σ und Σ_1 zu einander.

Wir haben gesehen, dass zwei geometrisch verwandte Ebenen Σ und Σ_1 mindestens je einen reellen Hauptpunkt U und U_1 haben, und zwar ist U dem U_1 zugeordnet, so dass die Hauptbüschel U und U_1 einander entsprechen und projectivisch sind. Wir können deshalb die Ebenen Σ und Σ_1 in eine solche Lage zu einander bringen, dass die Büschel U und U_1 perspectivisch liegen, d. h. Schnitte eines und desselben Ebenenbüschels sind, dessen durch U und U_1 gehende Axe mit z bezeichnet werde. Je zwei einander entsprechende Gerade g und g_1 von U und U_1 bestimmen dann eine durch z gehende Ebene; und die Verbindungslinien ihrer einander entsprechenden Punkte bilden die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnittes, der auch die Geraden g und g_1 berührt. Auch wird z geschnitten von jeder Geraden, welche zwei entsprechende Punkte der Ebenen mit einander verbindet.

Projiciren wir die Ebenen Σ und Σ_1 beziehungsweise aus zwei auf der Axe z liegenden Punkten S und S_1, so entstehen zwei geometrisch verwandte Strahlenbündel. Je zwei entsprechender Strahlen dieser Bündel schneiden einander, weil die durch sie projicirten Punkte von Σ und Σ_1 mit $\overline{SS_1}$ oder z in einer Ebene liegen. Der Ort aller solcher Schnittpunkte heisst eine Fläche zweiter Ordnung, welche nämlich mit jeder durch S oder S_1 gelegten Ebene einen durch resp. S oder S_1 gehenden Kegelschnitt, und folglich mit jeder Geraden, die nicht ganz in die Fläche hineinfällt, höchstens zwei Punkte gemein hat. Denn einer solchen Ebene ven S, d. h. den sämmtlichen in derselben liegenden Strahlen von S, entspricht in S_1 eine Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den Strahl $\overline{SS_1}$ enthält, und mit jener Ebene den erwähnten, durch S gehenden Kegelschnitt gemein hat; oder auch die Ebene entspricht sich selbst, wenn sie nämlich durch $\overline{SS_1}$ geht, und dann liegen in ihr zwei projectivische Strahlenbüschel S und S_1, welche den Kegelschnitt erzeugen. Derselbe hann auch in zwei Gerade zerfallen.

Je nachdem die Ebenen Σ und Σ_1 je zwei, je einen oder keinen von U resp. U_1 verschiedenen reellen Hauptpunkt besitzen, schneiden sich die Strahlenbündel S und S_1 in einem einfachen Hyperboloid, welches auch in

ein hyperbolisches Paraboloid ausarten kann, oder in einer Kegelfläche, oder in einer Fläche zweiter Ordnung, die keine Geraden enthält, also entweder ein Ellipsoid, oder ein elliptisches Paraboloid, oder ein zweifaches Hyperboloid sein muss. Die von z verschiedenen Hauptstrahlen der Bündel liegen nämlich ganz in der erzeugten Fläche zweiter Ordnung. Diejenigen beiden Hauptlinien u_1 und u der Ebenen Σ_1 und Σ, welche den Hauptpunkten U und U_1 entsprechen, werden aus resp. S_1 und S durch zwei Berührungsebenen der Fläche zweiter Ordnung projicirt. Denn jeder in einer dieser Ebenen liegende Strahl von S und S_1 entspricht dem gemeinschaftlichen Hauptstrahle $\overline{SS_1}$ der Bündel, und berührt die Fläche zweiter Ordnung, weil er mit derselben nur den Punkt S oder S_1 gemein hat. Eine Ausnahme machen nur die etwaigen Hauptstrahlen von S oder S_1, welche in jenen Berührungsebenen liegen, und welche mit allen ihren Punkten der Fläche angehören.

Werden die Ebenen Σ und Σ_1 in einander gelegt, so ist die Frage, wie viele Paare entsprechender Punkte dann auf einander fallen können. Da Σ in doppelter Weise reciprok auf Σ_1 bezogen ist, so folgt, dass jeder Punkt A von Σ, welcher mit seinem entsprechenden Punkte A_1 von Σ_1 zusammenfällt, also sich selbst entspricht, auf jeder der beiden Polaren liegt, die A in Σ_1 besitzt. Daraus ergiebt sich sofort:

> Wenn drei Punkte einer Geraden sich selbst entsprechen, so fällt jeder Punkt der Geraden mit seinem entsprechenden zusammen.

Denn die Gerade liegt in diesem Falle perspectivisch zu jedem der beiden Strahlenbüschel, welche von den Polaren ihrer sämmtlichen Punkte gebildet werden. Uebrigens geht in diesem Falle die Gerade durch zwei zugeordnete reelle Hauptpunkte der Ebenen. Schneiden sich die Ebenen in einer Geraden, deren sämmtliche Punkte sich selbst entsprechen, und verbindet man die beiden anderen Paare zugeordneter Hauptpunkte, die für den Augenblick als reell angenommen werden mögen, durch zwei Gerade, so zeigt sich sofort, dass je zwei entsprechende Punkte mit jeder dieser Geraden in einer Ebene liegen. Die sämmtlichen Verbindungslinien entsprechender Punkte werden also von zwei festen Geraden geschnitten. Dieser besondere Fall ist es, welchen Steiner (a. a. O.) mit gewohnter Meisterschaft eingehend untersucht hat.

Seydewitz zeigte zuerst (in Grunert's Archiv Bd. 8, p. 35), dass diejenigen Punkte von zwei in einander gelegten reciproken Ebenen, welche auf ihren Polaren liegen, einen Kegelschnitt bilden, der sich aber auf Gerade oder auf einen Punkt reduciren, oder aber imaginär werden kann. Also giebt es in Σ zwei Kegelschnitte, deren sämmtliche Punkte auf einer ihrer beiden Polaren in Σ_1 liegen. Die gemeinschaftlichen Punkte

dieser beiden Kegelschnitte liegen also auf jeder ihrer beiden Polaren, und fallen mit ihren entsprechenden zusammen; oder:

> Zwei in einander gelegte, geometrisch verwandte Ebenen haben im Allgemeinen und höchstens vier (reelle oder imaginäre) Punkte entsprechend gemein, und nur ausnahmsweise die sämmtlichen Punkte eines Kegelschnitts oder auch einer oder zwei Geraden.

Dieser Ausnahmefall tritt namentlich dann ein, wenn zwei zugeordnete Hauptbüschel U und U_1 der Ebenen projectivisch gleich sind und zur Deckung gebracht werden. Denn weil alsdann jeder Punkt mit seinem entsprechenden auf einer durch U gehenden Geraden liegt, so ist er in jeder seiner Polaren enthalten, sobald er auf einer derselben liegt. Die im obigen Beweise erwähnten beiden Kegelschnitte decken also einander. Eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch zwei geometrisch verwandte Strahlenbündel erzeugt wird, hat deshalb mit jeder beliebigen Ebene einen Kegelschnitt gemein, welcher jedoch auch imaginär werden, oder sich auf eine oder zwei Gerade oder auch einen Punkt reduciren kann. Denn in der Ebene liegen zwei geometrisch verwandte Schnitte der Strahlenbündel so, dass zwei zugeordnete Hauptbüschel einander decken. Uebrigens lässt sich diese Eigenschaft der Flächen 2ter Ordnung auch direct aus der oben aufgestellten Definition folgern.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich sehr einfach durch Projiciren aus einem beliebigen Punkte:

> Liegen zwei geometrisch verwandte Ebenen nicht in einander, so gehen von den sämmtlichen Verbindungslinien entsprechender Punkte höchstens vier durch einen beliebigen Punkt des Raumes, und nur durch gewisse Punkte, zu denen auch die Hauptpunkte der Ebenen gehören, gehen unendlich viele solche Verbindungslinien, welche dann in einer Kegelfläche zweiter Ordnung, oder auch in einer oder zwei Ebenen liegen.

Zwei auf einander gelegte geometrisch verwandte Ebenen Σ und Σ_1 können auch involutorisch liegen, so dass jeder Punkt einem anderen doppelt entspricht, zu welcher der beiden Ebenen wir nämlich den ersteren auch rechnen mögen. In diesem Falle muss jeder Hauptpunkt U von Σ mit einem Hauptpunkte von Σ_1 zusammenfallen, weil jeder durch U gelegten Geraden a eine Gerade a_1 doppelt entspricht, und also a auch einen Hauptpunkt von Σ_1 enthält, unendlich viele Hauptpunkte aber in Σ_1 nicht vorhanden sein können. Auch die Hauptlinien fallen deshalb paarweise zusammen; denn auch ihnen entspricht ein Hauptpunkt doppelt. Wenn also entweder in jeder Ebene nur ein reeller Hauptpunkt existirt, oder wenn der eine und daher jeder von zwei zugeord-

neten Hauptpunkten auf der entsprechenden Hauptlinie des anderen liegt, so fallen je zwei zugeordnete Hauptpunkte auf einander. Hat dagegen jede Ebene drei reelle Hauptpunkte, so kann entweder jeder Hauptpunkt mit seinem zugeordneten zusammenfallen; oder von zwei Hauptpunkten V und W der Ebene Σ fällt der eine und folglich jeder zusammen mit dem zugeordneten Hauptpunkte (W_1 oder V_1 in Σ_1) des anderen, eben deshalb aber fällt der dritte Hauptpunkt U von Σ mit dem ihm zugeordneten U_1 von Σ_1 zusammen. Also:

> Liegen zwei geometrisch verwandte Ebenen involutorisch, so fallen entweder nur irgend zwei (U und U_1) oder je zwei zugeordnete Hauptpunkte auf einander. Die Strahlenbüschel U und U_1 fallen entweder mit je zwei einander entsprechenden Strahlen zusammen, oder sie liegen involutorisch.

Der zweite Theil dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar daraus, dass die Büschel U und U_1 projectivisch sind, und dass je zwei Punkte der Ebene einander doppelt entsprechen.

Die Untersuchungen der synthetischen Geometrie führen häufig auf involutorische Systeme dieser Art. Nimmt man z. B. in der Ebene einen Kegelschnitt $\varkappa$ (oder allgemeiner ein Polarsystem) und einen festen Punkt U an, und nennt zwei Punkte P und P_1 einander entsprechend, von denen jeder in Bezug auf $\varkappa$ in der Polaren des anderen liegt, und deren Verbindungslinie durch U geht, so entsteht ein involutorisches System, in welchem U ein Hauptpunkt ist, und jeder Strahl von U mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Jeder Punkt von $\varkappa$ entspricht sich selbst; U aber entspricht jedem Punkte seiner harmonischen Polaren in Bezug auf $\varkappa$. Auch entspricht im Allgemeinen jeder Geraden ein durch U gehender Kegelschnitt. Diesen Fall haben gleichzeitig die Herren Geiser und Hirst eingehend untersucht. Derselbe tritt auch dann ein, wenn zwei reciproke Ebenen auf einander gelegt werden, und jeder Punkt P dem Schnittpunkte P_1 seiner beiden Polaren zugeordnet wird; denn alle Geraden $\overline{PP_1}$ gehen durch einen festen Punkt U und entsprechen sich selbst. Endlich werden zwei geometrisch verwandte Strahlenbündel S und S_1, die sich in einer Fläche zweiter Ordnung schneiden, von jeder Ebene, welche durch die harmonische Polare der Geraden $\overline{SS_1}$ hindurchgeht, ebenfalls in einem involutorischen System dieser Art geschnitten. — Werden zwei Polarsysteme auf einander gelegt, nimmt man z. B. in einer Ebene zwei Kegelschnitte $\varkappa$ und λ an, so können wir wieder zwei Punkte P und P_1 einander entsprechend nennen, von denen jeder auf beiden harmonischen Polaren des anderen liegt. In diesem Falle liegen die beiden einander zugeordneten und concentrischen Hauptbüschel U und U_1 involutorisch. Denn die Ebenen haben nur die vier reellen oder imaginären Schnittpunkte der Kegelschnitte entsprechend ge-

mein; sie müssten aber die **sämmtlichen** Punkte eines reellen oder imaginären Kegelschnittes entsprechend gemein haben, wenn jeder Strahl von U mit seinem entsprechenden von U_1 zusammenfiele (pag. 300).

Es hat keine Schwierigkeit, einzelne der hier angegebenen Constructionen involutorischer Ebenen zweiten Grades auch auf den unendlichen Raum auszudehnen. In diesem entspricht dann im Allgemeinen jedem Punkte wieder ein Punkt, jeder Ebene aber eine Fläche zweiter Ordnung. Herr Geiser hat für den von ihm betrachteten Fall diese Ausdehnung auf den unendlichen Raum in trefflicher Weise durchgeführt.

Auf eine ganz specielle Art der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades führt das **Princip der reciproken Radien**. Durch dasselbe wird nämlich jedem Punkte der Ebene ein Punkt als entsprechender zugewiesen, jeder Geraden im Allgemeinen ein Kreis, welcher durch einen gegebenen Punkt U der Ebene hindurchgeht, und jedem nicht durch U gehenden Kreis wieder ein Kreis. Die sämmtlichen Kreise, welche den sämmtlichen Geraden der Ebene entsprechen, haben also den Punkt U gemein, ausserdem aber nach bekannten Sätzen zwei imaginäre Punkte V und W, in welchen sie von der unendlich fernen Geraden geschnitten werden; durch V und W geht auch jeder andere Kreis der Ebene. U, V und W sind also die Hauptpunkte der Ebene; und wirklich entspricht auch jeder durch U gehenden Geraden kein Kreis, sondern diese Gerade selbst, ausserdem aber die unendlich ferne Gerade, welche dem Hauptpunkte U als Hauptlinie entspricht. Die sämmtlichen Punkte, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen, liegen auf einem reellen oder imaginären Kreise k, dessen Mittelpunkt U ist. Jede Gerade hat mit ihrem entsprechenden Kreise ihre beiden Schnittpunkte mit k gemein.

§. 4.

Curven, die einander entsprechen.

Unter einer **Curve n^{ter} Ordnung** verstehen wir eine solche, die von einer Ebene im Allgemeinen und höchstens in n Punkten geschnitten wird; an eine **Curve n^{ter} Classe** dagegen können von einem Punkte aus im Allgemeinen und höchstens n Tangenten gezogen werden. Im Folgenden wird hauptsächlich von ebenen Curven n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Classe die Rede sein. Dieselben werden aus jedem nicht in ihrer Ebene gelegenen Punkte durch eine **Kegelfläche n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Classe** projicirt.

Sind Σ und Σ_1 zwei geometrisch verwandte Ebenen, so entspreche irgend einer Curve der n^{ten} Ordnung k von Σ eine Curve m^{ter} Ordnung k_1 in Σ_1. Dann ist im Allgemeinen $m > n$; z. B. für $n = 1$ ist $m = 2$, wie wir gesehen haben. Sei nun g_1 irgend eine Gerade in Σ_1, und γ der entspre-

chende Kegelschnitt in Σ. Dann schneiden sich g_1 und k_1 im Allgemeinen und höchstens in m Punkten, sowie γ und k bekanntlich in $2n$ Punkten.[1]) Weil aber jedem Schnittpunkte von g_1 und k_1 ein solcher von γ und k entsprechen muss, so ist $m = 2n$, oder:

Jeder Curve n^{ter} Ordnung in Σ entspricht im Allgemeinen eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung k_1 in Σ_1.

In diesem wie in jedem der folgenden Sätze sind mehrere andere enthalten, wie leicht daraus zu erkennen ist, dass wir uns die geometrische Verwandtschaft zwischen Σ und Σ_1 auf verschiedene Arten erzeugt denken können. Denken wir uns z. B. Σ_1 in doppelter Weise reciprok auf Σ bezogen, so kann der Satz auch so ausgesprochen werden:

Zwei collineare Strahlenbüschel n^{ter} Ordnung von Σ (welche nämlich zwei collineare Curven n^{ter} Classe einhüllen) schneiden sich in einer Curve von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, zu welcher jeder Punkt gehört, in welchem zwei einander entsprechende Strahlen der Büschel sich schneiden.

Betrachten wir dagegen Σ und Σ_1 als Schnitte von zwei geometrisch verwandten Strahlenbündeln, die einander in einer Fläche zweiter Ordnung schneiden, so ergiebt sich:

Eine Fläche F zweiter Ordnung, welche durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche n^{ter} Ordnung hindurchgeht, wird von dieser in einer (räumlichen) Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung geschnitten, so dass letztere aus jedem beliebigen Punkt der Fläche F durch eine Kegelfläche der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung projicirt wird.

Denken wir uns k durch zwei sich schneidende einfache Strahlenbüschel der Ebene Σ erzeugt, so stellt sich k_1 dar als erzeugt durch zwei auf einander bezogene Kegelschnittbüschel; u. s. w. —

Geht k durch einen Hauptpunkt U von Σ, so enthält k_1 die sämmtlichen Punkte der entsprechenden Hauptlinie u_1 von Σ_1, oder k_1 zerfällt in die Gerade u_1 und eine Curve von der Ordnung $2n - 1$. Geht k wiederholt, etwa p mal durch U, so dass U ein p facher Punkt der Curve k ist, so ist auch u_1 mehrfach, nämlich p mal in k_1 enthalten. Gewöhnlich berücksichtigt man solche ein- oder mehrmal in k_1 vorkommende Hauptlinien nicht, sondern nur den übrigen Theil der Curve, welche zu k die entsprechende ist. Die Ordnung von k_1 wird also dadurch erniedrigt, und es gilt der Satz:

---

1) Seydewitz hat (in Grunert's Archiv VII, pag. 124 ff.) diese und andere Eigenschaften höherer Curven auf synthetischem Wege meisterhaft entwickelt.



Geht eine Curve n^{ter} Ordnung k beziehungsweise p, q und $r$mal durch die Hauptpunkte von Σ, so entspricht ihr in Σ_1 eine Curve k_1 von der Ordnung $2n-(p+q+r)$. Z. B. einer Curve vierter Ordnung, welche die drei Hauptpunkte von Σ zu Doppelpunkten hat, entspricht in Σ_1 eine Curve zweiter Ordnung; wird aber jede Hauptlinie von Σ_1 zweimal der entsprechenden Curve zugezählt, so ist diese von der achten Ordnung, wie im allgemeinen Fall.

Hat die Curve k einen $p$fachen Punkt, der nicht ein Hauptpunkt von Σ ist, so entspricht demselben auch in k_1 ein $p$facher Punkt. Ausserdem aber sind die Hauptpunkte von Σ_1 im Allgemeinen mehrfache, nämlich $n$fache Punkte von k_1. Denn da k von der Hauptlinie u im Allgemeinen und höchstens $n$mal geschnitten wird, so geht k_1 im Allgemeinen und höchstens $n$mal durch den entsprechenden Hauptpunkt U_1. Jedoch ist U_1 nur ein $(n-q)$facher Punkt von k_1, wenn q von den n Schnittpunkten der k mit u zugleich Hauptpunkte von Σ sind, und die entsprechenden Hauptlinien nicht zu k_1 gerechnet werden. Ist U der dem U_1 zugeordnete Hauptpunkt, und P ein gemeinschaftlicher Punkt von k und u, der aber nicht zugleich ein Hauptpunkt ist, so berührt, wie leicht zu erkennen, derjenige Strahl von U_1, welcher der Geraden $\overline{UP}$ entspricht, die Curve k_1 im Punkte U_1. Wird k von u berührt in P, so ist U_1 ein **Rückkehrpunkt** der Curve k_1, in welchem nämlich zwei Zweige von k_1 einander berühren. Dagegen ist U_1 ein **Wendepunkt** von k_1, wenn k von $\overline{UP}$ berührt wird im Punkte P. Wenn irgend ein Zweig von k nur imaginäre Punkte mit u gemein hat, so gehört U_1 dem entsprechenden Zweige von k_1 als **isolirter Punkt** an.

Ich glaube bei diesen allgemeinen Sätzen, die zum Theil als Definitionen aufzufassen sind, nur kurz verweilen zu sollen, weil dieselben nebst vielen anderen von **Steiner** und namentlich von **Seydewitz** bereits in vortrefflichster Weise entwickelt worden sind, und weil die Untersuchungen dieser Art, welche jene ausgezeichneten Geometer für einen besonderen Fall der geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades ausgeführt haben, sich sofort auf unseren allgemeinen Fall übertragen lassen. Diese Sätze gestatten namentlich auch, den Lauf einer Curve k_1 mit grosser Sicherheit anzugeben, sobald die entsprechende k vollständig bekannt ist. Ich füge noch eine naheliegende Bemerkung über die unendlich fernen Punkte und die Asymptoten einer solchen Curve k_1 hinzu.

Sei r_1 die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ_1, in welcher nach der sogenannten perspectivischen Auffassungsweise die sämmtlichen unendlich fernen Punkte von Σ_1 liegen, so entspricht auch dieser ein Kegelschnitt r, welcher dem Hauptdreieck der Ebene Σ umschrieben ist. Jedem Punkte Q, in welchem k von r geschnitten wird, entspricht dann ein auf r_1 liegender und folglich unendlich ferner Punkt Q_1 von k_1. Der Asymptote in diesem Punkte Q_1 entspricht in Σ ein Kegelschnitt, welcher dem Hauptdreieck von

Σ umschrieben ist und in Q die Curve k berührt. Sollte dieser Kegelschnitt mit r zusammenfallen, also k von r im Punkte Q berührt werden, so fällt jene Asymptote mit der unendlich fernen Geraden r_1 zusammen, oder die Curve k_1 strebt in ähnlicher Weise ihrem unendlich fernen Punkte Q_1 zu, wie diejenige Parabel, welche der gemeinschaftlichen Tangente von k und r entspricht. Da k_1 im Allgemeinen von $2n^{\text{ten}}$ Grade ist, so hat sie im Allgemeinen und höchstens $2n$ Punkte mit r_1 gemein und besitzt ebenso viele Asymptoten.

Zu einer unbegrenzten Zahl specieller Sätze führt uns die schon von Steiner aufgestellte Bemerkung, dass jeder projectivischen Eigenschaft einer gegebenen Figur eine leicht zu ermittelnde Eigenschaft jeder geometrisch verwandten Figur entsprechen muss. Die bekannten Hauptsätze über die Kegelschnitte lassen u. A. zahlreiche Uebertragungen auf gewisse Curven dritter und vierter Ordnung zu. Beispielsweise führe ich Folgendes an:

Einem Kegelschnitt k von Σ, welcher entweder durch zwei Hauptpunkte von Σ oder durch einen oder durch keinen solchen hindurchgeht, entspricht in Σ_1 eine Curve k_1, welche beziehungsweise entweder von der zweiten Ordnung ist und durch die zugeordneten beiden Hauptpunkte geht; oder von der dritten Ordnung, und den zugeordneten Hauptpunkt zum Doppelpunkte hat, aber auch durch die übrigen beiden Hauptpunkte von Σ_1 hindurchgeht; oder aber der vierten Ordnung angehört, und die drei Hauptpunkte von Σ_1 zu Doppelpunkten hat. Diese Doppelpunkte können übrigens auch zu isolirten Punkten oder zu Rückkehrpunkten werden und mit einander oder mit anderen Punkten zusammenfallen.

Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Liegen zwei projectivische Kegelschnitte in einer Ebene Σ_1, so liegen die Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Tangenten derselben entweder in einer Geraden, oder in einer Curve zweiter Ordnung oder in einer solchen dritter Ordnung mit einem isolirten oder Doppelpunkt, oder endlich in einer Curve vierter Ordnung mit drei isolirten oder Doppelpunkten, je nachdem nämlich die projectivischen Kegelschnitte drei oder zwei oder eine oder keine ihrer vier gemeinschaftlichen Tangenten entsprechend gemein haben.

Denken wir uns k durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugt, so erscheint die entsprechende Curve k_1 als Schnitt von zwei projectivischen Kegelschnittbüscheln; also:

Zwei projectivische Kegelschnittbüschel, welche demselben Hauptdreieck umschrieben sind, erzeugen

im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung, von welcher die Eckpunkte jenes Dreiecks Doppelpunkte sind, und auf welcher die Schnittpunkte von je zwei einander entsprechenden Kegelschnitten liegen. Doch kann die Curve auch zerfallen in eine solche von der dritten, zweiten oder ersten Ordnung und resp. eine, zwei oder alle drei Seiten jenes Hauptdreiecks.

Eine wiederum ganz verschiedene Form erhält der Satz, wenn wir statt der geometrisch verwandten Ebenen zwei Strahlenbündel einführen, die sich in einer Fläche zweiter Ordnung schneiden. Ich begnüge mich, folgenden besonderen Fall unseres Satzes seiner Wichtigkeit wegen hervorzuheben, obwohl er auf anderem Wege längst bewiesen ist:

Wenn zwei nicht concentrische Kegelflächen zweiter Ordnung oder eine Kegel- und eine Regelfläche sich in einer Geraden schneiden, so schneiden sie sich ausserdem in einer unebenen Curve dritter Ordnung, welche aus jedem ihrer Punkte durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projicirt wird, und also mit keiner Ebene mehr als drei Punkte gemein hat.

Daraus lässt sich leicht schliessen, dass auch drei projectivische Ebenenbüschel sich im Allgemeinen in einer unebenen Curve dritter Ordnung schneiden. Ueberhaupt ergeben sich sofort die wichtigsten Eigenschaften dieser Curve, welche, wie von Staudt in seiner nur zu wenig bekannten „Geometrie der Lage“ gewiss sehr richtig bemerkt, für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung hat, wie die Kegelschnitte für diejenige der Ebene. —

Eine Haupteigenschaft der Kegelschnitte ist die, dass je zwei Tangenten eines solchen von den übrigen projectivisch geschnitten werden. Suchen wir nun zu einem Kegelschnitt nebst dessen sämmtlichen Tangenten eine geometrisch verwandte Figur, so erhalten wir für diese den Satz:

Umschreibt man einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Dreieck $U_1 V_1 W_1$ die sämmtlichen Kegelschnitte, welche

1) entweder eine gegebene Gerade berühren,
2) oder eine Curve zweiter Ordnung berühren, die durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht,
3) oder eine Curve dritter Ordnung berühren, welche durch zwei Eckpunkte des Dreiecks geht und den dritten Eckpunkt zum isolirten oder zum Doppelpunkt hat,
4) oder eine Curve vierter Ordnung berühren, welche jeden Eckpunkt des Dreiecks zum isolirten oder auch zum Doppelpunkt (resp. Rückkehrpunkt) hat,

so werden je zwei dieser Kegelschnitte von den übrigen projectivisch geschnitten.

Wenn also von fünf, einem Dreieck $U_1 V_1 W_1$ umschriebenen Kegelschnitten vier gegeben sind, und der fünfte der Bedingung genügen soll, dass die vier ersteren ihn in noch vier harmonischen Punkten schneiden, so werden die sämmtlichen Lagen dieses fünften im Allgemeinen von einer Curve vierter Ordnung eingehüllt, welche auch die vier Kegelschnitte berührt und die Eckpunkte des Dreiecks $U_1 V_1 W_1$ zu isolirten oder zu Doppelpunkten hat.

Die bekannten Sätze über die harmonischen Polaren von Kegelschnitten führen zu folgender Eigenschaft der vorliegenden ebenen Curven dritter und vierter Ordnung:

Wenn durch einen beliebigen Punkt U_1 der Curve dritter, oder durch einen Doppelpunkt U_1 der Curve vierter Ordnung Secanten gelegt werden, so schneidet jede derselben die Curve im Allgemeinen in noch zwei Punkten. Der vierte, durch diese beiden harmonisch von U_1 getrennte Punkt liegt auf einem durch U_1 gehenden Kegelschnitt.

Aus jedem der drei isolirten oder Doppelpunkte der Curve vierter Ordnung lassen sich, wie leicht zu erkennen, im Allgemeinen zwei Tangenten an die Curve ziehen, welche nicht in diesen Punkten selbst die Curve berühren. Der Lehrsatz des Brianchon lehrt uns, dass diese drei Tangentenpaare einem Kegelschnitt umschrieben sind. — Hat eine Curve vierter Ordnung drei Rückkehrpunkte, so schneiden sich die drei Tangenten derselben in einem Punkte. Von der Richtigkeit dieser beiden Sätze, von welchen der letztere von Steiner herrührt, überzeugt man sich, indem man zu der Curve vierter Ordnung einen geometrisch verwandten Kegelschnitt construirt. Ebenso wird der bekannte Satz über Kegelschnittbüschel bewiesen:

Ein Kegelschnittbüschel schneidet jene Gerade, die durch keinen Hauptpunkt, und jeden Kegelschnitt, der durch zwei Hauptpunkte des Büschels hindurchgeht, involutorisch.

Viele Aufgaben über die hier betrachteten speciellen Curven dritter und vierter Ordnung lassen sich sofort auf solche über Kegelschnitte zurückführen. Z. B. die Frage: „Von welcher Classe sind diese Cur-„ven dritter oder vierter Ordnung?" ist gleichbedeutend mit folgender: „Wie viele Kegelschnitte lassen sich durch vier gegebene Punkte „legen, so dass sie einen gegebenen Kegelschnitt berühren, wenn entweder „einer oder keiner der gegebenen Punkte auf letzterem liegt?" Ebenso führt die Frage nach der Anzahl der Doppeltangenten dieser

Curven vierter Ordnung zurück auf die folgende: „Wie viele Kegel- „schnitte sind durch drei gegebene Punkte möglich, welche einen gegebe- „nen Kegelschnitt in zwei Punkten berühren?“ Offenbar liefert diese Aufgabe nur dann reelle Lösungen, wenn alle drei Punkte von dem gegebenen Kegelschnitt entweder eingeschlossen oder ausgeschlossen sind, und es giebt also gewisse Curven vierter Ordnung, die keine reellen Doppeltangenten besitzen. Dieselben haben die Eigenthümlichkeit, dass sie von jeder Geraden in mindestens zwei reellen Punkten geschnitten werden. —

Die Frage nach der Anzahl der Wendepunkte der vorliegenden Curve dritter oder vierter Ordnung lässt sich auf folgende zurückführen: „Wie viele durch drei gegebene Punkte gehende Kegelschnitte giebt „es, die sich einem gegebenen Kegelschnitt dreipunktig anschmiegen, wenn „auf letzterem einer oder keiner der gegebenen Punkte liegt?“

Es würde ermüden, wollte ich an noch mehr Beispielen zeigen, wie neue Sätze aus bekannten abgeleitet werden können. Die angeführten werden genügen, noch einmal auf den grossen Reichthum neuer nicht unwichtiger Sätze hinzuweisen, auf welche die Theorie der geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades schon geführt hat. Der hier befolgte Weg zur Entdeckung neuer Wahrheiten ist zuerst, wie bekannt, von Steiner eingeschlagen und namentlich von ihm und von Seydewitz ausgebeutet worden.

Schlussbemerkung.

Wie schon oben erwähnt, können analoge Untersuchungen wie die bisherigen für jede andere Art der geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades angestellt werden. Doch erhalten wir dadurch keine wesentlich neuen Ergebnisse, sondern solche, die auf die früheren mittelst des Gesetzes der Reciprocität unmittelbar zurückgeführt werden können. Nur wo besondere Lagen der geometrisch verwandten Ebenen oder Strahlenbündel in Betracht kommen, bieten sich neue Aufgaben und Sätze dar.

Ich will eine solche, sehr nahe liegende Aufgabe noch kurz erörtern. Es seien zwei Ebenen Σ und Σ_1 geometrisch so auf einander bezogen, dass im Allgemeinen jedem Punkte von Σ ein Strahl von Σ_1 entspricht, jeder Geraden von Σ aber die sämmtlichen Tangenten eines projectivischen Kegelschnitts von Σ_1, sowie umgekehrt jedem Strahlenbüschel von Σ_1 die sämmtlichen Punkte eines projectivischen Kegelschnittes von Σ. Wenn dann die Ebenen in einander gelegt werden, so fallen gewisse Punkte von Σ auf die ihnen entsprechenden Geraden von Σ_1, und es entsteht die Frage nach dem geometrischen Ort dieser Punkte und Geraden.

v. Staudt hat in seinen ausgezeichneten Beiträgen zur Geometrie der Lage No. 9 bewiesen, dass auf einer Geraden, welche mit einem ihr projectivischen Kegelschnitt in einer Ebene liegt, mindestens ein und im Allgemeinen höchstens drei Punkte vorkommen, welche auf den ihnen entsprechenden Tangenten des Kegelschnittes liegen[1]). Sollten auf einer Geraden mehr als drei solche Punkte sich finden, so berührt die Gerade den Kegelschnitt, und jeder ihrer Punkte liegt auf der entsprechenden Tangente. Also enthält jede Gerade von Σ mindestens einen und im Allgemeinen höchstens drei Punkte, welche auf ihren entsprechenden Strahlen von Σ_1 liegen, d. h:

> Alle solche Punkte von Σ liegen auf einer Curve dritter Ordnung. Dieselbe geht durch die drei Hauptpunkte von Σ.

Ganz analog ergiebt sich für diejenigen Strahlen von Σ_1, welche durch ihre entsprechenden Punkte von Σ hindurchgehen, dass jeder einfache Strahlenbüschel von Σ_1 deren mindestens einen und im Allgemeinen höchstens drei enthält, so dass wir sagen dürfen:

> Alle solche Strahlen von Σ_1 berühren eine Curve dritter Classe. Dieselbe hat auch die Hauptlinien von Σ_1 zu Tangenten.

Die Curve dritter Ordnung kann auch in drei Gerade oder in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, und ebenso die Curve dritter Classe in drei Punkte oder in einen Punkt und einen Kegelschnitt. Auch kann der besondere Fall eintreten, dass jeder Punkt von Σ auf dem entsprechenden Strahl von Σ_1 liegt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn wir zwei collineare Ebenen Σ und Σ_1 auf einander legen, und dann jedem Punkt P von Σ diejenige Gerade von Σ_1 zuweisen, welche P mit dem entsprechenden Punkte P_1 von Σ_1 verbindet.

Zwei nicht concentrische Strahlenbündel S und S_1 können so auf einander bezogen werden, dass im Allgemeinen jedem Strahle von S eine Ebene von S_1 entspricht, jedem Strahlenbüschel von S aber die sämmtlichen Berührungsebenen einer zu ihm projectivischen Kegelfläche zweiter Ordnung von S_1, sowie jedem Ebenenbüschel von S_1 die sämmtlichen Strahlen einer ihm projectivischen Kegelfläche von S. Dann erzeugen diese Strahlenbündel eine Fläche dritter Ordnung, zu welcher jeder Punkt gehört, in welchem ein Strahl von S die entsprechende Ebene von S_1 schneidet. Denn diese Fläche hat, wie sofort aus dem eben Bewiesenen folgt, mit jeder Schnittebene im Allgemeinen eine Curve dritter Ordnung gemein, und daher mit jeder Geraden, die nicht ganz in sie hineinfällt, höchstens drei

1) Vergl. auch: Reye, Geometrie der Lage, Hannover 1866 bei Rümpler, pag. 107.



Punkte. Es möchte wohl der Mühe werth sein, diese merkwürdige Fläche eingehend zu untersuchen. Hier sei nur bemerkt, dass dieselbe die drei Hauptstrahlen des Bündels S, sowie die drei Schnittlinien der einander entsprechenden Hauptebenen von S und S_1 enthält. Jede durch S gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer ebenen Curve dritter Ordnung, von welcher S ein isolirter oder ein Doppelpunkt ist. Ebenso schneidet jede Ebene von S_1 die Fläche in einer Curve dritter Ordnung, von welcher aber S_1 ein einfacher Punkt ist. Jede Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch die drei Hauptstrahlen von S hindurchgeht, schneidet die Fläche noch in einer unebenen Curve dritter Ordnung.

Die vorhin betrachteten Ebenen Σ und Σ_1 erzeugen ebenso, falls sie beliebig im Raume liegen, einen Ebenenbündel dritter Ordnung, von dessen Ebenen durch eine beliebige Gerade höchstens drei gehen, und zu welchem jede Ebene gehört, die einen Punkt von Σ mit dem entsprechenden Strahle von Σ_1 verbindet.

Zürich, den 13. September 1865.

XIV.

Ueber die Normalen von Kegelschnitten,

besonders über die Constructionen der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen.

Von

F. E. Eckardt,
Stud. mathem. in Leipzig.

(Hierzu Tafel III, Figur 1 bis 4.)

Im 26. Bande von Crelle's Journal hat Joachimsthal eine Reihe sehr interessanter Sätze über die Construction der von einem beliebigen Punkte aus auf eine Ellipse zu fällenden Normalen aufgestellt und rein geometrisch abgeleitet. Es würde aber wahrscheinlich eine analytische Ableitung derselben auch von Interesse sein, besonders deshalb, weil man aus den sich dann ergebenden Formeln auf einfache Weise noch eine Reihe sehr bemerkenswerther Sätze folgern kann. Ich will deshalb im Nachstehenden zunächst eine solche Untersuchung über die Normalen der Centralkegelschnitte durchführen und an dieselbe dann eine gleiche Betrachtung der Normalen einer Parabel anschliessen.

I.
Für die Centralkegelschnitte.

§. 1.

Die Gleichung der im Punkte $x'y'$ der Ellipse

1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

errichteten Normalen ist bekanntlich:

$$a^2xy'-b^2yx'=c^2x'y',$$

wobei
$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
die lineare Excentricität der Ellipse bedeutet. Umgekehrt liegen daher

die Fusspunkte der von einem ausserhalb des Umfanges der Ellipse sich befindlichen Punkte $x'y'$ auf diese zu fällenden Normalen in der Curve:

2) $$c^2 xy = a^2 x'y - b^2 y'x,$$

d. i. in einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse und durch den Punkt $x'y'$ geht. Diese schneidet die Ellipse 1) in vier Punkten, deren Ordinaten y sich aus der Gleichung ergeben:

3) $$c^4 y^4 + 2b^2c^2y'y^3 + b^2(b^2y'^2 + a^2x'^2 - c^4)y^2 - 2b^4c^2y'y - b^6y'^2 = 0.$$

Diese Gleichung führt discutirt zu den bekannten Sätzen über die Anzahl der reellen in einem Punkte $x'y'$ zusammenlaufenden Normalen einer Ellipse oder überhaupt eines Centralkegelschnittes.

Eine Construction der vier möglichen Normalen, sie mögen sämmtlich reell oder theilweise imaginär sein, mit Hilfe der geraden Linie und des Kreises allein ist nicht zu erwarten. Anders verhält es sich dagegen, wenn bereits eine Normale gegeben ist, denn dann hat man nur noch drei Fusspunkte im Umfange der Ellipse zu bestimmen, und diese können durch einen Kreis verbunden werden. Kann man diesen finden, so ist das Problem gelöst. Wir werden uns daher zunächst mit der Aufgabe beschäftigen:

In einer Normalen der Ellipse 1) ist ein Punkt gegeben; man soll von diesem aus die drei noch übrigen möglichen Normalen auf die Curve fällen.

Es seien $X\,Y$ die Coordinaten des Fusspunktes der gegebenen Normale, alsdann muss der Voraussetzung zufolge die Gleichung bestehen:

4) $$a^2x'Y - b^2y'X = c^2XY,$$

aus welcher folgt:

$$x' = \frac{X(c^2Y + b^2y')}{a^2Y}.$$

Wird dies in 3) eingesetzt und statt X und Y nur die eine Grösse Y eingeführt, so gelangt man zu einer Gleichung, die, wie es sein muss, durch $y - Y$ theilbar ist. Die Ausführung der Division ergiebt folgende Gleichung dritten Grades:

5) $$c^4Y^2y^3 + c^2Y^2y^2(c^2Y + 2b^2y') + b^4y'y(b^2y' + 2c^2Y) + b^6Yy'^2 = 0.$$

Dieselbe bestimmt drei Punkte der Ellipse, durch welche wir nun einen Kreis zu legen versuchen wollen. Es sei dessen Gleichung:

6) $$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0.$$

Alsdann muss die Gleichung, welche man durch Combination von 6) mit der Gleichung 2) der gleichseitigen Hyberbel für y erhält, durch 5) theilbar sein. Man könnte auch statt der Gleichung 2) diejenige der Ellipse 1) nehmen, würde aber alsdann complicirtere Rechnungen nöthig haben. Führt man die zuerst erwähnte Combination aus, setzt also in die Gleichung 6) den aus 2) folgenden Werth:

$$x = \frac{a^2x'y}{b^2y' + c^2y}$$

ein, so gelangt man zu der Gleichung:

$$7)\quad c^4y^4+2c^2y^3(b^2y'-Bc^2)+y^2(b^4y'^2-2Aa^2c^2x'-4Bb^2c^2y'+Cc^4+a^4x'^2)+2b^2y'y(Cc^2-Aa^2x'-Bb^2y')+Cb^4y'^2=0.$$

Soll dieselbe durch die Gleichung 5) theilbar sein, so muss sie identisch sein mit folgender:

$$(y-\alpha)[c^4Y^2y^3+c^2Y^2y^2(c^2Y+2b^2y')+b^4y'y(b^2y'+2c^2Y)+b^6Yy'^2]=0,$$

wobei $y=\alpha$ die Ordinate des vierten Punktes ist, den der Kreis 6) mit der Hyperbel 2) gemein hat. Diese Gleichung giebt entwickelt:

$$8)\quad c^4Y^2y^4+c^2Y^2y^3(c^2Y+2b^2y'-\alpha c^2)+y^2(b^6y'^2+2b^4c^2y'Y-\alpha c^4Y^2-2\alpha b^2c^2Y^2y')+b^4y'y(b^2y'Y-\alpha b^2y'-2\alpha c^2Y)-\alpha b^6Yy'^2=0,$$

und aus ihrer Vergleichung mit der Gleichung 7) folgen nach einigen kleinen Reductionen folgende zu erfüllende Bedingungen der Identität:

$$9)\quad\left\{\begin{aligned}&Y+2B-\alpha=0,\\&c^2Y^2[2Aa^2x'+4Bb^2y'-Cc^2-\alpha(2b^2y'+c^2Y)]\\&\qquad=a^4x'^2Y^2-2b^4c^2Yy'^2-b^4y'^2(b^2-Y^2)\\&2Y^2(Cc^2-Aa^2x'-Bb^2y')+\alpha b^2(b^2y'+2c^2Y)=b^4Yy',\\&CY+\alpha b^2=0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind gerade hinreichend zur Bestimmung der vier Grössen A, B, C und α, welche sich denn auch in sehr einfacher Gestalt nach einigen Reductionen, bei welchen besonders die Gleichungen 1) und 4) in Anwendung kommen, ergeben. Es wird nämlich:

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}&\alpha=\frac{a^4x'Y-b^4y'X}{b^2c^2X},\\&2A=\frac{b^2Xy'}{a^2Y};\qquad 2B=\frac{a^2Yx'}{b^2X},\\&C=-\left(a^2+b^2\frac{y'}{Y}\right)=-\left(b^2+a^2\frac{x'}{X}\right).\end{aligned}\right.$$

Durch die Grössen A, B, C ist der gesuchte Kreis vollkommen bestimmt und kann daher construirt werden. Da nun aber dieser Kreis die Ellipse in vier Punkten schneidet, von diesen jedoch nur drei Punkte gesucht worden sind, so ist es von Interesse, zu wissen, wo der vierte Schnittpunkt liegt.

Es sei β die Ordinate dieses vierten Schnittpunktes; alsdann eliminire man aus der Gleichung des Kreises

$$x^2+y^2-2Ax-2By+C=0$$

und derjenigen der Ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

die Abscisse x, um eine Gleichung zur Bestimmung der Ordinaten der vier Punkte zu erhalten, in welchen sich Kreis und Ellipse schneiden. Diese Gleichung wird die folgende:

$$4A^2a^2b^2y^2+(a^2b^2+Cb^2-2Bb^2y-c^2y^2)^2=4A^2a^2b_4.$$

Aus ihr ergiebt sich als die Summe aus den Ordinaten der vier Schnittpunkte der Werth:

$$-\frac{4Bb^2}{c^2}$$

und zieht man hiervon die aus der Gleichung 5) folgende Summe aus den Ordinaten der drei Normalenfusspunkte ab, so erhält man den Werth von β. Es ist demnach:

$$\beta = \frac{1}{c^2}(c^2 Y + 2b^2 y' - 4Bb^2)$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(c^2 Y + 2b^2 y' - \frac{2a^2 Y x'}{X}\right),$$

was sich mit Hilfe der Gleichung 4) reducirt zu:

11) $$\beta = -Y.$$

Dieses Resultat ist der Ausdruck des interessanten Satzes:

»Fällt man von einem Punkte aus auf eine Ellipse die vier möglichen Normalen, so geht der Kreis, welcher durch drei der Fusspunkte bestimmt wird, auch durch den dem vierten diametral gegenüberliegenden Punkt.

(Vergl. Joachimsthal a. a. O.)

§. 2.

Der soeben gefundene Satz ist offenbar sehr dienlich bei der Construction des oft erwähnten Kreises, die sich nun nach den gemachten Vorbereitungen sehr leicht in der von Joachimsthal aufgestellten Gestalt ergiebt.

Dazu forme man nur noch die Werthe:

$$2A = \frac{b^2 X y'}{a^2 Y}, \quad 2B = \frac{a^2 Y x'}{b^2 X},$$

wie sie sich in 10) ergeben haben, mit Hilfe der Gleichung 4) um zu

12) $$2A = x' - \frac{c^2}{a^2}X; \quad 2B = y' + \frac{c^2}{b^2}Y.$$

Da nun $\frac{c^2}{a^2}X$ und $-\frac{c^2}{b^2}Y$ die Abschnitte sind, welche die Normale des Punktes XY resp. auf der Abscissen- und Ordinatenaxe bildet, so ergiebt sich sofort folgende Construction des gesuchten Kreises:

Es sei P der Fusspunkt der gegebenen Normalen, M der Punkt in ihr, von welchem aus die übrigen Normalen gefällt werden sollen. Alsdann errichte man in den Punkten, wo die Coordinatenaxen von der gegebenen Normalen geschnitten werden, Perpendikel zu denselben; ihr Durchschnittspunkt sei L. Ist nun L' der diesem, sowie P' der dem Punkte P diametral gegenüberliegende Punkt, so wird ein Kreis, welcher die Mitte C von $L'M$ zum Centrum hat und durch P' geht, die Ellipse in noch drei Punkten schneiden, deren Normalen in M convergiren. (Taf. III, Fig. 1.)

§. 3.

Sämmtliche vorangehende Rechnungen gelten ebenso für die Hyperbel

$$13)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

wenn nur b mit $b\sqrt{-1}$ vertauscht wird. Man erhält dann statt der Formeln für A, B, C in 10) folgende:

$$14)\qquad \begin{cases} 2A=-\dfrac{b^2Xy'}{a^2Y}; \quad 2B=-\dfrac{a^2Yx'}{b^2X}, \\ C=b^2\dfrac{y'}{Y}-a^2=b^2-a^2\dfrac{x'}{X}. \end{cases}$$

Auch die im vorigen Paragraphen gegebene Construction gilt ebenso für die Hyperbel.

Ein interessanter Satz folgt noch aus den Formeln 10). Bildet man nämlich das Product der Coordinaten A und B, so wird dies:

$$AB=\tfrac{1}{4}x'y'.$$

Dies Product aber ist unabhängig von den Coordinaten X, Y und zugleich unabhängig von den Axen Aa und b der Ellipse. Man erhält dadurch folgenden Satz:

Fällt man von einem Punkte aus auf eine Ellipse oder Hyperbel die vier möglichen Normalen und legt durch je drei der Fusspunkte einen Kreis, so liegen die Mittelpunkte der vier so entstehenden Kreise in einer gleichseitigen Hyperbel, welche die Axen des Kegelschnittes zu Asymptoten hat. Diese Hyperbel ist aber ganz unabhängig von der Länge der Axen des Kegelschnittes, ist also zugleich der Ort der Mittelpunkte aller derartigen Kreise in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche mit dem gegebenen dasselbe Centrum und gleiche Axenrichtungen besitzen.

§. 4.

Ein besonders interessanter specieller Fall der im §. 1 gelösten Aufgabe ist die folgende:

Man soll von einem im Umfange einer Ellipse oder Hyperbel gelegenen Punkt aus auf diese Normalen fällen.

Die Lösung dieses Problems geht aus der allgemeinen Lösung hervor, wenn man den Punkt $x'y'$ mit dem Punkte X, Y zusammenfallen lässt. Die Gleichungen unter 10) reduciren sich alsdann durch die Substitution $x'=X$, $y'=Y$ bedeutend, nämlich zu:

$$15)\qquad 2A=\frac{b^2}{a^2}X, \quad 2B=\frac{a^2}{b^2}Y, \quad C=-(a^2+b^2).$$

Die letzte dieser Gleichungen ist besonders interessant; sie lehrt den Satz:

Fällt man von einem Punkte im Umfange einer Ellipse auf dieselbe die drei möglichen Normalen und legt durch die Fusspunkte einen Kreis, so ist die Potenz desselben in Bezug auf das Centrum der Curve constant, nämlich gleich dem negativen Quadrate der Sehne des elliptischen Quadranten.

Noch mehr vereinfachen sich die Formeln, wenn man eine gleichseitige Hyperbel voraussetzt. Für diese wird $b^2 = -a^2$ und dadurch ergiebt sich:

$$2A = -X, \quad 2B = -Y, \quad C = 0,$$

d. h.:

Werden von einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel aus auf diese die drei möglichen Normalen gefällt, so geht der Kreis, welcher durch die drei Fusspunkte derselben geht, zugleich durch das Centrum der Curve. Uebrigens ist dieser Kreis dem Rechteck umschrieben, welches bestimmt wird durch den dem Convergenzpunkte diametral gegenüberliegenden Punkt, dessen Projectionen auf die Axen und das Centrum der Hyperbel.

Es ist hierbei jedoch zu bemerken, dass im Falle einer Hyperbel diese drei Normalen nie sämmtlich reell sind, sondern stets nur eine von ihnen; dass man aber nichts desto weniger ebenso gut von einem Kreise durch die drei Fusspunkte reden kann, wie im Falle von drei reellen Normalen.

§. 5.

Auf die im §. 1 behandelte Aufgabe lässt sich die folgende zurückführen:

Es sind zwei Punkte A und B eines Centralkegelschnittes gegeben; man soll zwei Punkte C und D so bestimmen, dass ihre Normalen mit denen von A und B sich in demselben Punkte begegnen.

Es seien $X'Y'$, $X''Y''$ die Coordinaten von A und B; ferner ξ, η die des Durchschnittspunktes der in A und B gelegten Tangenten; $x'y'$ endlich die des Durchschnittspunktes der in A und B gelegten Normalen. Alsdann gelten folgende bekannte Relationen:

$$16) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{e^2 X' X''}{a^4}\xi; \quad y' = -\dfrac{e^2 Y' Y''}{b^4}\eta. \\ -\dfrac{\xi}{a^2} = \dfrac{Y' - Y''}{X' Y'' - X'' Y'}. \end{cases}$$

Die zwei zu bestimmenden Punkte C und D finden sich, da der Punkt x', y' sowohl in der Normalen von A, als auch in derjenigen von B liegt, in jedem der beiden Kreise:

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}\frac{X'y'}{Y'}x-\frac{a^2}{b^2}\frac{Y'x'}{X'}y-a^2-b^2\frac{y'}{Y'}=0,$$

und

$$x^2+y^2-\frac{b^2}{a^2}\frac{X''y'}{Y''}x-\frac{a^2}{b^2}\frac{Y''x'}{X''}-a^2-b^2\frac{y'}{Y''}=0,$$

folglich auch in deren Schnittlinie:

$$(X'Y''-X''Y')\left[-\frac{b^2}{a^2}\frac{y'x}{Y'Y''}+\frac{a^2}{b^2}\frac{x'y}{X'X''}\right]+b^2y'\frac{Y'-Y''}{Y'Y''}=0.$$

Werden hierin die Werthe von x', y' aus 16) eingeführt und wird ausserdem auch die Gleichung für $\frac{\xi}{a^2}$ benutzt, so erhält man nach einer einfachen Reduction folgende Gleichung für die Linie CD:

$$\frac{x}{-\xi}+\frac{y}{-\eta}=1. \tag{17}$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction:

> Um die Punkte CD eines Centralkegelschnittes zu finden, deren Normalen mit denen von zwei gegebenen Punkten A und B in einem Punkte zusammenlaufen, construire man den Pol der Sehne AB und fälle von dem, diesem diametral gegenüberliegenden Punkte aus auf die Axen Perpendikel; die Verbindungslinie der Fusspunkte ist die Linie CD. (Taf. III, Fig. 2.)

Durch Umkehrung dieser Construction kann man aus den Punkten C und D die Punkte A und B und somit eine zweite constructive Lösung des Problems finden; nämlich:

> Man ziehe die Sehne AB und errichte dort, wo diese die Axen trifft, Perpendikel zu denselben, bestimme den dem Schnittpunkte dieser Geraden diametral gegenüberliegenden Punkt und lege von diesem aus an den Kegelschnitt Tangenten; die Berührungspunkte sind alsdann die gesuchten Punkte A und B.

Einige specielle Fälle dieser von Joachimsthal gefundenen Sätze sind noch besonders bemerkenswerth.

Fällt der Punkt A mit dem Punkte B zusammen, so schneiden sich die Normalen der beiden Punkte im Krümmungsmittelpunkte von A. Der erste Satz nimmt alsdann die Gestalt an:

> Ist A ein Punkt eines Centralkegelschnittes und werden von dem ihm diametral gegenüberliegenden Punkte aus auf die Axen Perpendikel gefällt, so schneidet die gerade Linie durch die Fusspunkte die Curve in zwei Punkten, deren Normalen durch den Krümmungsmittelpunkt von A gehen.

Wenn dagegen, als ein anderer specieller Fall, die Linie CD eine Focalsehne wird, so ergiebt sich leicht der folgende Satz:

Liegen zwei Punkte A und B in einem Kegelschnitt so, dass ihre Verbindungslinie mit der einen Directrix in der grossen Axe zusammentrifft, so geht die Linie durch die beiden Punkte C und D, deren Normalen mit denen von A und B in einem Punkte zusammenlaufen, zugleich durch den nicht zu jener Directrix gehörigen Brennpunkt.

Ueberhaupt findet man, dass, wenn sich die Linie AB um einen festen Punkt dreht, auch die Linie CD durch einen festen Punkt geht.

§. 6.

Ich will an das Vorhergehende noch eine Reihe von Sätzen anschliessen, welche sich auf vier in einem Punkte zusammenlaufende Normalen beziehen. Sie lassen sich sämmtlich leicht mit Hilfe symmetrischer Functionen aus der Gleichung 3) ableiten; die Beweise sind jedoch meist etwas umständlich, weshalb ich sie hier übergehe.

1) Fällt man von einem beliebigen Punkte aus auf eine Ellipse oder Hyperbel die vier möglichen Normalen und bestimmt das Product aus den vier Halbdurchmessern, welche den Tangenten in ihren Fusspunkten parallel laufen, so steht dies Product in constantem Verhältniss zu dem Product aus den Entfernungen des Convergenzpunktes von den beiden Brennpunkten.

Es ist nämlich dieses Product gleich:

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} \sqrt{(x-c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2} r_1 r_2.$$

Dies Product bleibt constant, so lange $r_1 r_2$ constant bleibt, d. h.: wenn sich der Convergenzpunkt in einer Cassini'schen Linie bewegt, deren Brennpunkte mit denen des gegebenen Kegelschnittes zusammenfallen.

Man kann obigem Satz auch die Gestalt geben:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 \varrho_1' \varrho_2' \varrho_3' \varrho_4' = \frac{a^4 b^4}{c^4} r_1^2 r_2^2,$$

wo dann $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die Entfernungen der vier Fusspunkte von dem einen, $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ vom andern Brennpunkte sind.

Für den speciellen Fall, wo der Convergenzpunkt in der Curve selbst liegt, nimmt demzufolge unser Satz die Gestalt an:

2) Fällt man von einem Punkte im Umfange einer Ellipse oder Hyperbel die drei möglichen Normalen auf dieselbe und bestimmt das Product aus den sechs Brenn-

strahlen der Fusspunkte, so steht dies in constantem Verhältniss zu dem Product der beiden Brennstrahlen des Convergenzpunktes.

Es folgt auch sofort der folgende Satz aus 1):

3) Fällt man von einem Punkte aus auf jeden von zwei confocalen Kegelschnitten die vier möglichen Normalen und bestimmt die Producte aus den jedesmaligen vier, zu den Tangenten in den Fusspunkten parallel laufenden Halbdurchmessern, so stehen diese in constantem Verhältniss.

4) Werden von einem Punkte (x, y) aus auf einer Ellipse oder Hyperbel die vier möglichen Normalen gefällt, so ist die Summe aus den Quadraten der Abstände ihrer Fusspunkte vom Centrum gleich:

$$2\left(a^2 \pm b^2 + \frac{a^2x^2 \mp b^2y^2}{c^2}\right),$$

wo das obere Vorzeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt.

Ist die gegebene Curve eine Ellipse, so ist der Ort aller Punkte, für welche diese Summe eine constante Grösse ist, eine ihr concentrische Hyperbel, deren Asymptoten senkrecht stehen auf den gleichen conjugirten Durchmessern der Ellipse.

Es ist übrigens die Beziehung zwischen der Ellipse und dieser Hyperbel eine reciproke; es ist nämlich auch für jeden Punkt der Ellipse jene Summe genommen in Bezug auf die Hyperbel constant.

Setzt man eine gleichseitige Hyperbel voraus, d. i.: $b^2 = -a^2$, so vereinfacht sich obige Summe bedeutend, man erhält nämlich:

$$x^2 + y^2,$$

und damit den Satz:

5) Liegen vier Punkte in einer gleichseitigen Hyperbel so, dass sich ihre Normalen in einem Punkte begegnen, so ist die Summe aus den Quadraten ihrer Halbmesser gleich dem Quadrate der Entfernung des Convergenzpunktes vom Centrum.

Liegt der Convergenzpunkt in der Hyperbel selbst, so ergiebt sich für die Fusspunkte der dann noch möglichen 3 Normalen jene Summe gleich Null, woraus man sofort erkennt, dass zwei der Fusspunkte imaginär sein müssen.

6) Werden von einem Punkte aus an eine Ellipse oder Hyperbel die vier Normalen gezogen und auf diese vom Centrum aus Perpendikel gefällt, so ist das Product aus deren Längen gleich:

$$\frac{c^2x^2y^2}{r_1r_2},$$

wo x, y die Abstände des Convergenzpunktes von den Axen und $r_1 r_2$ von den beiden Brennpunkten bedeuten. Man erkennt sofort, dass dies Product constant ist in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche mit jenem confocal sind.

II.
Für die Parabel.

§. 7.

Die Gleichung der im Punkte $x_1 y_1$ einer Parabel:

$$y^2 = 2px \tag{17}$$

errichteten Normale ist bekanntlich:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

oder, weil

$$\frac{y_1}{2p} = \frac{x_1}{y_1}:$$

$$y = -\frac{xy_1}{p} + \frac{2x_1^2}{y_1} + y_1. \tag{18}$$

Umgekehrt liegen die Fusspunkte der von einem Punkte $x_1 y_1$ ausserhalb einer Parabel auf diese gefällten Senkrechten in der Curve:

$$2x^2 + y^2 - y^2\frac{x_1}{p} - yy_1 = 0, \tag{19}$$

deren Gleichung man erhält, wenn man in 18) $x_1 y_1$ mit xy vertauscht und umgekekrt. Die gesuchten Fusspunkte sind die Schnittpunkte der Curve 19) mit der Parabel 17). Durch diese Schnittpunkte gehen aber noch unendlich viele Curven 2. Grades, deren Gleichungen sämmtlich in der folgenden enthalten sind:

$$y^2 - px + R\left(2x^2 + y^2 - y^2\frac{x_1}{p} - yy_1\right) = 0.$$

Unter diesen Curven ist eine besonders interessante zu finden, nämlich ein Kreis. Er entspricht dem Werthe:

$$R = \frac{p}{p + x_1}$$

und hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - x(p + x_1) - \frac{yy_1}{2} = 0. \tag{20}$$

Da dieser Kreis durch den Scheitel der Parabel geht, so hat man den interessanten Satz:

> Die Fusspunkte der von einem beliebigen Punkte ausserhalb einer Parabel auf diese zu fällenden 3 Normalen liegen mit dem Scheitel derselben in einem Kreise.

Dieser Kreis ist besonders auch für die Construction jener 3 Normalen wichtig. Man erhält ihn, wie eine einfache Betrachtung lehrt, auf folgende Weise:

> Man errichtet in dem Punkte der Parabel, welcher mit dem gegebenen in demselben Perpendikel zur Axe liegt, die Normale und legt an den Punkt der Parabel, welcher mit dem gegebenen in derselben Parallelen zur Axe liegt, die Tangente. Alsdann geht der gesuchte Kreis durch die Punkte, in welchen die erste dieser Linien der Axe und die letzte der Scheiteltangente begegnet, endlich durch den Scheitel der Parabel. (Taf. III, Fig. 3.)

Diese Construction zeigt zugleich, dass auch die Umkehrung des vorhererwähnten Satzes gilt, nämlich:

> Jeder Kreis, welcher durch den Scheitel einer Parabel geht, schneidet diese noch in drei Punkten, deren Normalen in einem Punkte convergiren.

Fallen von diesen drei Schnittpunkten zwei zusammen, so schneiden sich ihre Normalen im Krümmungsmittelpunkt. Es gilt daher der Satz:

> Jeder Kreis, welcher durch den Scheitel einer Parabel geht und dieselbe in einem Punkte berührt, schneidet sie zugleich in einem Punkte, dessen Normale durch den Krümmungsmittelpunkt jenes Berührungspunktes geht.

Wenn ferner der Convergenzpunkt der Normalen in die Parabel selbst gelegt wird, so vereinfacht sich die Construction des Kreises und liefert folgenden speciellen Satz:

> Jeder Kreis, welcher einem Viereck umschrieben ist, dessen Seiten von der Axe und der Scheiteltangente einer Parabel, sowie von der Tangente und Normalen eines ihrer Punkte gebildet werden, schneidet die Parabel zugleich noch in zwei Punkten, deren Normalen sich in jenem Punkte ihres Umfanges treffen.

§. 8.

Es ist vortheilhaft, die cubische Gleichung selbst aufzustellen, nach welcher die Fusspunkte der in einem gegebenen Punkte sich treffenden Normalen bestimmt werden. Man erhält sie sofort durch Einsetzen von $x = \frac{y^2}{2p}$ in die Gleichung 20) des Kreises in der Form:

$$21) \qquad y^3 - 2py(x_1 - p) - 2p^2 y_1 = 0.$$

In dieser Gleichung fehlt das Glied mit y^2; dies beweist, dass der Schwer-

Punkt eines Dreiecks, welches durch die Fusspunkte der von einem Punkte aus auf eine Parabel gefällten Normalen gebildet wird, in der Parabelaxe liegt.

Die Gleichung 21) leitet discutirt sehr leicht zu den bekannten Sätzen über die Anzahl der reellen Normalen einer Parabel. Wir wollen sie nach dieser Seite hin aber nicht verfolgen, sondern aus ihr nur noch einen Satz ableiten.

Bekanntlich schneiden sich die Höhenperpendikel eines der Parabel umschriebenen Dreiecks in einem Punkte der Directrix, und zwar in der Höhe:

$$y = \frac{y' y'' y'''}{2p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{2},$$

wo y', y'', y''' die Ordinaten der Berührungspunkte sind. Wählt man für diese diejenigen Punkte der Parabel, deren Normalen in einem Punkt (x_1, y_1) sich treffen, so hat man zu setzen:

$$y' y'' y''' = 2p^2 y_1; \quad y' + y'' + y''' = 0.$$

Also ist

$$y = y_1.$$

Der Convergenzpunkt der Höhenperpendikel liegt somit ebenso hoch über der Axe, als der Convergenzpunkt der Normalen.

§. 9.

Auf die in §. 7 behandelte Aufgabe lässt sich sofort auch die folgende zurückführen, welche man jedoch mit Vortheil selbstständig löst:

Es ist in einer Normalen einer Parabel ein Punkt gegeben; man soll von ihm aus die übrigen noch möglichen Normalen auf die Curve fällen.

Es sei $M(x_1 y_1)$ der gegebene Punkt in der Normalen, deren Fusspunkt P_1 die Coordinaten X, Y haben möge; P_2 und P_3 seien die Fusspunkte der gesuchten Normalen. Alsdann ist offenbar:

$$x_1 - X = -\frac{p}{Y}(y_1 - Y),$$

oder:

$$x_1 = X - \frac{p}{Y}(y_1 - Y).$$

Wird dies in die Gleichung 21) eingesetzt, so kann diese durch $y - Y$ dividirt werden, und giebt nach Ausführung dieser Division die quadratische Gleichung:

$$y^2 + yY + 2p^2 \frac{y_1}{Y} = 0. \tag{22}$$

Aus derselben ergeben sich die Ordinaten $x' y''$ der beiden Punkte P_2, P_3. Nun aber ist die Gleichung der Sehne, welche diese Punkte verbindet:

$$y(x' - x'') - x(y' - y'') = x' y'' - x'' y',$$

oder da

$$x' = \frac{y'^2}{2p}, \quad x'' = \frac{y''^2}{2p}:$$

$$y(y' + y'') - 2px = y'y''.$$

Werden hierin endlich die aus 22) folgenden Werthe von $y' + y''$ und $y'y''$ eingesetzt, so erhält man:

$$xY + yX + py_1 = 0 \tag{23}$$

als einfachste Gleichung der Linie $P_2 P_3$. Offenbar bildet diese gerade Linie mit der Parabelaxe einen Winkel, dessen Tangente $-\frac{X}{Y}$ ist; daher ist folgender Satz klar:

> Fällt man von einem Punkte in der Ebene einer Parabel auf diese die drei Normalen und verbindet den einen der Fusspunkte mit dem Scheitel der Parabel durch eine gerade Linie, so bildet diese mit der Axe denselben Winkel, wie die Verbindungslinie der beiden andern Fusspunkte.

Besonderes Interesse verdient auch hier der Fall, in welchem die Normalen von einem Punkte im Umfange der Parabel aus zu fällen sind. Man kann hier sofort die Formeln 22) und 23) anwenden, sobald man nur $X = x_1$, $Y = y_1$ setzt. Es werden alsdann diese Gleichungen einfacher:

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 \ + yy_1 + 2p^2 = 0, \\ xx_1 + yx_1 + py_1 = 0, \end{array}\right. \tag{24}$$

und liefern eine Reihe interessanter Sätze.

Bekanntlich schneiden sich die in den Punkten $x'y'$, $x''y''$ einer Parabel an dieselbe gelegten Tangenten in einem Punkte, dessen Abscisse ist:

$$\frac{y'y''}{2p}.$$

Im vorliegenden Falle ist $y'y'' = 2p^2$, also $\frac{y'y''}{2p} = p$, also constant. Daraus ergiebt sich der Satz:

> Legt man in zwei Punkten einer Parabel, deren Normalen sich in einem Punkte der Curve selbst treffen, die Tangenten, so schneiden sich diese in einer festen Parallelen zur Scheiteltangente, welche von dieser auf der positiven Seite der Axe um den Parameter absteht.

Aus der zweiten Gleichung in 24) folgt ferner:

> Die Verbindungslinie zweier Punkte einer Parabel, deren Normalen sich in einem Punkte der Curve selbst treffen, geht durch einen festen Punkt in der Axe, welcher vom Scheitel rückwärts um den Parameter absteht.

Endlich ergiebt sich noch leicht der folgende Satz:

> Die Verbindungslinie zweier Punkte einer Para-

bel, deren Normalen in einem Punkte der Curve selbst zusammenlaufen, trifft die Verbindungslinie dieses Punktes und des Scheitels in der Directrix.

Die erste Gleichung in 24) lehrt auch, in welchen Fällen die beiden Normalen der Parabel, welche von einem Punkte in deren Umfang selbst ausgefällt werden, reell verschieden, zusammenfallend oder imaginär sind. Man erhält als Kennzeichen hierfür:

$$x_1 \gtreqless 4p.$$

§. 10.

Die nun schliesslich noch zu erledigende Aufgabe, zu zwei Punkten A und B einer Parabel den Punkt C zu finden, dessen Normale mit denen von A und B in einem Punkte zusammentrifft, lässt einige sehr einfache Lösungen zu.

I. Ist O der Parabelscheitel, so wird der durch O, A, B gelegte Kreis die Parabel weiter in dem gesuchten Punkt C schneiden.

II. Man ziehe durch O eine gerade Linie, welche mit der Axe einen gleichen nur nach entgegengesetzter Seite aufgetragenen Winkel bildet, wie AB. Dieselbe wird der Parabel in dem gesuchten Punkt C begegnen. Da sich hiernach AC nicht ändert, wenn sich auch die Linie AB parallel verschiebt, so folgt der bemerkenswerthe Satz:

Bewegt sich eine Parabelsehne parallel mit sich fort, so beschreibt der Durchschnittspunkt der in ihren Endpunkten gelegten Normalen eine Gerade, welche ebenfalls eine Normale der Parabel ist.

III. Sind die Ordinaten von A und B y' und y'', so ist diejenige von C einem früher bewiesenen Satze zufolge:

$$-(y' + y'').$$

Man erkennt leicht, wie diese Constructionen auch angewendet werden können, um den Krümmungsmittelpunkt irgend eines Parabelpunktes A zu finden; man darf alsdann nur A und B zusammenfallen lassen. Man wird alsdann eine Reihe von Constructionen hervorgehen sehen, welche, wie besonders die folgende, die gewöhnlichen Methoden an Einfachheit mindestens erreichen.

Ist MQ die Normale des Parabelpunktes M und zwar Q ihr Schnittpunkt mit der Axe; ist ferner O der Scheitel der Parabel, so errichte man auf OM in der Mitte eine Senkrechte, welche die Normale von M in R schneide. Alsdann braucht man nur noch das Stück MQ auf der Verlängerung von MR von R aus dreimal aufzutragen, um den Krümmungsmittelpunkt C von M zu erhalten. (Taf. III, Fig. 4.)

XV.

Ueber die Gesetzmässigkeit und die Theorie des Elektricitätsverlustes.

Von

Dr. F. Dellmann,

Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Kreuznach.

---

§. 1.
Einleitung.

Wenn man einen beliebigen Körper elektrisirt und seine Elektricität auch durch den besten Isolator, Schellack, absperrt, diese Elektricität gleich nach dem Laden und nach einiger Zeit wieder misst, so findet man bekanntlich bei der zweiten Messung stets eine Abnahme, welche man den Elektricitätsverlust nennt.

Was bis jetzt über den Elektricitätsverlust bekannt ist, rührt fast nur von Coulomb her; Riess und der Verfasser haben kleine Zusätze geliefert, Riess in seiner Abhandlung: „Ueber elektrische Dichtigkeiten"*) und in seinem vortrefflichen Werke über Reibungselektricität; der Verfasser in seinem Aufsatze: „Ueber Luftelektricität".**) Was Coulomb geliefert, ist ausser seinen eigenen Abhandlungen***), welche nicht Jedem zugänglich sind, recht gut und umfassend dargestellt in den Werken von Biot und dem genannten Werke von Riess. Die Lehrbücher der Physik sind meist sehr lakonisch im Capitel über den Elektricitätsverlust, und zum Theil behandeln sie das bereits vorhandene Material von Thatsachen mit völliger Entstellung.

Riess sagt Bd. I, S. 117 seines Werkes: „Wird der Zerstreuungscoefficient unzweifelhaft durch den Feuchtigkeitszustand der Luft bestimmt, so bleiben auf ihn wahrscheinlich die Temperatur der in der Luft vorhandenen

---

*) Pogg. Annal. Bd. 71, S. 359 ff.

**) Pogg. Annal. Bd. 89, S. 258 ff.

***) Besonders das 3. Mémoire, Jahrg. 1785, S. 612 ff. der Memoiren der Académie royale.

Wassertheile, der Stand des Barometers und die der Luft zufällig beigemischten Gasarten nicht ohne Einfluss. In der That findet man zuweilen die Zerstreuung der Elektricität in der entgegengesetzten Weise verändert, als man nach dem hygrometrischen Zustande der Luft erwarten konnte, und es ist bis jetzt keine Hoffnung vorhanden, ihre Abhängigkeit in allen Verwicklungen klar zu übersehen." Ferner sagt er auf der vorhergehenden Seite: „Die Erfahrung hat nun gezeigt, dass der Zerstreuungscoefficient für einen elektrisirten Körper desto grösser ausfällt, je mehr der Feuchtigkeitszustand der den Körper umgebenden Luft sich dem Sättigungszustande nähert; jener Coefficient hängt daher von der absoluten Menge des Wassergases ab, das die Luft enthält, und von dem Verhältnisse dieser Menge zu der grössten Menge, die sie bei ihrer Temperatur enthalten kann." Die schwache Hoffnung, welche am Schlusse des 1. Satzes ausgesprochen ist, theilt der Verfasser mit Riess nicht; und in wie weit der 2. Satz richtig ist, wird das Folgende zeigen.

Als ich meine elektrischen Untersuchungen vor 13 Jahren aufs Neue in Angriff nahm, hätte ich gern mehr gewusst über den Elektricitätsverlust; aber es war nicht mehr zu finden. Doch im Laufe der Zeit fühlte ich mehr und mehr den Mangel des bisherigen Wissens über diese Erscheinung, welche bei Messungen der statischen Elektricität immer mehr oder weniger stört, und so gab ich mich zu verschiedenen Zeiten daran, meine Kenntnisse durch eigene Untersuchungen zu erweitern; zuerst behufs der Controle meines atmosphärisch-elektrischen Apparates, und später noch einmal, um meine Kenntniss der Isolatoren zu vermehren. Im letzten Winter wollte ich wissen, welchen Einfluss der Elektricitätsverlust auf die Spannung einer offenen Säule hat. Hier musste besonders die umgebende Luft sorgfältig in Bezug auf ihren Gehalt an Wasserdämpfen zugleich untersucht werden.

Wenn ich damit meine Studien über den Elektricitätsverlust noch keineswegs als abgeschlossen betrachtet wissen will, so hat sich doch durch die bisherigen Arbeiten ein Material angehäuft, welches weit über die Grenzen des Bekannten hinausgeht. Ich werde im Nachfolgenden vorläufig meine Erfahrungen und Ansichten über die Gesetzmässigkeit und die Theorie des Elektricitätsverlustes mittheilen, Anderes, namentlich über verschiedene Mittel zu seiner Abänderung, und über die Isolirungsfähigkeit verschiedener Isolatoren, später veröffentlichen. Die Beschreibung des Beobachtungs- und Berechnungsverfahrens, sowie die genaue Bestimmung der Begriffe muss vorhergehen.

A. Beobachtungs- und Berechnungsverfahren. Begriffsbestimmungen.

§. 2.

Messapparate.

Es wurde zu den nachfolgenden Untersuchungen das Elektrometer

verwendet, welches von mir vollständig beschrieben*) ist in Pogg. Annal. Bd. 86, S. 524 ff. Später habe ich Verbesserungen desselben angegeben in Pogg. Annal. Bd. 89, S. 269 ff. Für die Leser dieser Blätter möge deshalb eine nur allgemeine Beschreibung genügen.

Die Kraft, mittelst deren die Elektricität gemessen wird, ist die Torsion eines dünnen Glasfadens. Diese Kraft ist bekanntlich sehr constant und deshalb zuverlässiger, als die Torsion der Metalldrähte. Der Glasfaden ist oben mit Schellack befestigt an einem Messingstift, welcher einen Zeiger trägt, der über einem getheilten Kreise, dem Torsionskreise, sich bewegt. Am untern Ende des Glasfadens hängt ein etwa zwei Zoll langes, dünnes, plattgeklopftes Messingdrähtchen (Saite No. 12) horizontal, seine Flächen, welche durch das Klopfen entstanden, in verticaler Richtung; es

*) In den Grundzügen schon vor 22 Jahren im Programm des Kreuznacher Gymnasiums und in Pogg. Ann. Bd. 55, S. 301 ff. Dort hatte ich zwei Principien angegeben, mit deren Anwendung es mir gelungen war, ein sehr empfindliches Elektroskop zu construiren; das eine war schon vorher beim Säulenelektroskop zur Anwendung gekommen, das andere war neu. Das erste war das Princip, die Einwirkung zweier elektrischer Körper auf einander durch ein gegebenes Quantum dadurch zu erhöhen, dass man dies Quantum blos einem Körper zukommen lässt und den andern aus einer andern Quelle ladet. Das zweite war das Princip, diese Einwirkung zu erhöhen durch Vergrösserung der Anzahl wirkender Punkte und Verdichtung der Elektricität an passenden Stellen. Mittelst dieses letzteren hatte sich Herr Kohlrausch nach mehrjähriger Bemühung ein sehr empfindliches und genaues Elektrometer construirt und damit schöne Entdeckungen gemacht an der geschlossenen und einigen offenen Säulen, zugleich aber auch in der ersten seiner in den Jahren 1847—1853 ziemlich rasch auf einander folgenden Abhandlungen gezeigt, dass das Instrument sich für sämmtliche Elektricitätsquellen mit unendlichem Zufluss besonders eigne, also auch zum Studium der atmosphärischen Elektricität. Diese Arbeiten von Kohlrausch bestimmten mich, zuerst die Reconstruction des Messapparates vorzunehmen und ihn dann zum Studium des letzteren Gebietes zu verwenden. Nachdem auch ein passender Sammelapparat construirt war, bestehend in einer isolirten Kugel, welche behufs der Ladung über das Beobachtungslokal gehoben, oben ableitend berührt und dann wieder zum Messen gesenkt wird, konnten die Beobachtungen im Januar 1852 beginnen. Im Jahre 1856 sah Herr Prof. W. Thomson meinen Apparat zu Kreuznach in Thätigkeit, so wie auch das Elektroskop mit der Anwendung beider Principien. Seit dieser Zeit studirt Hr. Thomson mit grossem Eifer und dem besten Erfolg atmosphärische Elektricität mit neuen von ihm construirten Apparaten, besonders mit sehr empfindlichen und genauen Messinstrumenten, bei deren Construction er beide genannten Principien sehr zweckmässig in Anwendung bringt. Sein Reflexionselektrometer ist so empfindlich, dass er mittelst desselben die Erscheinungen an der geschlossenen Säule, für deren Studium Herr Kohlrausch einen Condensator zu Hilfe nahm, ohne diesen zeigt, und mit Unterstützung einer besonderen Vorrichtung sogar in einem Collegienversuch. Sein portables Elektrometer zum Beobachten an beliebigen Orten, von welchem seit einiger Zeit durch die Munificenz der Royal Society mir ein Exemplar zur Benutzung übergeben ist, hat zwar eine geringere Empfindlichkeit, aber diese ist doch so zu steigern, dass man mit demselben die Spannung nur eines Elementes einer Zink-Kupfer-Säule noch zur Anschauung bringen kann.



ist also der Wagebalken, wie Coulomb diesen Theil seiner Drehwage genannt hat. Der Unterschied zwischen Coulomb's und meinem Wagebalken besteht darin, dass jener von einem Isolator, meiner von einem guten Leiter verfertigt ist; und ferner darin, dass jener cylindrisch, meiner linealisch ist mit scharfen Rändern. Der Standkugel der Drehwage entspricht in meinem Instrumente ein ebenfalls etwa zwei Zoll langes und eine Linie breites, dünnes Metallplättchen mit scharfen Rändern, von mir Streifchen genannt. Es sitzt im obern Einschnitt eines etwa eine Linie dicken und vier bis fünf Zoll langen Messingdrahtes, welcher mit Schellack in den Boden des dicken Metallgefässes gekittet ist und vertical nach aussen geht. Diesen Messingdraht habe ich Zuleitungsdraht oder Zuleiter genannt, weil mittelst desselben die zu messende Elektricität in das Gefäss des Instrumentes geleitet wird. Beim Laden müssen sich Wagebalken und Streifchen rechtwinklig berühren. Um diese Berührung leicht herstellen und wieder aufheben zu können, ist am Torsionskreise mittelst eines Bügels eine Schraube befestigt, welche gedreht werden kann, ohne dass der Messingstift, an welchem der Glasfaden hängt, sich mitdreht. Nach der Ladung wird die Schraube zurückgedreht und dadurch die Berührung von Wagebalken und Streifchen aufgehoben. Dann wird der Zeiger des Torsionskreises auf 0 der Eintheilung gestellt und unten der Winkel abgelesen, welchen Wagebalken und Streifchen durch die Abstossung der Elektricität mit einander bilden. Zu diesem Ablesen liegt unter dem Streifchen auf dem Boden des Gefässes ein polirter, getheilter Kreis. Die Kreisplatte muss also in der Mitte eine entsprechende Oeffnung haben für den Durchgang des Zuleitungsdrahtes. Das Ablesen geschieht durch Spiegelung zur Vermeidung der Parallaxe. Es versteht sich, dass vor dem Beginn des Messens das Instrument so ajustirt sein muss, dass der Wagebalken auf der untern und der Zeiger auf der obern Eintheilung gleiche Winkel zeigen. Dieses Ajustiren ist leicht auszuführen. Der Glasfaden hängt in einem Glasrohr, welches in der Mitte des Glasdeckels in einer Messingbüchse steht, mittelst deren das Rohr aufgeschraubt wird. Das Glasrohr ist oben und unten mit weichem Leder umgeben, um es unbeschädigt in passende Messingbüchsen steif eindrücken zu können. Das Ajustiren wird nun bewirkt durch Umdrehen des Glasrohrs in einer dieser beiden Büchsen. Zum Anhängen der Kugeln, deren Elektricitätsverlust gemessen werden soll, wird das untere Ende des Zuleitungsdrahtes zu einem Häkchen umgebogen.

Zur Bestimmung der Zeit diente eine Secundenuhr mit Compensationspendel, welche die Secunden recht deutlich hören lässt, welches für diesen Zweck durchaus erforderlich ist; eine Taschenuhr ist deshalb unbrauchbar dazu.

Das Psychrometer, welches zur Messung der Wasserdämpfe diente, wird von Greiner jun. in Berlin für die meteorologischen Stationen Preussens mit musterhafter Sorgfalt angefertigt. Das eine Thermometer brauche ich

seit 14 Jahren, ist oft revidirt und stets genau richtig befunden worden; es ist zugleich sehr empfindlich. Das andere hat ein etwas grösseres Kügelchen, ist also etwas weniger empfindlich; es wurde mehrere Jahre von Dove als Normalinstrument benutzt.

§. 3.
Versuchsmethoden.

Die Versuchsmethoden müssen sich nach den Apparaten richten. Was Kohlrausch über das beschriebene Elektrometer in seinem Aufsatze Bd. 72, S. 353 ff. der Ann. von Pogg. sagt und was ich selbst an demselben erfahren, konnte mich nur ermuthigen, es ohne Bedenken auch zu diesem Zwecke anzuwenden. Der Körper, dessen Verlust untersucht werden sollte, stand entweder während der ganzen Verlustperiode mit dem Zuleiter in leitender Verbindung, oder dieselbe wurde am Anfange und Ende der Periode momentan hergestellt und das Messinstrument blieb auch in diesem Falle während der ganzen Periode geladen. Dieser bequemste Weg des Experimentirens, nämlich der, die wirksamen Theile des Messinstrumentes der Oberfläche nach als einen Theil der Oberfläche des Verlustkörpers zu betrachten und den Verlust dieses kleinen Theiles dem Verlust des grossen proportional zu setzen, ist auch ein sicherer, da diese Voraussetzung für die meisten der nachfolgenden Gesetze giltig war; und bei den Versuchsreihen, wo diese Voraussetzung der Wirklichkeit nicht entsprach, wo nämlich die Luft um den Versuchskörper geändert wurde, im Gefässe des Messapparates aber nicht, wurde dafür gesorgt, dass der Versuchskörper möglichst gross, also gegen seine Oberfläche die der wirksamen Theile des Messinstrumentes möglichst eine verschwindende Grösse war. Hier trug dann noch die grosse Isolirungsfähigkeit des Apparates, von welcher der Grund in Pogg. Ann. Bd. 106, S. 332 angegeben ist, dazu bei, die etwaigen kleinen Fehler auf ein Minimum zu bringen.

Es konnte aber noch ein Zweifel darüber entstehen, ob dieselbe Berechnungstabelle noch gelte, wenn der Verlustkörper am Zuleiter hängt während der Messung. Es wurden deshalb die Torsionsmessungen, welche der Tabelle zur Grundlage dienen, so wiederholt, dass während der ganzen Dauer derselben die Verlustkugel am Zuleiter hängen und aus einer constanten Quelle geladen blieb. Die Zahlen waren fast genau dieselben, wie die früher ohne Kugel erhaltenen, so dass der Zweifel als unbegründet erschien.

Andere Versuchsmethoden, z. B. die mit jedesmaliger Entladung des Elektrometers nach der Messung und dann am Anfange der neuen Periode mit neuer Ladung vom Verlustkörper; oder das Verfahren, das Elektrometer vor der Ladung von der Verlustkugel aus einer constanten Quelle zu laden und den constanten Summanden in Rechnung zu bringen, erwiesen sich in der Praxis als weniger vortheilhaft.

§. 4.
Art und Weise zu experimentiren.

Das Experimentiren findet in folgender Weise statt. Die Kugel wird mit einem beliebigen Quantum Elektricität geladen. Zu dieser Ladung dient am besten für $+E$ ein kleiner Elektrophor, und für $-E$ eine etwa zweizöllige Korkscheibe mit Lackstiel. Wird diese einmal stark über wollenes Tuch gestrichen, so besitzt sie ein Quantum von negativer Elektricität, welches ausreicht, eine etwa vierzöllige Kugel so stark zu laden, dass das Elektrometer, wenn der Glasfaden nicht zu dick ist, von ihr einen Ausschlagswinkel von 70—80 oder noch mehr Graden erhält. Ist das Elektrometer ebenfalls geladen und der obere Zeiger auf 0 gestellt, so geht man zur Uhr, zählt die Secunden mit bis etwa 60, indem man, zum Messapparat zurückgekehrt, gleichzeitig den Ausschlagswinkel abliest. Es versteht sich, dass der Wagebalken vorher vollständig zur Ruhe gekommen sein muss. In dem Moment, wo das Pendel 60 schlägt, muss man sich des Ausschlagswinkels möglichst versichert haben. Man steht dann gleich auf und sieht auf der Uhr nach, ob man auch die Minuten richtig gelesen und die Secunden richtig gezählt hat. Dann erst wird aufgeschrieben. Für die im Nachfolgenden beschriebene Berechnungsmethode ist es am besten, die Verlustperioden möglichst klein und gleich gross zu nehmen; sie wurden meist zu fünf oder zehn Minuten angenommen. Eine halbe Minute vor der folgenden Messung wird der Wagebalken, welcher nach jeder Messung auf 90° zurückgestellt wird, mit dem Streifchen eben in Berührung gebracht, dann wieder gehoben, und nun der obere Zeiger wieder auf Null gestellt. In ein paar Secunden ist dies geschehen. Um es so schnell und sicher bewerkstelligen zu können, ist eine besondere Vorrichtung erforderlich. Der Stift, an welchen oben der Glasfaden gekittet ist, wird gedreht mittelst eines dreiarmigen Haspels, welcher über dem Zeiger mit einer Stellschraube befestigt ist. An den Bügel für die Schraube zum Senken und Heben des Wagebalkens schraubt man einen dicken Eisenstift; an diesen lässt man den einen Arm jenes Haspels schlagen, wenn der Zeiger auf Null steht, und einen andern Arm von der entgegengesetzten Seite, wenn er 90° zeigt. Da der Stift durch Lüftung seiner Stellschraube sich verschieben lässt, so ist diese Bedingung leicht herbeizuführen. Bei allen Messungen durch Ausschlagswinkel braucht man dann den Zeiger oben gar nicht zu stellen, braucht nicht aufzustehen beim Ablesen, versäumt keine Zeit und erreicht seinen Zweck weit sicherer.

Hängt die Kugel nicht am Messapparat, so bringt man sie selbst mit dem Schlage der letzten Secunde einer jeden Periode mit dem Zuleitungsdraht in Berührung, oder den Ueberträger, welchen man vorher schon gegen sie gestemmt hat.

§. 5.

Begriffsbestimmungen.

Die Begriffsbestimmungen beziehen sich auf den atmosphärischen Wasserdampf und auf den Elektricitätsverlust.

Da Wasserdämpfe Luft sind, so drücken sie also auch mit den andern Gasen der Atmosphäre auf das Barometer, haben ihren Antheil am Barometerstande. Hier in Kreuznach beträgt dieser Summand des Gesammtbarometerstandes im Durchschnitt fast genau ein Procent. Man nennt ihn den „Dunstdruck" und berechnet ihn in denselben Einheiten, durch welche auch die Barometerhöhe dargestellt wird. Die Atmosphäre enthält aber höchst selten so viel Wasserdämpfe an irgend einem Orte, am wenigsten in einem Zimmer, als sie bei der gerade obwaltenden Temperatur aufnehmen kann; mit andern Worten, sie ist selten gesättigt mit Wasserdämpfen. Ist dies aber der Fall, so haben die Dämpfe das Maximum ihrer Dichtigkeit, und der Versuch, sie noch mehr zu verdichten, hat nur die Folge, dass ein Theil derselben zu Tröpfchen wird, welche nun wegen ihrer Kleinheit in der Luft schwimmen. Aber zu jeder andern Zeit lässt sich fragen, wie weit die atmosphärischen Wasserdämpfe noch vom Maximum ihrer Dichtigkeit entfernt sind. Man bestimmt dies, indem man berechnet, wie viel Procent sie bei der stattfindenden Temperatur von der Menge ausmachen, welche bei dieser Temperatur in der Atmosphäre sein würde, wenn sie das Maximum ihrer Dichtigkeit hätten. Dieser Procentsatz vom Maximum der Dichtigkeit bei gerade obwaltender Temperatur wird die „relative Feuchtigkeit" genannt; wir wollen sie in der Folge schlechtweg „Feuchtigkeit" nennen. Man kann aber auch noch fragen, wie schwer denn die Wasserdämpfe sind, welche bei gerade obwaltender Temperatur eine gewisse Raumeinheit, z. B. einen preuss. Cubicfuss, einnehmen. Diese Gewichtsbestimmung für eine angenommene Raumeinheit nennt man „absolute Feuchtigkeit" oder „Dunstmenge". Wir wollen im Nachfolgenden der Kürze wegen das letztere Wort verwenden.

Es ist bekannt, dass elektrisirte Körper Elektricität verlieren durch die umgebende Luft, und durch die Isolatoren, welche zur Absperrung der Elektricität dienen. Ersteren Verlust wollen wir „Luftverlust", letzteren „Stützenverlust" nennen. Der Stützenverlust kann seiner Natur nach nie allein auftreten. Wir wollen nun den stets mit Luftverlust verbundenen Stützenverlust „Gesammtverlust" nennen. Für jede dieser drei Arten müssen wir aber wieder den absoluten vom relativen Verlust unterscheiden. Den absoluten Verlust für einen Zeitraum nennen wir die Differenz zwischen dem Anfangs- und Endquantum, und für eine Zeiteinheit die Zahl, welche man erhält, wenn man diese Differenz durch die Anzahl der Zeiteinheiten der Periode dividirt. Der relative Verlust ist das Verhältniss des absoluten Verlustes einer Periode zum mittleren Quantum derselben, ausgedrückt in Procenten dieses mittleren Quantums. Wir

haben also einen absoluten und relativen Luft-, Stützen- und Gesammtverlust zu studiren.

§. 6.
Berechnungsverfahren.

In Bezug auf die Berechnung der Grössen des Wasserdampfes braucht nur bemerkt zu werden, dass dieselbe stattgefunden hat nach den August-schen Tafeln.

Die Berechnung der relativen Elektricitätsverluste kann in zweifacher Weise stattfinden, sowohl in Beziehung auf das mittlere Quantum der ganzen Periode, als in Bezug auf das mittlere Quantum jeder Zeiteinheit. Die letztere Berechnung ist zwar genauer, die erstere aber bequemer, und da sie bei genauer Beobachtung und nicht zu grossen und möglichst gleichen Perioden die Gesetzmässigkeit der Erscheinungen vollständig erkennen lässt, so wurde sie meist gewählt. Nehmen wir zur Zeiteinheit die Minute, so ist die Formel für die erste Berechnungsweise, wenn α und β die zu Anfang und Ende der Periode beobachteten Quantitäten, resp. die Quantitäten sind, welche sich nach den beobachteten Winkeln aus den Tabellen ergeben, t und t' die Anfangs- und Endzeit in Minuten bedeuten und r den relativen Verlust bezeichnet:

$$r = \frac{(\alpha - \beta)\,100}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\,(t' - t)}.$$

Ferner stand noch die Formel für die zweite Berechnungsweise zur Disposition, welche Riess auf S. 109 des 1. Bandes seines Werkes mittheilt, welche er aber in eine Näherungsformel verwandelt hat, nach der er seine Rechnungen ausführt; nämlich die Formel:

$$\frac{1}{p} = \frac{\log Q_o - \log Q_z}{0{,}4343\,Z},$$

oder als Procentformel für den relativen Verlust:

$$r = \frac{(\log Q_o - \log Q_z)\,100}{0{,}4343\,Z},$$

wo $\frac{1}{p}$ den Zerstreuungscoefficienten, Q_o das Anfangs-, Q_z das Endquantum und Z die Anzahl der Zeiteinheiten, resp. der Minuten bedeutet. Es ist zwar für mein Instrument diese Formel passender, als für die Drehwage, da die Quantitäten direct aus den Tabellen herausgelesen werden. Ich verglich die Resultate derselben mit den nach der obigen Formel berechneten, und will auch hier eine Beobachtungsreihe, nach beiden Formeln berechnet, mittheilen, damit der Leser beurtheilen kann, in wie weit meine Formel genau ist. Gleich der zweite Verlust der Reihe liess erkennen an seiner Grösse, dass er kein reiner Luftverlust, sondern ein Gesammtverlust sei. Dieser sollte in einen Luftverlust verwandelt werden, weshalb gleich nach $3^h 9'$ einige Rauchwolken von einer Cigarre auf die Kugel geblasen wurden.

1. Uebersicht.

	Zeit.	Ausschlagswink.	Quantum desselben.	Mittleres Quantum.	Absol. Verlust pro 1'.	Relat. Verlust nach meiner Form.	Relat. Verlust nach d. Riess'schen Formel.
	$2^h 44'$	$84\frac{1}{2}°$	3045,5				
				2947,7	39,1	1,326	1,327
	49'	$83\frac{3}{4}°$	2850				
				2743	42,8	1,560	1,561
	54'	$82\frac{5}{6}°$	2636				
				2517	47,6	1,891	1,893
	59'	$81\frac{7}{12}°$	2398				
				2292	42,4	1,850	1,851
	$3^h 4'$	$80\frac{1}{6}°$	2186				
				2066,8	47,7	2,308	2,308
	9'	$78\frac{1}{12}°$	1947,7				
Rauch.				1743,3	40,9	2,346	2,355
	19'	73°	1539				
Noch				1468,7	26,5	1,804	1,801
einige	24'	$70\frac{1}{2}°$	1406,5				
				1357,1	19,8	1,459	1,457
Mal	29'	$68\frac{1}{3}°$	1307,7				
Rauch.				1273,2	13,8	1,084	1,084.
	34'	$66\frac{3}{4}°$	1238,7				

Dieses Resultat veranlasste mich zur Anwendung meiner Formel bei den meisten nachfolgenden Berechnungen.

Wie alle folgenden, so ist auch diese Uebersicht aus den vielen, von denen nur wenige hier mitgetheilt werden können, mit Absicht ausgewählt worden, weil sie ein Mehrfaches veranschaulicht. Zuerst macht sie den Einfluss eines Mittels zur Abänderung eines Verlustes deutlich. Dann zeigt sie anfangs den blossen Luftverlust, woran zu erkennen ist, dass die Elektricität beim Fortschreiten über den Isolator Widerstand findet; derselbe ist aber bald überwunden, sie ist bis zum nächsten Leiter gekommen und von da an wird der Verlust immer grösser, wie es jeder Gesammtverlust zeigt, bei welchem die Zunahme jedoch nur auf den Stützenverlust kommt. Ferner wird der Schellack mit Tabaksrauch abgetrocknet und die Bewegung auf seiner Oberfläche nimmt ab in dem Maasse, wie er die Wassertheile verliert. Endlich sieht man, wie genau auch für den grösseren Zeitraum von 10 Minuten beide Formeln in den Resultaten übereinstimmen.

Es ist leicht ersichtlich, dass man zur Berechnung der absoluten Verluste keiner Formel bedarf, da sie sich unmittelbar aus den Zahlen ergeben, welche die Tabelle liefert. Diese Tabelle möge hier stehen, da sie von der bedeutend abweicht, welche Kohlrausch in Poggendorff's Annalen Bd. 72, S. 385 mittheilt. Die Gründe für diese Abweichung stehen in meinem Aufsatze über Luftelektricität in Poggendorff's Annalen Bd. 86, S. 272.

Tabelle zur Berechnung der Quantitäten.

Winkel in ganz. Grad.	Quant.	Winkel.	Quant.	Winkel.	Quant.	Winkel.	Quant.	Winkel.	Quant.
1	34	18	177	35	408	52	758	69	1337
2	41	19	188	36	425	53	783	70	1382
3	48	20	200	37	442	54	810	71	1431
4	55	21	211	38	460	55	837	72	1483
5	62	22	223	39	478	56	865	73	1539
6	69	23	234	40	497	57	894	74	1603
7	76	24	247	41	516	58	923	75	1675
8	84	25	260	42	535	59	953	76	1755
9	92	26	273	43	554	60	985	77	1843
10	100	27	287	44	574	61	1019	78	1939
11	109	28	301	45	595	62	1055	79	2044
12	117	29	316	46	617	63	1092	80	2163
13	126	30	331	47	639	64	1130	81	2300
14	136	31	346	48	661	65	1169	82	2467
15	146	32	361	49	685	66	1208	83	2670
16	156	33	376	50	709	67	1250	84	2910
17	166	34	392	51	733	68	1293	85	3181.

Reicht diese Tabelle nicht aus, so wird nach Torsionen gemessen und berechnet.

B. Gesetzmässigkeit der Verlusterscheinungen.

§. 7. 1. Satz.

Der relative Luftverlust ist constant bei derselben Luftbeschaffenheit.

Schon Coulomb hat den obigen Satz durch sorgfältige Messungen constatirt. Ferner haben Riess und ich die Coulomb'schen Messungen bestätigt. Coulomb hat jedoch seine Verlustmessungen nur an seinen innerhalb des Gehäuses seines Instrumentes befestigten Kugeln gemacht. Ich habe in meinem Aufsatze über Luftelektricität gezeigt, dass man noch recht gut stimmende Zahlen erhalten kann, wenn man die Kugel, deren Verluste gemessen werden sollen, vom Messinstrumente ganz trennt und nur in den Momenten der Ladung mit diesem in Berührung setzt. Ein paar Reihen schon vor 11 Jahren gemachter Messungen, von denen aber in dem genannten Aufsatze nur die Resultate aufgenommen sind, mögen deshalb hier vollständig stehen. Die Beobachtungen sind jedoch mit einem andern Elektrometer gemacht, als die meisten übrigen, mit einem Elektrometer, welches, wie die beigesetzten Quantitäten zeigen, eine etwas andere Tabelle erfordert. Diese Tabelle steht, wie eine Vergleichung lehrt, zwischen der von Kohlrausch gelieferten und der oben mitgetheilten. Auch die Werthe der 3. und 9. Uebersicht sind nach dieser Tabelle berechnet.

2. Uebersicht.

Reiner Luftverlust. Die Kugel zur Beobachtung der atmosphärischen Elektricität hat an ihrem Ständer einen neuen Ring von gelbem Schellack bekommen.

Zeit.	Ausschlagswink. in Graden.	Tab.-Quant. desselben.	Absol. Verl. für d. Periode.	Absol. Verl. pro 1'.	Mittl. Quant.	Rel. Verl. in % d. mittl. Quant.
$5^h 33'$	$78\frac{1}{2}$	1935				
			377	22,2	1746,5	1,27
$50'$	$73\frac{2}{3}$	1558				
			272,5	16	1422,25	1,12
$6^h 7'$	$69\frac{1}{4}$	1285,5				
			248,5	13,8	1162,25	1,19
$25'$	63	1037				
			227	11,35	923,5	1,23
$45'$	$55\frac{2}{3}$	810				
			178,8	8,9	720,6	1,24
$7^h 5'$	$48\frac{1}{4}$	631,2				
			148,5	7,1	556,95	1,27
$26'$	$40\frac{1}{3}$	482,7				
			121,7	5,5	421,85	1,33
$48'$	33	361				
			92,8	4,2	314,6	1,34
$8^h 10'$	$26\frac{2}{5}$	268,2				
			72,4	3,15	232	1,36
$33'$	$20\frac{1}{6}$	195,8				
			61,8	2,5	164,9	1,52
$58'$	14	134				
					Summa:	12,87.
					Mittel:	1,29.

Bei dieser Beobachtungsreihe participirten an der Isolirung fünf Schellackstellen, zwei an der Kugel, der Schellack am Ueberträger und endlich die zwei Schellackstellen am Elektrometer. Alle 3 Körper blieben in den Zwischenzeiten geladen, konnten also einen Verlust erleiden. Da die Kugel aber 6 Zoll Durchmesser hat, so traten die etwaigen Verluste der beiden andern Körper gegen den ihrigen sehr zurück. Wir sehen am Ende der Versuchsreihe, welche beinahe 3½ Stunde dauerte, die Verluste doch etwas zunehmen, ein Beweis, dass nach der langen Ladung endlich doch eine kleine Menge Elektricität sich durchgearbeitet hat bis zum nächsten Leiter, wahrscheinlich auf dem Ringe am Ständer der Kugel, wo sie einen Weg von nur etwa fünf Linien zurückzulegen hatte. Am vorhergehenden Tage hatte dieselbe Kugel in den ersten 28 Minuten (es wurde von 7 zu 7 Minuten gemessen) durchschnittlich pro 1 Minute verloren: 1,42, in den folgenden 28 Minuten: 1,34, wieder in 28 folgenden Minuten: 1,30, dann 1,37, ferner 1,20, darauf 1,39 und endlich 1,34 Procent. Also auch hier war der relative Verlust fast ganz constant.

An diesen Reihen sehen wir den reinen Luftverlust bei Anwendung frischen Schellacks hervortreten. Die folgende Reihe zeigt ihn uns an dem über dem Ofen getrockneten Schellack derselben Kugel; sie hatte eine gute Stunde an der warmen Luft gestanden, welche vom geheizten Ofen aufstieg.

3. Uebersicht.

Reiner Luftverlust durch Trocknen des Schellacks herbeigeführt.

Ausschlagsw.	Zwischenzeit.	Quantum.	Absol. Gesammtverlust.	Absol. Verl. pr. 1 Min.	Mittlere Quantitäten.	Rel. Luftverlust.
$71\frac{1}{2}$		1413				
	13′		281,5	21,6	1272,25	1,70
$65\frac{1}{2}$		1131,5				
	15′		245,5	16,4	1008,75	1,63
$58\frac{3}{8}$		886				
	15′		194	12,9	789	1,64
51		692				
	18′		158,3	8,8	612,85	1,44
$43\frac{1}{4}$		533,7				
	17′		132	7,8	467,7	1,67
$35\frac{3}{8}$		401,7				
	16′		91,2	5,7	356,1	1,60
$29\frac{1}{3}$		310,5				
	17′		75,5	4,4	272,75	1,61
$23\frac{3}{8}$		235				
	17′		62	3,6	204	1,76
18		173				
	17′		43,5	2,6	151,25	1,72.
$13\frac{1}{8}$		129,5				
					Mittel:	1,64.

Eine etwas kleinere Kugel von nur 4 Zoll Durchmesser war in derselben Weise vorgerichtet, hatte aber an ihrem Ständer einen etwas breitern Ring, welcher ebenfalls am Ofen getrocknet war. Die Versuchsreihe mit ihr nahm 3 Stunden und 20 Minuten ein, da 20 Messungen von 10 zu 10 Minuten gemacht wurden. Es mögen hier nur die relativen Verluste pro Minute folgen: 4,01; 2,88; 2,78; 2,50; 2,50; 2,35; 2,30; 2,04; 2,40; 2,09; 2,16; 1,97; 2,35; 2,30; 1,34; 1,70; 1,73; 1,63; 1,49. Also hier sehen wir den relativen Verlust ziemlich regelmässig abnehmen. Den Grund davon müssen wir später im Zusammenhange mit andern Erscheinungen aufsuchen.

§. 8. 2. Satz.

Der absolute Luftverlust ist der Dichtigkeit proportional.

Beweis. Ist $\frac{(\alpha-\beta)\,100}{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ für jede Zeiteinheit constant, also gleich C, und wir setzen für die allgemeinen Werthe von α und β bestimmte Werthe, z. B. α' und β', sowie α'' und β'', so ist auch: $\frac{(\alpha'-\beta')\,100}{\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')}=\frac{(\alpha''-\beta'')\,100}{\frac{1}{2}(\alpha''+\beta'')}=C$, also auch:

$$\alpha'-\beta' : \alpha''-\beta'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta') : \tfrac{1}{2}(\alpha''+\beta'').$$

§. 9. 3. Satz.

Der absolute Gesammtverlust ist von da an, wo der Stützenverlust zu Stande kommt, den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten oder mittlern Quantitäten proportional. Ein zu Stande gekommener Stützenverlust soll **„vollständiger“** Stützenverlust heissen.

Für diesen Satz kann ich vorläufig nur Thatsachen sprechen lassen. Auch muss ich gestehen, dass eine vollkommene Uebereinstimmung der

Thatsachen mit dem Satze noch nicht vorhanden ist. Ich habe nämlich beinahe hundert Fälle berechnet, und wenn ich keine Auswahl treffe unter denselben, also auch die weniger zuverlässigen mit gleicher Wahrscheinlichkeit wie die übrigen in Rechnung bringe, so ist eine Differenz, aber nur eine sehr kleine vorhanden. Es giebt jedoch schwerlich einen Satz, der eine der Thatsächlichkeit mehr entsprechende Formel zu liefern geeignet wäre.

Der Satz wurde zuerst aus Zahlen herausgelesen, welche in einer Uebersicht stehen, die zu anderm Zwecke gebildet wurde, nämlich um den Einfluss des Wasserdampfes auf den Elektricitätsverlust kennen zu lernen. Drei Fälle gaben im Mittel eine fast völlige Uebereinstimmung der Thatsachen mit dem Satze. Die Messungen hatten Perioden von 10 Minuten. Es wurde nun so geurtheilt, dass, wenn der Satz in der Wirklichkeit begründet sei, man noch bessere Zahlen für denselben erhalten müsse, wenn man die Perioden kürzer nehme. Es wurden an verschiedenen Tagen Reihen gebildet mit Perioden von 5 Minuten. Wenn ich von diesen eine hier mittheile, so ist es wohl am zweckmässigsten, eine solche zu nehmen, welche bei Tage und im ungeheizten Zimmer gemacht wurde. Eine solche ist folgende. Quantitäten nach der mitgetheilten Tabelle.

4. Uebersicht.

Gesammtverlust, absoluter.

Zeit.	Ausschlagswinkel.	Quantitäten.	Absol. Verl.	Deren Quot.	Mittl. Quant.	Deren Wurz.	Wurz.-Quot.
$1^h 29'$	$80\frac{1}{4}$	2197					
			240,5		2076,7	45,57	
$34'$	$78\frac{1}{6}$	1956,5		0,85			1,07
			281,5		1815,7	42,61	
$39'$	75	1675		1,08			1,08
			260		1545	39,31	
$44'$	$70\frac{2}{3}$	1415		1,03			1,09
			252,5		1288,7	35,90	
$49'$	$64\frac{5}{6}$	1162,5		0,97			1,12
			261,3		1031,8	32,12	
$54'$	$57\frac{1}{4}$	901,2		1,50			1,13
			174,2		814,1	28,53	
$59'$	$50\frac{3}{4}$	727		0,58			1,15
			302		576	24,00	
$2^h 4'$	36	425		1,87			1,29
			161,8		344,1	18,55	
$9'$	$25\frac{1}{4}$	263,2		1,32			1,30
			122,2		202,1	14,22	
$14'$	$14\frac{1}{2}$	141					
			Summa:	9,20		Summa:	9,23

Man sieht, wie sich trotz der starken Abweichungen in einzelnen Fällen am Ende der Reihe doch Alles schön ausgleicht, und wie meist auf einen zu kleinen Quotienten bei den absoluten Verlusten ein zu grosser folgt. Die ausgesprochene Vermuthung, dass man durch kleinere Perioden Zahlen erhalten würde, welche genauer mit dem Satze stimmen, bestätigte sich durch diese und alle andern Reihen, und in keiner weichen einzelne Fälle so weit von einander ab, als in der obigen. Um jedoch auch das Verhalten

bei Perioden von 10 Minuten zu zeigen, möge noch folgende Uebersicht hier stehen. Es sind noch mehrere Rubriken beigefügt zur Vorbereitung auf Folgendes.

5. Uebersicht.

Absoluter und relativer Gesammt-, sowie absoluter und relativer Stützenverlust.

Zeit.	Wink.	Quant.	Absol. Verl. pro 1'. Gesammt-	Luft-	Stützen-Verlust.	Mittlere Quantitäten.	Deren Wurzeln.	Relat. Verl. pro 1'. Gesammt-	Stütz.-	Luft-Verlust.	Quotienten aus Wurz.	Verl.
$10^h 38'$	$84\frac{1}{6}$	2955										
			35,3	35,3	0,0	2778,5		1,27	0,00	1,27		
48'	$82\frac{2}{3}$	2602										
			37,1	30,7	6,4	2416,5	49,15	1,54	0,27	1,27		
58'	$80\frac{1}{2}$	2231									1,09	0,92
			40,3	25,8	14,5	2029,5	45,05	1,99	0,72	1,27		
$11^h 8'$	$76\frac{5}{6}$	1828									1,11	1,10
			36,7	19,9	16,8	1644,5	40,55	2,29	1,02	1,27		
18'	$71\frac{7}{12}$	1461									1,12	1,14
			32,1	16,6	15,5	1300,5	36,06	2,46	1,19	1,27		
28'	$64\frac{1}{4}$	1140									1,15	0,99
			32,3	12,4	19,9	978,5	31,28	3,30	2,03	1,27		
38'	$54\frac{1}{4}$	817									1,20	1,16
			27,9	8,6	19,3	677,5	26,03	4,12	2,85	1,27		
48'	$42\frac{1}{6}$	538									1,26	1,27
			21,9	5,4	16,5	428,2	20,69	5,13	3,86	1,27		
58'	$29\frac{1}{6}$	318,5									1,31	1,55
			14,1	3,1	11,0	247,7	15,74	5,71	4,44	1,27		
$12^h 8'$	18	177										
			7,9	1,6	6,3	137,5		5,82	4,55	1,27		
18'	$9\frac{3}{4}$	98										
										Summen:	8,13	8,24.
										Mittel:	1,16	1,18.

Hier sind die erste und letzte Beobachtung bei den Quotienten nicht mit in Rechnung genommen, weil sie den Charakter des Gesammtverlustes mit vollständigem Stützenverlust nicht haben; dieser besteht, wie man sieht, in einer regelmässigen Zunahme der relativen Gesammtverluste, welche Zunahme aber auf den Stützenverlust fällt. Die einzelnen Fälle der Quotienten weichen weniger von einander ab, als in der vorigen Uebersicht; auch stimmen die Summen im Mittel fast überein.

Wird aus sämmtlichen berechneten Fällen, 94 an Zahl, ohne alle Auswahl das Mittel genommen, so ist es für die Quotienten der Wurzeln: 1,14 und für die Quotienten der absoluten Gesammtverluste: 1,16.

Da $\frac{\alpha - \beta}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$ den relativen Verlust bezeichnet, der als Gesammtverlust mit vollständigem Stützenverlust erfahrungsmässig allmälig wächst, als Luftverlust aber constant bleibt, so muss beim Gesammtverlust der Zähler dieses Bruches, $\alpha - \beta$, der absolute Verlust, in einem kleinern Verhältniss abnehmen, als der Nenner, das mittlere Quantum. In bei Weitem den meisten meiner Beobachtungsreihen der Gesammtverluste ist $\alpha - \beta$ eine geraume Zeit hindurch fast constant, oder gar es wächst der Werth noch, wie denn in der obigen 4. Uebersicht die 4, in der 5. die 3 folgenden Werthe

auch grösser sind, als der erste. In fast allen Uebersichten sind die 5—8 ersten Werthe, je nach der Länge der Reihe ist ihre Zahl verschieden, fast gleich. In einer finde ich folgende Werthe der Reihe nach für $\alpha - \beta$: 145; 188; 166; 168; 164; 144; 148,5; 142,5; 138; 135; 136; 122,5; 119,5; 86,5; 85; 59,5; 46; die Periode ist die von 5 Minuten. Hier also ist der 11. Werth noch 94 Procent des ersten. Von da an aber nimmt die Reihe schnell ab, so dass vom elften an der siebente nur noch 33 Procent von jenem beträgt. Und mehr oder weniger ähnlich sind die meisten Reihen, in denen sich der Stützenverlust als ein vollständiger ausspricht.

Da der Gesammtverlust eine Summe ist aus dem Stützenverlust und dem bekannten Luftverlust, so sind diese beiden auch leicht zu trennen, wie es in der 5. Uebersicht für alle Arten ausgeführt ist. Bei den relativen Gesammtverlusten hat man nur den normalen Luftverlust zu subtrahiren und als solchen kann man oben 1,27 Procent annehmen. Sehr häufig fangen meine Reihen, wie auch die 5. Uebersicht, mit dem normalen Luftverlust an, so dass der erste Verlustwerth noch nicht erkennen lässt, ob man es mit einem Luft- oder einem Gesammtverlust zu thun hat. Die Trennung des absoluten Gesammtverlustes in seine beiden Summanden geschieht natürlich im Verhältniss der relativen Luft- und Stützenverluste. Dem Zähler des Bruches für den relativen Gesammtverlust soll in jedem Falle das genommen werden, was den Bruch zum Luftverlust macht. Nennen wir das, was zu diesem Zwecke von demselben subtrahirt werden muss, a, den normalen relativen Luftverlust n, so haben wir also die allgemeine Gleichung:

$$\frac{(\alpha - \beta) - a}{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = n;$$

also ist:

$$a = (\alpha - \beta) - n.\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Nach diesem Ausdrucke sind die obigen Werthe für den absoluten Stützenverlust berechnet. Der Gesammtverlust ist eine gemischte Erscheinung, ist eine Summe aus zwei Bewegungen ganz verschiedener Art. Die eine davon, der Luftverlust, hat eine einfache, wohlbekannte Gesetzmässigkeit; die andere aber, der Stützenverlust, lässt sehr viele Complicationen zu. Man hat sich meiner Ansicht nach die Sache in folgender Weise vorzustellen.

Wenn sich beim Stützenverlust, was offenbar der Fall ist, ein Theil der Elektricität über die Oberfläche des Isolators hinweg begiebt, so hat dieser Theil bei seiner Fortbewegung einen Widerstand zu überwinden, welcher nach Beschaffenheit des Isolators, nach dem Grade seiner Befeuchtung und der Grösse seiner Oberfläche bis zum nächsten Leiter verschieden sein kann. Obige Zahlen sind sämmtlich mit Apparaten erzielt worden, wo der Weg*)

*) Wenn dieser Weg ganz zurückgelegt wird von der langsam vorrückenden $E.$, so dass dadurch ein dauernder Abfluss gesichert ist, so nenne ich das oben im 3. Satze: „der Stützenverlust kommt zu Stande".



der Elektricität höchstens einen halben Zoll bis zum nächsten Leiter betrug, und doch war der Verlust zum Theil ein reiner Luftverlust; aber einmal auch verlief sich der Stützenverlust in einen Luftverlust (oben im Texte nach der 3. Uebersicht), wo nämlich der Lack vorher getrocknet war und die Elektricität bis zum nächsten Leiter etwa einen Weg von einem halben Zoll zurückzulegen hatte. Ist die Oberfläche des Isolators nicht ganz trocken, so fängt bei der Ladung der Stützenverlust an, sich zu bilden. Die Elektricität wird dann zum Theil auf die Oberfläche des Isolators getrieben, wodurch ihre Dichtigkeit, also auch ihre Druckkraft und der Verlust abnehmen muss. Der Widerstand wächst bei der Fortbewegung und die Druckkraft nimmt ab; es muss also, ist nur der Weg, welchen sie zurückzulegen hat, lang genug, endlich der Zeitpunkt eintreten, wo beide sich das Gleichgewicht halten, und dann hört die Fortbewegung auf, der Stützenverlust kommt nicht vollständig zu Stande. Ich habe auch Fälle von Stützenverlusten beobachtet, wo die Elektricität einen Weg von mehreren Zollen zurücklegen musste. In einem Falle waren die Thatsachen folgende.

6. Uebersicht.

Beispiel eines Stützenverlustes, welcher erst nach einiger Zeit zu Stande kommt. Eine Messingkugel von 4 Zoll Durchmesser hing an einem Stängelchen von Wallrath und wurde jedes Mal bei der Ladung mit dem Zuleitungsdraht in Berührung gebracht.

Zeit.	Ausschlagswinkel.	Absol. Verl. pr. 1'.	Mittl. Quantität.	Relat. Verl.
9h 31'	59			
		23,8	834	2,85
41'	50¼			
		17,9	634	2,82
50'	43			
		9,4	507	1,85
10h 0'	38			
		15,2	384	3,96.
10'	28½			

Hier sieht man deutlich, wie bei der 5. Beobachtung die Elektricität endlich den Leiter erreicht haben muss, den Draht, welcher zum Aufhängen der Kugel in den Wallrath eingeschmolzen war. An den beiden darauf folgenden Tagen wurde der Versuch mit demselben Apparat wiederholt und an beiden Tagen zeigte sich die plötzliche Zunahme des Verlustes schon bei der 4. Beobachtung.

§. 10. 4. Satz.

Der relative Gesammtverlust mit vollständigem Stützenverlust wächst mit Abnahme der Dichtigkeit.

Dieser Satz folgt aus dem Vorigen und findet sich ausgesprochen in den Uebersichten über den Gesammtverlust.

§. 11. 5. Satz.

Der absolute vollständige Stützenverlust wächst erst mit Abnahme der Dichtigkeit, nimmt aber nachher bei fernerer Abnahme der Dichtigkeit ebenso wieder ab.

Dieser Satz findet seine thatsächliche Begründung in der Reihe der absoluten Stützenverluste, welche in der 5. Uebersicht mitgetheilt ist. Aehnliche Reihen wurden bei andern Beobachtungsübersichten erhalten. Es möge hier noch eine solche Reihe stehen: 0,0; 10,7; 8,5; 11,1; 12,4; 10,4; 13,2; 13,8; 16,7; 15,9; 17,8; 16,7; 17,7; 12,4; 13,2; 9,0; 7,0. Die relativen Verluste dieser Reihe sind: 1,28 (also der Anfang wieder normaler Luftverlust); 1,79; 1,72; 1,91; 2,06; 2,00; 2,30; 2,50; 2,74; 3,10; 3,70; 4,04; 4,93; 4,53; 5,74; 5,32; 5,38.

§. 12. 6. Satz.

Der relative vollständige Stützenverlust wächst mit Abnahme der Dichtigkeit.

Dieser Satz findet seine Begründung im Vorigen.

§. 33. 7. Satz.

Der Luftverlust hängt nicht ab vom Dunstdruck und der Feuchtigkeit, sondern, soweit bei seiner Entstehung das in der Atmosphäre vorhandene Wassergas mitwirkt, nur von der Dunstmenge oder der absoluten Feuchtigkeit.

Um darüber zur Gewissheit zu kommen, musste der Apparat, für dessen Studium die Verlustversuche aufs Neue in Angriff genommen wurden, das Mittel sein, nämlich die offne Säule.

Keinen Apparat, ausser dem atmosphärisch-elektrischen, hat der Verfasser in den letzten 13 Jahren mehr gebraucht und sorgfältiger studirt, als die offne Säule. Dass das Wassergas der Atmosphäre die Spannung der offnen Säule, die Dichtigkeit der in den Poldrähten sich manifestirenden Elektricität schwäche, stand fest; es sollte nur noch ermittelt werden, welche Function des Wasserdampfes es sei. Deshalb wurden die Verlustversuche mit isolirten Kugeln wieder vorgenommen; sie sollten die Antwort geben. Erst wurde der Verlust gemessen in möglichst frischer, von aussen herein geleiteter Luft. Dann wurde der Wasserdampf gesteigert in der Stube durch Sieden. Aufs Sorgfältigste wurden die Psychrometerstände notirt und Alles wurde aufs Genaueste berechnet. Es zeigte sich allerdings mit der Steigerung der Menge der Wasserdämpfe eine kleine Zunahme des Elektricitätsverlustes. Aber mit der Menge der Dämpfe stieg auch die Feuchtigkeit, die Annäherung an den Sättigungspunkt. Da wusste man denn wieder nicht, ob es das Eine oder Andre gethan. Der Versuch, die Ofenwärme so plötzlich zu erhöhen, dass die Stube im Winter den Sommer im Freien repräsentire, misslang. Denn im Sommer ist bekanntlich die

Feuchtigkeit im Freien oft sehr klein und die Dunstmenge gross; wie denn im Winter draussen die Feuchtigkeit oft sehr hoch und die Dunstmenge gering ist. Erst wenn das Sieden im Zimmer aufhört, steigt die Wärme bedeutender.

Um den für diese Untersuchung lästigen Stützenverlust reguliren oder beseitigen zu können, mussten erst besondere Studien gemacht werden. Nachdem dies geschehen, wurde es dem Verfasser klar, dass doch der Apparat am geeignetsten sei zu seinem Zweck, welcher ihn durch die Isolatoren gar nicht belästige, und das ist eben die offne Säule. Diese wurde also, da sie gerade sehr constant war, zu Hilfe genommen, und bald zeigte sich auch der Himmel günstig. Es kamen die kalten und trocknen Tage des diesjährigen Januar und Februar, wo Morgens die Luft eine sehr hohe Feuchtigkeit, aber nur sehr geringe Dunstmenge hatte. Wenn an einem solchen Morgen das Fenster geöffnet wurde, in dessen Nähe die Säule stand, so stieg ihre Spannung fast augenblicklich, und an einem Morgen, wo Tags vorher im Zimmer Wasser über eine Stunde gekocht hatte, also jedenfalls die Stubenluft viel mehr Wasserdämpfe hatte, wie die trockne, 11° kalte Luft draussen, welche die Feuchtigkeit 100 besass, an diesem Morgen stieg innerhalb einer Minute die Dichtigkeit der Säulenelektricität auf eine Höhe, welche 1,21 Mal das Anfangsquantum betrug. Wenn Versuche im vorigen Jahre die entgegengesetzte Erscheinung gezeigt hatten, wenn nämlich beim Oeffnen des Fensters nach heiterm Tage die Spannung plötzlich sank, so liessen diese die Ursache in Zweifel, weil an solchen Abenden nicht blos die Dunstmenge, sondern auch die Feuchtigkeit höher ist. Nur die frische Luft der heitern Wintertage konnte, und auch nur an der constanten Säule, den vollen Aufschluss geben, besonders der eine Morgen, wo die Feuchtigkeit ihr Maximum und die Dunstmenge wenigstens für unsere Gegenden beinahe ihr Minimum hatte. In diesem Falle war aber auch der Erfolg ein so eclatanter, dass ich die Säulenspannung nie in so kurzer Zeit so stark sich ändern gesehen habe. Wenn die Annäherung der Dämpfe an den Sättigungspunkt den Verlust herbeiführte, so hätte die Spannung bedeutend abnehmen müssen.

Es wurde nun auch der Versuch gemacht, durch numerische Bestimmungen der Sache noch näher zu treten. Als eines Tages sich der Polarstrom aufs Neue eingestellt hatte, die Luft Abends recht trocken und bei Tage über eine Stunde lang Wasser am Sieden gewesen war im Zimmer, also die Differenz zwischen der Dunstmenge im Freien und der im Zimmer bedeutend sein musste, wurde zuerst sorgfältig die Säulenspannung gemessen; der +Pol gab den Ausschlag von $46\frac{1}{2}°$. Zweimal wurde das Psychrometer im Freien abgelesen und danach Dunstdruck, Feuchtigkeit und Dunstmenge berechnet; sie betrugen: 0‴,94; 61,8; 0,00485 *). Dann wurden

*) Loth auf den preuss. Cubicfuss.

dieselben Grössen der Luft über der Säule gemessen; sie waren: 2''',02; 56,4; 0,00998. Nun wurde das Fenster geöffnet und nach einigen Secunden fing auch die Säulenspannung schon zu steigen an, aber das Steigen ging im Verhältniss langsam vor sich gegen das schon oben bemerkte, wo die Dunstmenge draussen nur 0,00370 betrug und die Differenz jedenfalls noch weit grösser war zwischen der äusseren Dunstmenge und der des Zimmers. Bei dem in Rede stehenden Versuch wurde das Maximum der Zunahme der Säulenspannung abgewartet; es trat erst etwa nach 8 Minuten ein, wo der Ausschlagswinkel $58\frac{1}{2}^0$ betrug. Die Spannung war also auf das 1,49fache gestiegen. Am andern Morgen wurden dieselben Messungen mit aller Sorgfalt wieder gemacht. Die Resultate waren:

	Psychrometer.	Dunstdruck.	Feuchtigkeit.	Dunstmenge.	Säulenspannung.
Im Freien:	$-3^0,7$ u. $-4^0,0$;	1''',29;	90,8;	0,00668;	anfangs: 47^0.
Im Zimmer:	$4^0,4$ u. $2^0,2$;	1''',73;	58,4;	0,00863;	n. 9 Min.: 51^0.

Hier blieb das Maximum der Säulenspannung also Morgens noch länger aus, als Abends vorher; dies Maximum betrug das 1,15fache des Anfangsquantums. Die Dunstmenge im Freien verhielt sich zu der im Zimmer Abends wie 1 : 2,06 und Morgens wie 1 : 1,29. Die Abnahme beim Oeffnen des Fensters betrug also Abends 1,06 und Morgens 0,29 Procent; die Zunahme der Säulenspannung aber Abends 0,49 und Morgens 0,15 Procent; jene Abnahmen verhalten sich wie 1 : 3,7, diese Zunahmen wie 1 : 3,3, eine Uebereinstimmung, welche wohl kaum erwartet werden konnte.

Es versteht sich, dass auch der Verlust einer elektrischen Kugel, auf welche man sehr trockne Luft von aussen hereinströmen lässt, augenblicklich abnimmt. Es genüge in dieser Beziehung die eine nachfolgende Uebersicht.

7. Uebersicht.

Einfluss trockner Luft von aussen auf die elektrisirte Kugel. Zwischen $1^h24'$ und $1^h30'$, sowie zwischen $1^h35'$ und $1^h40'$ war das Fensterchen (blos eine Glasscheibe) offen in der Nähe der Kugel.

Zeit.	Ausschlagswinkel.	Quantum.	Mittlere Quantitäten.	Absoluter Verlust pr. 1'.	Relativer Verlust.
$12^h51'$	$67\frac{3}{4}$	1283			
			1103	45	4,08
59'	58	923			
			822	40,4	4,91
$1^h\ 5'$	$50\frac{1}{2}$	721			
			652,75	27,3	4,18
9'	$44\frac{1}{2}$	584,5			
			504,75	31,9	6,32
14'	36	425			
			395	12,8	3,24
19'	32	361			
			318,15	17,1	5,37
24'	$26\frac{1}{6}$ (F. off.).	275,3			
			264,4	3,6	1,36
30'	$24\frac{1}{2}$ (F. zu).	253,5			
			219,25	13,7	6,25
35'	$18\frac{3}{4}$ (F. off.).	185			
			173	4,8	2,77
40'	$16\frac{1}{2}$ (F. zu).	161			
			130,5	8,7	6,67.
47'	10	100			

Das erste Mal fällt der Verlust durch das Oeffnen des Fensterchens

auf beinahe ein Viertel, und auch beim zweiten Oeffnen unter die Hälfte des nächst vorhergehenden. Das erste Mal tritt plötzlich der normale Luftverlust ein, das zweite Mal aber nicht, wahrscheinlich, weil die Luft sich schon zu stark abgekühlt hatte, um auf die Oberfläche des Schellacks kräftig genug einwirken zu können.

§. 14. 8. Satz.

Auf den Elektricitätsverlust sind absolutes Quantum, sowie Grösse, Form und Stoff des elektrisirten Körpers ohne Einfluss.

Dieser bereits von Coulomb gefundene Satz findet in meinen Beobachtungen vielfache Bestätigung. Wird eine Kugel von 6 Zoll oder von 1 Zoll Durchmesser genommen, der relative Verlust ist unter denselben Umständen derselbe, obgleich jene ein 36faches absolutes Quantum trägt. In Bezug auf Verschiedenheit des Stoffes und der Form enthält die folgende Uebersicht einige Facta. Es wurde zuerst ein Parallelepipedum von Eisen an den Messapparat gehangen und dessen Verlust gemessen; in der Mitte der Reihe aber dieser Körper mit einer Messingkugel von bedeutend kleinerer Oberfläche vertauscht. Man sieht, wie schön die Reihe von der Kugel fortgesetzt wird.

8. Uebersicht.

Verschiedenheit des Stoffes, der Form und der Grösse in einer Reihe.

Zeit.	Ausschlagswinkel.	Quantum.	Mittl. Quantitäten.	Abs. Verl. pr. 1'.	Rel. Verl.
		1) Eisenparallelepipedum.			
$10^h 27'$	$72\frac{1}{2}$	1511			
			1424	34,8	2,44
32'	69	1337			
			1242,7	37,5	3,02
37'	$64\frac{1}{2}$	1149,5			
			1067,7	32,9	3,08
42'	60	945			
			914,5	28,2	3,08
47'	$55\frac{1}{4}$	844			
			770,5	29,4	3,82.
52'	$49\frac{1}{2}$	697			
		2) Kleine Messingkugel.			
54'	54	810			
			762,5	23,7	3,11
58'	$50\frac{1}{4}$	715			
			651,5	25,4	3,90
$11^h 3'$	$44\frac{3}{4}$	588			
			533	22	4,13
8'	39	478			
			431	18,8	4,36
13'	$33\frac{1}{2}$	384			
			346,7	15,3	4,41
18'	$28\frac{1}{2}$	308,5			
			271,2	14,9	5,49.
23'	23	234			

§. 15. 9. Satz.

Durch herbeigeführten Luftwechsel nimmt der Elektricitätsverlust nicht merklich zu oder ab.

Zur Ermittelung dieses Satzes wurde die Sammelkugel für atmosphärische Elektricität benutzt. Sie wurde mit einem beliebigen Quantum geladen und dann abwechselnd entweder während der ganzen Verlustperiode ruhig hingestellt, oder beständig im Zimmer umhergetragen. Die Resultate zweier Versuchsreihen waren folgende.

9. Uebersicht.

1. Reihe.

Zeit.	Ausschlagswinkel.		Relat. Verl. pr. 1′ in %.
$12^h54'$	$79\frac{1}{6}$		
		nicht getragen:	1,54
$1^h20'$	$70\frac{1}{6}$		
		getragen:	1,27
$1^h30'$	$66\frac{1}{2}$		
		nicht getragen:	1,82
$1^h40'$	$61\frac{1}{4}$		
		getragen:	1,70
$1^h50'$	$56\frac{1}{10}$		
		nicht getragen:	1,97.
2^h	$50\frac{1}{4}$		

Dieses unerwartete Resultat veranlasste zu einer 2. Versuchsreihe, welche gleich nachher vorgenommen wurde.

2. Reihe.

Zeit.	Ausschlagswinkel.		Relat. Verl. pr. 1′ in %.
$2^h13'$	$77\frac{1}{2}$		
		nicht getragen:	1,73
$24'$	$73\frac{1}{4}$		
		getragen:	2,33
$35'$	$66\frac{3}{4}$		
		nicht getragen:	2,06
$45'$	$60\frac{4}{5}$		
		getragen:	2,62
$55'$	$52\frac{7}{8}$		
		nicht getragen:	2,04.
$3^h\ 5'$	$46\frac{3}{4}$		

Man sieht, dass in der 1. Reihe die Perioden die grössern Werthe geben, in denen die Kugel an demselben Orte blieb, in der 2. dagegen diejenigen, in denen sie beständig ihren Ort wechselte, dass aber die Verschiedenheiten nur unbedeutend sind.

Es versteht sich, dass es nicht gleichgiltig ist, wohin man die Kugel während des Herumtragens bringt. Bei der 1. Versuchsreihe blieb sie auf demselben Zimmer, welches ungeheizt und ganz geschlossen war; bei der 2. wurde die Thür eines Nebenzimmers geöffnet, wo die Thür nach dem Corridor auch offen war. Dieser letztern Thür gerade gegenüber war die Küchenthür, welche ebenfalls offen stand. Daraus ist ersichtlich, dass die feuchtere Küchenluft in das zweite Zimmer dringen musste. Nun wurde die Kugel auf beiden Zimmern auf und ab getragen, und zwar absichtlich auf dem zweiten bis an die der Küchenthür gegenüberliegende Thür, um sie auf jedem Gange in die etwas feuchtere Luft zu bringen. Der Erfolg war

vorauszusehen, dass jetzt der Verlust während des Herumtragens grösser sein werde.

Diesen Satz habe ich schon vor 11 Jahren in meinem Aufsatze über Luftelektricität mitgetheilt. Er steht im 89. Bde., S. 268 der Annalen von Poggendorff. Er ist aber wohl nicht beachtet worden, wie überhaupt die Verlustversuche nicht, welche dort mitgetheilt sind, weil sie unter dieser Ueberschrift nicht gesucht werden können.

§. 16. 10. Satz.
Isolatoren erleiden denselben Verlust, wie Leiter.

Dieser Satz ist ebenfalls schon von Coulomb nachgewiesen und kann nur mit der Drehwage ermittelt werden.

§. 17. 11. Satz.
Die beiden Elektricitäten erleiden unter denselben Bedingungen gleiche Verluste.

Auch dieser Satz ist bereits von Coulomb aufgestellt und bewiesen worden.

§. 18. 12. Satz.
Der Luftverlust nimmt ab durch Tabaksrauch und wahrscheinlich auch noch durch andere, der Luft beigemengte Stoffe, welche in fein vertheiltem Zustande in der Luft schwimmen.

Dieser Satz wurde gefunden, indem bei den Verlustversuchen im Laboratorium geraucht wurde. Der Raum war ein kleines Zimmer, und so musste die Wirkung um so stärker hervortreten. Es sollte die Isolirungsfähigkeit des Colophoniums untersucht werden. Die Verluste der Kugel, welche an einem Colophoniumstengelchen hing, waren in den einzelnen Perioden, deren Minutenzahl hinter den relativen Verlusten eingeklammert steht, folgende: 0,94 (10), 1,42 (15), 2,14 (10), 2,52 (13), 3,07 (10), 1,39 (11), 0,05 (11), 0,05 (11), 0,05 (10), 0,05 (10).

Vor der Abnahme der Verluste war eine Cigarre angesteckt worden, deren Rauch in dem engen Raum bald eine bedeutende Dichtigkeit erreichte. Der geringe Verlust von 0,05 während der letzten 42″ kann kein gewöhnlicher Luftverlust, er muss ein durch den Tabaksrauch auf ganz ungewöhnliche Weise erniedrigter Luftverlust sein. Seit der Zeit ist der Tabaksrauch vielfach verwendet worden, und immer mit Erfolg, um den Gesammtverlust in einen Luftverlust zu verwandeln. Ist aber kein Stützenverlust vorhanden, so nimmt durch diese Einwirkung der Luftverlust immer ab, wenn auch nicht so auffallend, wie es in den obigen Zahlen ausgesprochen ist. In einem zweiten Falle sollte Schwefel auf seine Isolirungsfähigkeit untersucht werden. Es wurden 2 Cigarren während der Dauer von mehr als 4 Stunden in einem grössern Zimmer geraucht. Die Verlustprocente

waren mit Einklammerung der Minutenzahlen folgende, nach der Riess-schen Formel berechnet, weil die Perioden grösser genommen werden mussten: 1,12 (70), 0,985 (69), 0,861 (40), 0,675 (48). Hier sieht man den gewöhnlichen Luftverlust während der Dauer von 3 Stunden 47 Minuten fortwährend sinken, welches nur eine Wirkung des verbreiteten Rauches sein kann, da das Zimmer ungeheizt und verschlossen war. Es ist nicht wahrscheinlich, dass der Tabaksrauch der einzige Stoff ist, welcher in dieser Weise wirksam sich zeigt.

Diese Thatsachen sprechen es deutlich aus, dass durch den Tabaksrauch die in der Luft vorhandenen Wassermolecüle zum Theil verhindert werden, zu dem elektrisirten Körper zu gelangen. Da liegt denn auch die Vorstellung wieder nahe, dass sie sich an die Rauchmolecüle hängen. Wie sie zu diesen gelangen, werden wir im 3. Abschnitte dieser Abhandlung sehen.

C. Theorie des Elektricitätsverlustes.

§. 19.
Allgemeines.

Die vorstehenden Gesetze über den Luftverlust müssen sich ableiten lassen aus einer Theorie der Gase. Die mechanische Wärmetheorie ist genöthigt gewesen, die alte Gastheorie zu verlassen, um den Erscheinungen der Wärme gerecht zu werden. Man hat lange gezögert, eine neue Theorie des Gaszustandes auszusprechen. Zuerst hat es in Deutschland Krönig gethan im 99. Bde. der Ann. von Pogg. S. 315 in seinem Aufsatze: „Grundzüge einer Theorie der Gase". Im folgenden Bande derselben Zeitschrift, S. 353 ff., lieferte Clausius einen Aufsatz unter der Ueberschrift: „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen". Clausius stimmt im Ganzen den Ansichten Krönig's bei, specialisirt sie nur und modificirt sie in einzelnen Punkten*). Aus dieser neuen Theorie lassen sich die bekannten Gasgesetze ungezwungen ableiten, und wenn sie auch, ohne ihr Gebiet zu verlassen, noch nicht alle Erscheinungen der Gase erklären kann, so giebt sie doch auf die meisten Fragen eine weit befriedigendere Antwort, als die bisherige.

§. 20.
Vergleichung der beiden Gastheorien.

Beide Theorien setzen den Molecularzustand der Materie voraus, die zweite mit vollkommener Elasticität der Molecüle. Nach der alten Theorie befinden sich die Molecüle, wenn keine bemerkbare Bewegung in der Mass-vorhanden ist, in Ruhe; nach der neuen sind die Molecüle, auch wenn durchaus Nichts von innerer Bewegung wahrnehmbar ist, in steter gerade

*) Schon früher hatten Gassendi, Prevost, Le Sage, Bernouilli, Jouel und Andere ähnliche Ansichten ausgesprochen.

liniger Bewegung, stossen dabei gegen einander oder gegen andere Körper und ändern dadurch häufig ihre Bahnen. Nach der alten Theorie stossen die Molecüle einander ab; nach der neuen ist der Einfluss ihrer Molecularkräfte verschwindend klein gegen die Kraft, mit welcher sie in ihren geradlinigen Bahnen fortgehen. Nach der alten Theorie sind die Molecüle mit einer Wärme-Atmosphäre umgeben, welche als Grund ihrer Abstossungskraft angesehen wird. Nach der neuen Theorie ist die Wärme die in Thätigkeit, in Bewegung gesetzte Masse der Molecüle, also ein Bewegungszustand, wie das Licht der Vibrationszustand des Aethers. Nach jener Theorie wird also die Wärme noch als Stoff, als Raum erfüllendes Wesen; nach dieser als lebendige Kraft, als das angesehen, was sie nach allen neuern Untersuchungen sein muss. Die neue Gastheorie fusst also auf das neue, höchst wichtige, zuerst 1842 von Mayer in Heilbronn ausgesprochene, später namentlich von Helmholtz, Joule, W. Thomson, Boscha, Clausius und Andern weiter geförderte Naturgesetz von der Erhaltung der Kraft, oder, wie es Helmholtz nennt, der Wechselwirkung der Naturkräfte. Wenden wir nun beide Theorien auf unsern Gegenstand an, so wird sich zeigen, dass auch hier die neue Gastheorie weit mehr leistet, als die alte.

§. 21.
Theorie des 7. Gesetzes nach der alten Gastheorie.

Aus den unter B. mitgetheilten Thatsachen folgt, dass das, was wir „Luftverlust" genannt haben, eigentlich „Dampfverlust" heissen müsste, weil die in der Atmosphäre vorhandenen Wasserdämpfe vorzugsweise, wenn nicht allein es sind, welche diesen Verlust herbeiführen. Warum die Luft, d. h. die andern in der Luft enthaltenen Gase, besonders Sauerstoff und Stickstoff, nicht Theil nehmen an der Bewirkung des Luftverlustes, dafür lassen sich auch aus der alten Gastheorie verschiedene Gründe angeben. Denn erstens sind diese Gase Nichtleiter der Elektricität, auf der Oberfläche ihrer Molecüle kann also auch keine Bewegung beider Elektricitäten stattfinden, wenn sie dem Einflusse eines elektrisirten Körpers ausgesetzt werden. Wir müssen uns den Vorgang beim Luftverlust, wenn wir die alte Gastheorie zu Grunde legen, doch jedenfalls so denken, dass die Molecüle aus einem leitenden Stoffe in der Richtung der Normalen auf der Oberfläche des elektrisirten Körpers, welche durch den Mittelpunkt des Molecüls geht, an den entgegengesetzten Seiten entgegengesetzt elektrisch werden, und zwar an der dem elektrisirten Körper zugewandten Seite entgegengesetzt mit diesem. Daraus wird eine Anziehung der Molecüle herbeigeführt, welche bei der Berührung oder der grösstmöglichen Annäherung sich alsbald in eine Abstossung verwandelt. Die Ursache der Annäherung fehlt aber, wenn auf den Molecülen keine Vertheilung stattgefunden hat, und diese Vertheilung ist unmöglich, wenn die Molecüle aus einem möglichst isolirenden Stoffe bestehen. Solche Stoffe sind aber nach den bisherigen

Erfahrungen die genannten Gase. Dies wäre also nach der alten Gastheorie der Grund, dass der Luftverlust proportional ist der Menge der in der Luft vorhandenen Wasserdampfmolecüle. Es liesse sich indess auch noch ein anderer denken.

Bekanntlich hängt an der Oberfläche aller Körper, welche nicht aus ganz frischen Bruchflächen besteht, welche einige Zeit der Einwirkung der Atmosphäre ausgesetzt gewesen ist, eine Luftschicht mit starker Adhäsion, so dass meist eine bedeutende Erhitzung erforderlich ist, sie zu entfernen (siehe Degen's Untersuchungen darüber in Pogg. Ann. Bd. 38, S. 449 ff.). Denkt man sich nun, dass diese Adhäsion bei den Wassermolecülen durch die elektrische Abstossung, welche auf die Vertheilung folgt, leicht überwunden werden könne, bei den andern Gasen aber nicht, weil die Vertheilung fehlt, so hat man denselben Erfolg.

Man sieht, dass für dieses Gesetz des Elektricitätsverlustes die alte Theorie zur Erklärung genügend ist; nicht so für andere.

§. 22.
Conflict des 1. und 2. Gesetzes mit der alten Gastheorie.

Wenn es auch nur die Wassermolecüle sind, welche den Luftverlust bewirken, so verhalten sich doch die Kräfte, mit welchen sie abgestossen werden, jedenfalls nach der Elektricitätslehre, wie die Quadrate der Dichtigkeiten oder Quantitäten des elektrisirten Körpers, wenn man eine Vertheilung vorhergehen lässt; also müssten auch die Geschwindigkeiten diesen Quadraten proportional sein, folglich auch die Mengen Elektricität, welche entführt werden. Das widerspricht aber der Erfahrung, welche sagt, dass diese Mengen den Dichtigkeiten selbst proportional sind. Aus diesem Erfahrungssatze aber folgt, dass die Geschwindigkeiten constant sein müssen. Also kann der Vorgang nicht gedacht werden, wie oben angegeben wurde.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass die Wasserdampfmolecüle ihre Bewegung von der Elektricität erhalten, so muss die Bewegung mit der bewegenden Kraft, der Dichtigkeit der Elektricität, abnehmen, welches also ebenfalls der Erfahrung widerspricht, oder vielmehr dem Satze, welcher mit Nothwendigkeit aus der Erfahrung folgt. Die Thatsachen sprechen es aus, dass der Theil der Bewegung der Wassermolecüle, welcher von der Elektricität herrührt, eine verschwindende Grösse ist gegen den andern Theil, welchen diese Molecüle aus einer andern Quelle beziehen, und diese ist die Wärme.

Es ist nicht ohne Interesse, zu sehen, wie sich einige Verfasser physikalischer Lehrbücher bei dieser Schwierigkeit der bisherigen Lehre vom Elektricitätsverluste verhalten. J. Müller in den frühern Auflagen seines Buches und mit ihm Andere, z. B. Spiller, verschweigen den von Coulomb gefundenen Satz, welches man noch könnte hingehen lassen. Aber sie stellen für ihn eine Unwahrheit hin, indem sie behaupten, dass der Luft-

verlust sich wie die Quadrate der Dichtigkeiten verhalte, weil er sich so verhalten müsse. In der letzten Auflage hat Müller sich zu Coulomb bekannt.

Auf dem Gebiete der Naturforschung gelten verbürgte Thatsachen mehr, als Theorien, und es ist erfreulich, dass Müller sich zu diesem Grundsatze bekannt hat.

§. 23.
Conflict des 9. Gesetzes mit der alten Gastheorie.

Auch giebt diese Vorstellungsweise durchaus keinen Aufschluss über das Factum, dass durch das Umhertragen der elektrisirten Kugel ihr Luftverlust nicht vergrössert wird; es spricht sogar entschieden gegen sie. Nach der alten Gastheorie muss man sich jedenfalls vorstellen, dass die einmal abgestossenen Molecüle in der Nähe bleiben, an andere einen Theil ihrer Elektricität abgeben, dass dadurch bald ein neuer Vertheilungszustand auf ihnen hervortrete und sie dann wieder aufs Neue angezogen werden können. Die Zahl der angezogenen und wieder abgestossenen Molecüle müsste immer kleiner werden, und ebenso die Menge Elektricität, welche sie nach jeder neuen Anziehung wegführen. Die Luftschicht um den elektrisirten Körper müsste endlich mit Elektricität gesättigt werden und aller Verlust aufhören. Das ist aber durchaus nicht der Fall; es ist von einer Elektrisirung der umgebenden Luftschicht Nichts zu merken. Dieses Factum kann die alte Gastheorie nicht erklären; wir müssen uns also zur neuen wenden, um zu sehen, ob sie uns Aufschluss darüber giebt.

§. 24.
Erklärung der Erscheinungen nach der neuen Gastheorie.

Gesetzt nun, die Molecüle der einen elektrisirten Körper umgebenden Luft stossen auf ihrem Wege gegen denselben, sowohl die der permanenten Gase, als auch die des Wasserdampfs, so werden erstere höchstens elektrisch an dem Punkte, mit welchem sie anstossen; letztere aber, weil sie Leiter sind, werden auf ihrer ganzen Oberfläche sich laden. Also auch ohne vorhergegangene Elektrisirung durch Influenz anzunehmen, müssen es vorzugsweise die Dampfmolecüle sein, welche die Elektricität fortführen. Auch sieht man, dass nach dieser Vorstellung die Grösse des Verlustes sich richtet nach der Menge der Dampfmolecüle, der Dunstmenge; denn die Zahl der Dampfmolecüle, welche in der Zeiteinheit an den elektrisirten Körper stossen, muss proportional sein der Zahl der Molecüle, die sich in dem Raume befinden, welcher den elektrisirten Körper umschliesst, und da diese mit constanter Geschwindigkeit sich bewegen, so muss der Verlust der Dichtigkeit proportional sein. Ferner ist nach dieser Theorie die Wahrscheinlichkeit sehr gross, dass ein mit der Elektricität des dem Verluste ausgesetzten Körpers geladenes Molecül nie zu demselben zurückkehren

wird, und sollte es auch zurückkommen, so hat es sicher an dieser oder jener Wand vorher seine Elektricität abgegeben, es ist also dann wie ein neues zu betrachten in Bezug auf den Verlust. Und so erklärt diese Theorie denn auch ganz ungezwungen das Factum, dass das Umhertragen der geladenen Kugel den Verlust nicht vergrössert.

Den Satz von der Einwirkung des Tabakdampfes auf den blossen Luftverlust erklärt die neue Gastheorie besser als die alte. Wollte man nach der alten Theorie annehmen, dass die Rauchtheilchen, nachdem sie sich mit Wassermolecülen beschwert haben, zu wenig beweglich seien, um zum elektrisirten Körper gelangen zu können, so wäre dies eine sehr unwahrscheinliche Hypothese, da die Molecüle des Wassers gegen die Rauchpartikelchen sehr klein sind. Kann dieses aber nicht angenommen werden, so müssen die Rauchtheile, als Leiter, den Verlust vergrössern, und die Thatsachen sprechen das Gegentheil aus.

Ganz ungezwungen erklärt die neue Theorie diesen Satz. Auf ihren Bahnen stossen die Wassermolecüle zum Theil an die Rauchtheile, bleiben daran hängen und damit hört ihre Bewegung auf, sie können nicht mehr zum elektrisirten Körper gelangen. Die Zahl Wassermolecüle, welche im Stande sind, dem elektrisirten Körper Elektricität zu entführen, nimmt also immer mehr ab.

Da auch der beste Isolator unter den festen Körpern, Schellack, kein absoluter Isolator ist, und da die Gasmolecüle sehr klein sind, so begreift man, dass sie sich beim Anstossen an einen geladenen Isolator ebenso gut auf ihrer ganzen Oberfläche laden werden, wie beim Anstoss an einen geladenen Leiter.

> Die Erscheinungen des Elektricitätsverlustes sind also eine bedeutende Stütze für die neue Gastheorie und diese wiederum lässt uns die Ursachen des Elektricitätsverlustes erkennen.

§. 25.

Zur Theorie des Stützenverlustes.

Die Theorie des Stützenverlustes ist im Grundgedanken schon oben bei Besprechung seiner Gesetzmässigkeit angedeutet worden. Die Erscheinungen desselben sind sehr complicirt, wie dies nur zum kleinen Theil die mitgetheilten Thatsachen andeuten. Ihn zu entfernen und dadurch Aufschluss über sein Wesen zu erhalten, wurden bis jetzt mit Erfolg angewendet: Abwischen des Isolators, trockne Luft, Tabaksrauch, schweflige Säure und Wasserdampf. So seltsam der letztere auch hier auftritt, so ist das Factum doch gewiss. Stets wurde der Stützenverlust geringer, wenn während desselben Wasser am Sieden war im Zimmer; einmal sogar verlor er sich durch diese Operation ganz und ging in gewöhnlichen Luftverlust über. Obgleich grosse Sorgfalt und viel Zeit auf sein Studium bereits verwendet

wurde, kann die Untersuchung doch noch lange nicht als geschlossen betrachtet werden. So viel scheint sicher zu sein, dass er eine zweifache Ursache haben kann: die Ablagerung von Molecülen eines Leiters auf der Oberfläche des Isolators und die chemische Veränderung dieser Oberfläche. Die erste Ursache ist die häufigere. Die letztere ist offenbar beim Schellack eingetreten, wenn er durch Umschmelzen seiner Oberfläche oder durch Abwaschen mit Alkohol besser isolirend wird. Schweflige Säure wirkt am kräftigsten zu seiner Vernichtung bei Lack.

Dass der absolute vollständige Stützenverlust geraume Zeit hindurch mit Abnahme der Dichtigkeit noch wächst, deutet darauf hin, dass er den Widerstand noch durch ein anderes Mittel beseitigt, als durch den Druck. Wie dieses Mittel zu denken ist, darüber können die Ansichten noch verschieden sein; die meiste Wahrscheinlichkeit wird wohl die Vorstellung für sich haben, dass der Strom sich verbreitert. Dafür sprechen auch Thatsachen. Wenn die Sammelkugel für atmosphärische Elektricität im Regen gewesen ist, so dass Tröpfchen gefallen sind auf den Schellackring, welcher den Ständer derselben einige Zoll vom untern Ende isolirt, und dann die Kugel zu Verlustversuchen verwendet wird, so giebt sie anfangs mehr oder weniger geraume Zeit den gewöhnlichen Luftverlust, bis endlich der Stützenverlust hervortritt und als relativer Verlust immer grösser wird. Offenbar treibt also Elektricität die Tropfen auseinander, indem sich ihre Molecüle abstossen. Es ist deshalb zu vermuthen, dass bei jedem Stützenverlust etwas Aehnliches stattfinde, dass die Gruppen von Wassermolecülen, welche mit Elektricität geladen werden, sich ausbreiten und dadurch dem Strome ein weiteres Bett verschaffen.

§. 26.

Beseitigung eines Einwurfes.

Es sei mir noch gestattet, einem schwachen Einwande zu begegnen, den man etwa gegen die obige Theorie des Luftverlustes erheben könnte. Wollte man nämlich behaupten, ich lehne die Möglichkeit der Elektrisirung der Atome des Sauerstoffes und Stickstoffes ab, da doch die jetzige Ozontheorie und die Theorie der Elektrolyse diese Elektrisirung fast ausser Zweifel stelle, so würde man mir Unrecht thun. Meine Theorie schliesst sich, wie man eingestehen muss, an die sicher ermittelten Thatsachen an, und da die neue Gastheorie von mehreren Seiten her Vieles für sich hat, da sie namentlich eine präcise Ableitung der bekannten Gasgesetze gestattet, so stand schon von vorneherein zu erwarten, dass sie die Räthsel lösen würde, welche die alte Theorie ungelöst lassen muss. Es wird ja auch von mir nur behauptet, dass Sauerstoff und Stickstoff sich gegen Reibungselektricität gerade so verhalten, wie alle andern Isolatoren. Eine Elektrisirung dieser Stoffe auf anderm Wege wird von mir nicht bestritten. Was meiner Behauptung von der Isolirungsfähigkeit des Sauerstoffs und Stickstoffs noch

zur besondern Stütze gereicht, ist der Satz, dass auch in der Atmosphäre nur die Wassermolecüle die Träger der atmosphärischen Elektricität sind.

Wir haben erst schwache Anfänge in dem Versuche gemacht, die Wärme als Bewegungszustand aufzufassen. Die Elektricitätslehre, welche der Wärmelehre in der Ferne nachhinkt, ist so weit noch nicht einmal. Wenn die Reihe auch an sie kommt, so wird gewiss der Genius nicht fehlen, welcher uns demonstrirt, in welcher Weise die Bewegungen vor sich gehen können oder gar müssen, aus denen sich nicht nur die Verschiedenheit von Wärme und Elektricität ergiebt, sondern auch das verschiedene Verhalten der Stoffe gegen Reibungselektricität und den elektrischen Strom. Einstweilen wollen wir fortfahren, mit Gewissenhaftigkeit und Eifer die Thatsachen zu studiren und uns den Zusammenhang zu deuten, so gut wir können.

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Ueber ein angeblich neues Criterium für die Convergenz unendlicher Reihen.

Im 52. Bde. der Sitzungsberichte der Wiener Akademie (Sitzung vom 9. November 1865) stellt Herr J. Popper ein Kennzeichen für die Convergenz unendlicher Reihen auf, welches neu und so allgemein sein soll, „dass es die Regeln von Gauss, Cauchy, Raabe, Bertrand etc. als specielle Fälle in sich begreift". Leider sind beide Behauptungen nicht richtig, wie aus dem Folgenden erhellen wird.

Der Verfasser beweist anfangs, dass die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

divergirt, wenn der Quotient

$$\frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}$$

bei unendlich wachsenden n eine endliche Grösse bleibt; daraus schliesst der Verfasser, dass die Reihe (welche natürlich als eine fallende vorausgesetzt wird) convergiren müsse, sobald jener Quotient die Null zur Grenze hat. — Dieser Schluss ist nicht concludent, und schon dadurch wird die Sache unsicher. Erinnert man sich aber des bekannten Satzes von Cauchy (*Cours d'Analyse*, pag. 48), dass

$$Lim \{f(n+1) - f(n)\} = Lim \frac{f(n)}{n},$$

und wendet man denselben auf den Fall $f(n) = \frac{1}{u_n}$ an, so kann man die Popper'sche Bedingung

$$Lim \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = Lim \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}} = 0$$

in die folgende einfachere verwandeln

$$Lim \frac{1}{\frac{1}{n u_n}} = Lim (n u_n) = 0,$$

und dies ist dieselbe Convergenzbedingung, welche Olivier im 2. Bande von Crelle's Journal (S. 31) durch ein Raisonnement zu beweisen versuchte, dessen Mangelhaftigkeit schon von Abel (ebendaselbst Bd. 3, S. 79) gezeigt wurde.

Um das Letztere auch *a posteriori* an einem Beispiele nachzuweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = s_n$$

und betrachten die Reihe

$$\frac{1}{1\,s_1} + \frac{1}{2\,s_2} + \frac{1}{3\,s_3} + \ldots$$

Hier ist nach dem Popper'schen Criterium

$$Lim \frac{1}{\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}} = Lim \frac{1}{(n+1)\,s_{n+1} - n\,s_n}$$

$$= Lim \frac{1}{(n+1)\left(s_n + \dfrac{1}{n+1}\right) - n\,s_n} = Lim \frac{1}{s_n + 1} = 0.$$

und nach der einfacheren Olivier'schen Regel

$$Lim\,(n\,u_n) = Lim \frac{1}{s_n} = 0;$$

die Reihe müsste demgemäss convergiren, während sie in Wirklichkeit divergirt.

Der Fehler in Herrn Popper's Schlussweise lässt sich hiernach mit wenig Worten aufdecken. Wenn die Beziehung

$$Lim \frac{u_n\,u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = Lim\,(n\,u_n) = a > 0$$

stattfindet, so muss für hinreichend grosse n das Product $n\,u_n$ mehr betragen als eine beliebig zwischen 0 und a eingeschaltete Zahl b, mithin ist dann $u_n > \frac{b}{n}$, und die Reihe $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ divergirt dann etwas stärker als die Reihe $\frac{b}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{b}{n+2} +$ etc. Ist aber $a = 0$, so kann eine derartige Interpolation von b nicht stattfinden, und es lässt sich nur sagen, dass die Summe der Reihe $u_n + u_{n+1} +$ etc. weniger beträgt als

$$\frac{\alpha_0}{n} + \frac{\alpha_1}{n+1} + \frac{\alpha_2}{n+1} + \ldots,$$

worin α_0, α_1, α_2 etc. gewisse unendlich abnehmende, sonst aber nicht näher bekannte Zahlen bedeuten. Daraus lässt sich aber kein Schluss ziehen hinsichtlich der Convergenz oder Divergenz der ursprünglichen Reihe.

Schlömilch.

XXIV. Ueber tetraedral-symmetrische Flächen.

Im Hefte vom 8. Januar 1866 der *Comptes rendus* der Pariser Akademie (Bd. LXII, p. 78) hat Herr de la Gournerie in seiner Abhandlung „*sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*" einige Eigenschaften derjenigen Curven angegeben, deren Gleichung in trilinearen Coordinaten unter die Form:

$$A\alpha^m + B\beta^m + C\gamma^m = 0$$

fällt, wenn α, β, γ die Coordinaten eines Punktes, A, B, C Constanten und der Exponent m eine beliebige rationale Zahl bedeuten und nennt dann solche Curven triangular-symmetrische Curven (*Courbes triangulairs symétriques*). Die a. a. O. gegebenen Eigenschaften dieser Curven lassen sich mit Leichtigkeit auf diejenige Classe von Flächen übertragen, deren Gleichung in tetraedrischen Coordinaten die Form hat:

$$1)\qquad A\alpha^m + B\beta^m + C\gamma^m + D\delta^m = 0,$$

in welcher α, β, γ, δ die Coordinaten, A, B, C, D Constanten und der Exponent m eine beliebige rationale Zahl bedeuten. Solche Flächen heissen dann tetraedral-symmetrische Flächen. Es möge nun die folgende Eigenschaft dieser Flächen hier Raum finden. Es sind:

$$2)\qquad \alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0,\quad \delta = 0$$

die Gleichungen der vier Tetraoderflächen; die Gleichungen solcher sechs Ebenen, welche durch die Kanten des Tetraeders gehen und sich in einem und demselben willkürlichen Punkte schneiden, sind dann die folgenden:

$$3)\qquad \begin{array}{lll} \varkappa\alpha - \lambda\beta = 0, & \lambda\beta - \mu\gamma = 0, & \mu\gamma - \nu\delta = 0, \\ \varkappa\alpha - \mu\gamma = 0, & \lambda\beta - \nu\delta = 0, & \\ \varkappa\alpha - \nu\delta = 0, & & \end{array}$$

wenn $\varkappa$, λ, μ, ν Constanten bedeuten, und die derjenigen Ebenen, welche ebenfalls durch die Kanten des Tetraeders gehen und mit den die innern Kantenwinkel halbirenden Ebenen nach entgegengesetzten Seiten hin dieselben Winkel bilden, wie die Ebenen 3), sind die folgenden:

$$4)\qquad \begin{array}{lll} \frac{\alpha}{\varkappa} - \frac{\lambda}{\beta} = 0, & \frac{\beta}{\lambda} - \frac{\gamma}{\mu} = 0, & \frac{\gamma}{\mu} - \frac{\delta}{\nu} = 0, \\ \frac{\alpha}{\varkappa} - \frac{\gamma}{\mu} = 0, & \frac{\beta}{\lambda} - \frac{\nu}{\delta} = 0, & \\ \frac{\alpha}{\varkappa} - \frac{\delta}{\nu} = 0, & & \end{array}$$

aus welchen ersichtlich, dass sich auch diese in einem Punkte schneiden.

Nimmt man nun an, dass der erst gewählte Punkt auf der Fläche 1) sich bewege, so wird sich der Schnittpunkt der Ebenen 4) in einer Fläche bewegen, deren Gleichung man erhält, indem man zuerst aus den Gleichungen 1) und 3) die Grössen α, β, γ, δ eliminirt, was

$$\frac{A}{\varkappa} + \frac{B}{\lambda} + \frac{C}{\mu} + \frac{D}{\nu} = 0$$

giebt und dann aus dieser und den Gleichungen 4) die Constanten $\varkappa$, λ, μ, ν, wodurch sich

$$\frac{A}{\alpha^m}+\frac{B}{\beta^m}+\frac{C}{\gamma^m}+\frac{D}{\delta^m}=0 \tag{5}$$

ergiebt. Man erhält hieraus folgenden bemerkenswerthen Satz:

„Bewegt sich ein Punkt, den man sich als Schnittpunkt der durch die sechs Kanten eines Tetraeders gehenden Ebenen denkt, auf der zu diesem Tetraeder gehörigen tetraedral-symmetrischen Fläche vom Exponenten m, so wird sich der gemeinsame Schnittpunkt derjenigen sechs Ebenen, die ebenfalls durch die sechs Kanten des Tetraeders gehen und in Bezug auf die die innern Kantenwinkel des Tetraeders halbirenden Ebenen zu den frühern symmetrisch liegen, auf einer demselben Tetraeder entsprechenden tetraedral-symmetrischen Fläche vom Exponenten $-m$ bewegen."

Es ergiebt sich nun hieraus, wenn der erste Punkt auf der Ebene

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D\delta=0 \tag{6}$$

sich bewegt, dass der zweite auf einer Fläche dritter Ordnung liegt, deren Gleichung

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}+\frac{D}{\delta}=0 \tag{7}$$

ist, es ist dies eine Fläche, die durch die sechs Kanten des Tetraeders hindurchgeht. Wenn insbesondere den Constanten noch die folgenden Werthe zukommen:

$$A=\begin{vmatrix} a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \\ a_4 b_4 c_4 \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} a_3 b_3 c_3 \\ a_4 b_4 c_4 \\ a_1 b_1 c_1 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} a_4 b_4 c_4 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix},\ D=-\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix},$$

indem man nämlich hat:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1x+b_1y+c_1z-p_1 \\ \beta &= a_2x+b_2y+c_2z-p_2 \\ \gamma &= a_3x+b_3y+c_3z-p_3, \\ \delta &= a_4x+b_4y+c_4z-p_4 \end{aligned} \tag{8}$$

so gehört die Gleichung 6) der unendlich entfernten Ebene an, und es sind alle Ebenen, die einen und denselben Punkt der unendlich entfernten Ebene gemein haben, zu einer Geraden parallel, während die Gleichung 7) dann derjenigen Fläche dritter Ordnung angehört, für deren Punkte die Fusspunkte der von diesen auf die Tetraederflächen gefällten Perpendikel in einer Ebene liegen. Es ergiebt sich somit folgender Satz:

„Legt man durch die sechs Kanten eines Tetraeders Ebenen parallel zu einer beliebigen Geraden, und legt dann durch die Kanten des Tetraeders wieder Ebenen, die nach entgegengesetzten Seiten hin mit den die innern Kantenwinkel des Tetraeders halbirenden Ebenen dieselben Winkel bilden, als die erstgenannten, so schneiden sich die letzteren sechs Ebenen allemal in einem Punkte, der auf einer Fläche dritter Ordnung liegt."

Der eben gegebene Satz lässt sich auch noch direct ableiten. Es mögen nun die Gleichungen der Ebenen, die durch die Kanten des Tetraeders gehen sollen, die folgenden sein:

$$6)\qquad \begin{array}{lll} \alpha+\varkappa\beta=0, & \alpha+\lambda\gamma=0, & \alpha+\mu\delta=0, \\ \gamma+\nu\delta=0, & \beta+\varrho\delta=0, & \beta+\sigma\gamma=0, \end{array}$$

die Gleichungen der Ebenen, die ebenfalls durch die Kanten des Tetraeders gehen und in Bezug auf die die innern Kantenwinkel des Tetraeders halbirenden Ebenen zu den Ebenen 9) symmetrisch liegen, sind dann:

$$10)\qquad \begin{array}{lll} \varkappa\alpha+\beta=0, & \lambda\alpha+\gamma=0, & \mu\alpha+\delta=0, \\ \nu\gamma+\delta=0, & \varrho\beta+\delta=0, & \sigma\beta+\gamma=0. \end{array}$$

Die Constanten $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ, σ ergeben sich aus der Bedingung, dass die Ebenen 9) zu irgend einer Geraden, deren Gleichungen

$$11)\qquad \begin{array}{l} x=mz+m' \\ y=nz+n' \end{array}$$

sind, parallel laufen, man erhält

$$\varkappa=-\frac{a_1m+b_1n+c_1}{a_2m+b_2n+c_2},\quad \lambda=-\frac{a_1m+b_1n+c_1}{a_3m+b_3n+c_3},\quad \mu=-\frac{a_1m+b_1n+c_1}{a_4m+b_4n+c_4},$$

$$\nu=-\frac{a_3m+b_3n+c_3}{a_4m+b_4n+c_4},\quad \varrho=-\frac{a_2m+b_2n+c_2}{a_4m+b_4n+c_4},\quad \sigma=-\frac{a_2m+b_2n+c_2}{a_3m+b_3n+c_3},$$

setzt man dann die Werthe von $\varkappa$, λ etc. in die Gleichungen 10) ein, so gehen diese über in:

$$12)\qquad \begin{array}{l} (a_2\beta-a_1\alpha)m+(b_2\beta-b_1\alpha)n+c_2\beta-c_1\alpha=0 \\ (a_3\gamma-a_1\alpha)m+(b_3\gamma-b_1\alpha)n+c_3\gamma-c_1\alpha=0 \\ (a_4\delta-a_1\alpha)m+(b_4\delta-b_1\alpha)n+c_4\delta-c_1\alpha=0 \\ (a_4\delta-a_3\gamma)m+(b_4\delta-b_3\gamma)n+c_4\delta-c_3\gamma=0 \\ (a_4\delta-a_2\beta)m+(b_4\delta-b_2\beta)n+c_4\delta-c_2\beta=0 \\ (a_3\gamma-a_2\beta)m+(b_3\gamma-b_2\beta)n+c_3\gamma-c_2\beta=0 \end{array}$$

Die sechs Ebenen schneiden sich in einem und demselben Punkte, da aus den drei ersten der Gleichungen 12) sich die übrigen drei ableiten lassen. Eliminirt man ferner die Constanten m, n aus je drei solchen Gleichungen, von welchen keine die Folge der zwei übrigen ist, wie z. B. aus den ersten drei Gleichungen des Systems 12), so erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_2\beta-a_1\alpha & b_2\beta-b_1\alpha & c_2\beta-c_1\alpha \\ a_3\gamma-a_1\alpha & b_3\gamma-b_1\alpha & c_3\gamma-c_1\alpha \\ a_4\delta-a_1\alpha & b_4\delta-b_1\alpha & c_4\delta-c_1\alpha \end{vmatrix}=0.$$

Durch Umformung der links stehenden Determinante ergiebt sich nach und nach:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1\alpha-a_1\alpha & b_1\alpha-b_1\alpha & c_1\alpha-c_1\alpha \\ 1 & a_2\beta-a_1\alpha & b_2\beta-b_1\alpha & c_2\beta-c_1\alpha \\ 1 & a_3\gamma-a_1\alpha & b_3\gamma-b_1\alpha & c_3\gamma-c_1\alpha \\ 1 & a_4\delta-a_1\alpha & b_4\delta-b_1\alpha & c_4\delta-c_1\alpha \end{vmatrix}=0,$$

$$13)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1\alpha & b_1\alpha & c_1\alpha \\ 1 & a_2\beta & b_2\beta & c_2\beta \\ 1 & a_3\gamma & b_3\gamma & c_3\gamma \\ 1 & a_4\delta & b_4\delta & c_4\delta \end{vmatrix} = 0,$$

es ist dies nun genau die Gleichung der letzterwähnten Fläche dritter Ordnung und somit der vorhin angegebene Satz bewiesen.

Pesth, den 5. Mai 1866. Dr. E. v. HUNYADY.

XXV. Ueber ein Product zweier Determinanten.

Sind in den zwei Tetraedern $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ die orthogonalen Coordinaten der Tetraedereckpunkte a_i und α_i, respective x_i, y_i, z_i und ξ_i, η_i, ζ_i, D und Δ die Determinanten, von welchen die sechsfachen Volumina der beiden Tetraeder abhängen, t_i und τ_i die doppelten Flächeninhalte der den Punkten a_i und α_i gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders und $p_{i,k}$ das vom Punkte a_i des erstern Tetraeders auf die dem Punkte α_k gegenüberliegende Seitenfläche des letztern Tetraeders gefällte Perpendikel, sowie $\pi_{i,k}$ das vom Punkte α_i auf die dem Punkte a_k gegenüberliegende Seitenfläche des Tetraeders gefällte Perpendikel, so ist bekanntlich:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir ferner noch denjenigen Werth der Determinante D, den wir erhalten, wenn wir in derselben die i^{te} Zeile durch die k^{te} Zeile der Determinante Δ ersetzen, mit $D_{i,k}$, und dem ähnlich durch $\Delta_{i,k}$ diejenige Determinante, welche aus Δ entsteht, wenn wir in der letztern die i^{te} Zeile durch die k^{te} der Determinante D ersetzen, so ist zunächst leicht ersichtlich, dass

$$p_{i,k} = \frac{D_{i,k}}{t_i}, \text{ und } \pi_{i,k} = \frac{\Delta_{i,k}}{\tau_i}.$$

Setzen wir dann ferner in das Product der beiden Determinanten vierten Grades, deren eine die sechszehn möglichen $p_{i,k}$, die andere hingegen die sechszehn möglichen $\pi_{i,k}$ als Elemente enthält, die soeben gefundenen Werthe von $p_{i,k}$ und $\pi_{i,k}$, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t_1 t_2 t_3 t_4\, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{vmatrix},$$

führen wir nun die Multiplication an den beiden rechtsstehenden Determinanten aus, so erhalten wir ihr Product etwa in der Form:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix},$$

indem wir

$$D_{i1}\,\Delta_{1k} + D_{i2}\,\Delta_{2k} + D_{i3}\,\Delta_{3k} + D_{i4}\,\Delta_{4k} = c_{ik}$$

setzen. Nun ergiebt sich aber wegen der eigenthümlicheu Beschaffenheit der Determinanten $D_{i,k}$ und $\Delta_{i,k}$ aus einem bekannten Determinantensatze (Baltzer, Determ. 2. Aufl. S. 3,11), dass $c_{i,k}$ gleich $D\Delta$ oder 0 ist, je nachdem $i=k$ oder nicht, weshalb die obige Gleichung in die folgende übergeht:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix} = \frac{D^4\,\Delta^4}{t_1 t_2 t_3 t_4 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4}.$$

Pesth, den 5. Mai 1866. Dr. E. v. Hunyady.

XXVI. Ueber die Reibungsarbeit cylindrischer, conischer und kugelförmiger Tragzapfen. Von Dr. Eduard Zetzsche. (Hierzu Taf. III, Fig. 5.)

I. Bei jedem Zapfen ist die Summe der in die Richtung des Zapfendrucks Q fallenden Componenten $dN\sin\alpha$, welche sich aus dem auf das Reibungsflächenelement dF kommenden Normaldruck $dN=p\,dF$ ergeben, dem Zapfenduck Q selbst gleich, oder es ist bei dem Normaldruck p auf die Flächeneinheit in dF

1) $$Q=\int p\,dF\sin\alpha=\int p\,d\mathfrak{F},$$

wenn dF unter dem Winkel α gegen Q geneigt ist, also $d\mathfrak{F}=dF\sin\alpha$ die Projection von dF auf eine zum Zapfendruck normale Ebene bedeutet. Bei der Winkelgeschwindigkeit w und dem Reibungscoefficient φ ergeben sich ferner, wenn dF um ϱ von der Drehaxe des Zapfens absteht, für das Reibungsmoment M und die secundliche Reibungsarbeit des ganzen Zapfens die Gleichungen:

2) $$\begin{cases} M=\varphi\int p\,\varrho\,dF \\ L=\varphi w\int p\,\varrho\,dF=w\,M. \end{cases}$$

Vertheilt sich nun bei neuen Zapfen der Zapfendruck gleichmässig auf die zu ihm normale Projection $\mathfrak{F}$ der Reibungsfläche F, so findet sich aus 1) und aus $dQ:Q=d\mathfrak{F}:\mathfrak{F}$ sofort, dass der Flächendruck p überall gleich gross ist, also

3) $$p=\frac{Q}{\mathfrak{F}}=Constante.$$

Setzt man dagegen bei eingelaufenen Zapfen die Abnutzung a in Richtung des Zapfendrucks als überall gleich voraus, so erhält man, wenn die auf dF kommende normale Abnutzung $a \sin\alpha$ dem Normaldrucke dN und dem Wege oder der Geschwindigkeit von dF proportional ist,

$$4)\qquad \frac{p\varrho}{\sin\alpha} = \frac{n a}{w} = Constante.$$

Wenn endlich die Summe der aus den Normalpressungen dN der Reibungsflächenelemente dF sich ergebenden Componenten dK in Richtung der Zapfenaxe nicht $= 0$ ist, so strebt der Zapfen mit einer dieser Summe gleichen Kraft

$$5)\qquad K = \int dN \cos\beta$$

aus seinem Lager herauszugleiten; dabei ist β der Winkel zwischen der Zapfenaxe und dN, K aber wurde in Richtung der $+z$ genommen.

Vergl. Reye, im Civilingenieur 1860, S. 235 ff., und Grashof, in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1861, S. 200 ff.

II. Ein liegender oder Tragzapfen sei nun ein Umdrehungskörper, welcher durch eine volle Umdrehung der zwischen den Zapfenhalbmessern r_1 und r_0 liegenden Meridianfläche $J = \int_{z_0}^{z_1} \varrho\, dz$ erzeugt ist; dabei fällt die als Z-Axe gewählte Umdrehungsaxe mit der Zapfenaxe zusammen, während auf ihr die zum Zapfendruck Q parallele Y-Axe und auf der YZ-Ebene die X-Axe senkrecht stehen möge; die Gleichung der Meridiancurve sei: $f(z, \varrho) = 0$ und dabei bedeutet $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ den zur Abscisse z gehörigen Umdrehungshalbmesser. Der nach dem zu den Coordinaten x und y gehörigen (Parallelkreis-) Bogenelemente $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gezogene Halbmesser ϱ schliesse mit der Y-Axe (oder ds mit dx) den Winkel ϑ ein, so dass also $x = \varrho \sin\vartheta$ und $ds = \varrho\, d\vartheta = \frac{dx}{\cos\vartheta}$. Endlich sei das Bogenelement $d\sigma$ des Meridians unter dem Winkel δ gegen die positive Seite der Z-Axe oder gegen dz geneigt, also auch $dz = d\sigma \cos\delta$ und $d\varrho = d\sigma \sin\delta = dz \tan\delta$. Man erhält dann:

$$dF = d\sigma\, ds = \varrho\, d\vartheta\, d\sigma = \frac{dx\, dz}{\cos\vartheta \cos\delta},$$
$$d\mathfrak{F} = dF \sin\alpha = dx\, dz,$$
$$\sin\alpha = \cos\vartheta \cos\delta,$$
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \delta$$

und hieraus:

$$6)\qquad \begin{cases} Q = \int p\, dx\, dz = \int p\, d\mathfrak{F}, \\ L = \varphi w \int p\varrho\, dF = \varphi w \int\int p\varrho^2 d\vartheta\, d\sigma = \varphi w \int\int p\varrho \frac{dx}{\cos\vartheta} \frac{dz}{\cos\delta}, \\ K = \int p\, dF \sin\delta = \int\int p\varrho\, d\vartheta\, d\varrho. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber mit Rücksicht auf die in 3) und 4) enthaltenen Werthe von p weiter:

bei neuen Zapfen, d. h. für $p=\frac{Q}{\mathfrak{F}}$,

$$
7)\quad \begin{cases} Q_1 = p\iint dx\,dz = p\mathfrak{F}, \\ L_1 = \varphi w p\iiint \varrho^2 d\vartheta\, ds = \varphi w p\iint \varrho^2 d\vartheta \frac{dz}{\cos\delta}, \\ K_1 = p\iint \varrho\, d\vartheta\, d\varrho; \end{cases}
$$

und bei eingelaufenen Zapfen, d. h. für $\frac{p\varrho}{\sin\alpha}=\frac{p\varrho}{\cos\vartheta\cos\delta}=C$,

$$
8)\quad \begin{cases} Q_2 = C\int\frac{d\mathfrak{F}\sin\alpha}{\varrho} = C\iint\frac{dx\,dz}{\varrho}\cos\vartheta\cos\delta = C\iint \cos^2\vartheta\cos\delta\, d\vartheta\, dz, \\ L_2 = \varphi w C\mathfrak{F} = \varphi w C\int dF\sin\alpha = \varphi w C\iint \varrho\cos\vartheta\, d\vartheta\, dz, \\ K_2 = C\iint \sin\alpha\, d\vartheta\, d\varrho = C\iint \cos\vartheta\cos\delta\, d\vartheta\, d\varrho = C\iint \cos\vartheta\sin\delta\, d\vartheta\, dz. \end{cases}
$$

III. Diese Gleichungen 7) und 8) vereinfachen sich wesentlich, wenn die Integrationsgrenzen ϑ_0 und ϑ_1 nicht von z abhängig sind, wenn also der Zapfen auf seiner ganzen Länge um denselben Centriwinkel in das Lager eintaucht, und noch mehr, wenn zugleich überall $\vartheta_0 = -\vartheta_1$ ist. Dann wird nämlich:

$$
C = \frac{Q_2}{A\int\cos\delta\, dz},\ \text{wenn}\ A = \int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1}\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \vartheta_1 + \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta_1;
$$

$$
9)\quad \begin{cases} L_1 = 2\varphi w\vartheta_1\frac{Q}{\mathfrak{F}}\int_{z_0}^{z_1}\frac{\varrho^2 dz}{\cos\delta}\ \text{und}\ K_1 = 2\vartheta_1\frac{Q}{\mathfrak{F}}\int_{r_0}^{r_1}\varrho\, d\varrho = \vartheta_1\frac{Q}{\mathfrak{F}}(r_1^2 - r_0^2), \\ L_2 = \varphi w C\mathfrak{F} = 2\varphi w C\sin\vartheta_1\int_{z_0}^{z_1}\varrho\, dz = 2\varphi w CJ\sin\vartheta_1\ \text{und} \\ \qquad K_2 = 2C\sin\vartheta_1\int_{r_0}^{r_1}\cos\delta\, d\varrho. \end{cases}
$$

Es ist also auch stets

$$
10)\quad \mathfrak{F} = 2J\sin\vartheta_1 = 2\sin\vartheta_1\int_{z_0}^{z_1}\varrho\, dz.
$$

IV. Am leichtesten lässt sich die Bedingung $\vartheta_1 = -\vartheta_0 = Constante$ bei einem cylindrischen Tragzapfen von der Länge $z_1 - z_0 = l$ erfüllen; denn da hier $\varrho = R$ constant ist, so braucht man nur $x_1 = a$ oder $y_1 = b$ constant zu machen, also den Zapfen überall gleich tief in sein Lager eintauchen zu lassen, und findet dann, da $\delta = 0$ ist,

$$
C = \frac{Q}{Al},\quad J = Rl,\quad CJ = \frac{QR}{A},
$$

$$11)\quad \begin{cases} L_1 = 2\varphi w l R^2 \vartheta_1 \dfrac{Q}{\mathfrak{F}} = \dfrac{\varphi w R \vartheta_1 Q}{\sin\vartheta_1} \text{ und } K_1 = 0, \\ L_2 = \dfrac{2\varphi w R\, Q \sin\vartheta_1}{A} \qquad \text{ und } K_2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2\sin^2\vartheta_1}{\vartheta_1 A}.$$

V. Bei einem **conischen Tragzapfen** ist δ constant, $\varrho = z\tan\delta$, also die Länge $l_1 = (r_1 - r_0)\cot\delta$ und deshalb bei $\vartheta_1 = -\vartheta_0 = Const.$

$$C = \frac{Q}{A l_1 \cos\delta}, \quad J = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}\tan\delta = \frac{r_1 + r_0}{2} l_1, \quad \mathfrak{F} = (r_1 + r_0)\, l_1 \sin\vartheta_1,$$

$$12)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{2\tan^2\delta}{3\mathfrak{F}\cos\delta}\varphi w \vartheta_1 Q (z_1^3 - z_0^3) = \tfrac{2}{3}\varphi w \vartheta_1 Q \dfrac{r_1^3 - r_0^3}{(r_1^2 - r_0^2)\cos\delta \sin\vartheta_1} \text{ und} \\ \qquad\qquad K_1 = \dfrac{Q\vartheta_1 (r_1 - r_0)}{l_1 \sin\vartheta_1}, \\ L_2 = \dfrac{\sin\vartheta_1}{A\cos\delta}\varphi w Q (r_1 + r_0) \quad \text{ und } K_2 = \dfrac{2Q\sin\vartheta_1 (r_1 - r_0)}{A l_1}, \end{cases}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{3}{2}\,\frac{(r_1 + r_0)(r_1^2 - r_0^2)\sin^2\vartheta_1}{A\vartheta_1 (r_1^3 - r_0^3)} \text{ und } \frac{K_2}{K_1} = \frac{2\sin^2\vartheta_1}{\vartheta_1 A}.$$

Damit aber ϑ_1 constant werde, muss $\cos\vartheta_1 = \dfrac{y_1}{\varrho} = \dfrac{b}{z\tan\delta}$ und $\sin\vartheta_1 = \dfrac{x_1}{\varrho}$ $= \dfrac{a}{z\tan\delta}$ constant werden, also $b = \dfrac{b_1}{l_1} z$ und $a = \dfrac{a_1}{l_1} z$, d. h. die Linie, in der die Grenzkante des Lagers sich zu beiden Seiten auf dem Zapfen hinzieht, muss **eine nach der Spitze des Körpers laufende Gerade sein**, die von dem Punkte (a_1, b_1) des Grundflächenumfanges ausgeht.

VI. Ist endlich der **Tragzapfen kugelförmig**, so schliesst der nach $d\sigma$ gezogene Halbmesser R der einen grössten Kugelkreis bildenden Meridianfläche mit dem verticalen Halbmesser R dieses Kreises oder mit ϱ denselben Winkel δ ein, unter welchem $d\sigma$ gegen $+z$ geneigt ist. Daher ist, wenn der Kugelmittelpunkt als Coordinatenaufang gewählt wird, $d\sigma = -R\,\partial\delta$, folglich $z = -R\sin\delta$ und $\varrho = R\cos\delta$. Für $\vartheta_1 = -\vartheta_0 = Const.$ ergiebt sich demnach hier:

$$R\int_{z_0}^{z_1} \cos\delta\, dz = \int_{z_0}^{z_1} \varrho\, dz = J = \frac{1}{R}\int_{z_0}^{z_1} \frac{\varrho^2 dz}{\cos\delta}, \quad C = \frac{QR}{AJ} = \frac{2QR\sin\vartheta_1}{A\mathfrak{F}},$$

$$13)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{\varphi w \vartheta_1 R Q}{\sin\vartheta_1} \quad \text{ und } K_1 = \dfrac{Q}{\mathfrak{F}}\vartheta_1 (r_1^2 - r_0^2), \\ L_2 = \dfrac{2\varphi w Q R \sin\vartheta_1}{A} \text{ und } K_2 = \dfrac{Q}{AJ}(r_1^2 - r_0^2)\sin\vartheta_1 = \dfrac{Q}{AJ}(z_0^2 - z_1^2)\sin\vartheta_1, \end{cases}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2\sin^2\vartheta_1}{\vartheta_1 A} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Soll aber ϑ_1 constant sein, so muss wieder $\cos^2\vartheta_1 = \dfrac{y_1^2}{\varrho^2} = \dfrac{b^2}{R^2 - z^2} = \dfrac{b_1^2}{R^2}$ und

$\sin^2\vartheta_1 = \frac{x_1^2}{\varrho^2} = \frac{a^2}{R^2 - z^2} = \frac{a_1^2}{R^2}$ sein, wobei $a_1^2 + b_1^2 = R^2$; also ist dann $\frac{a^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$ und $\frac{b^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$, d. h. die Linie, in welcher sich das Lager zu beiden Seiten auf dem Zapfen abgrenzen muss, ist der Durchschnitt zweier elliptischer Cylinder und läuft stets durch die beiden Punkte, in welchen die Zapfenaxe die Kugelfläche schneidet, denn für $z = \pm R$ wird $a = 0 = b$.*) Die Grenzlagen dieser Schnittlinie findet man, wenn man einmal $a = 0 = a_1$, $b_1 = R$ und einmal $b = 0 = b_1$, $a_1 = R$ setzt; im erstern Falle ist der Schnitt der verticale, im andern der horizontale grösste Kreis der Kugel. Jeder Zweig des Durchschnitts liegt übrigens in einer durch die Z-Axe gehenden Ebene, und der Zapfen ruht mit einem Kugelzweieck im Lager.

VII. Ein Blick auf die in IV bis VI gewonnenen Formeln zeigt, dass für $\vartheta_1 = -\vartheta_0 = Const.$ bei kugelförmigen Tragzapfen ebensowohl wie bei cylindrischen die Reibungsarbeit von der Länge l des Zapfens nicht abhängig ist, ferner dass bei gleichen Cylinder- und Kugelhalbmessern R sogar die Reibungsleistung bei den kugelförmigen Zapfen genau dieselbe Grösse hat, wie bei den cylindrischen, weshalb auch bei beiden das Verhältniss $\frac{L_2}{L_1}$ denselben auch von l unabhänigen Werth annimmt. Es gelten demnach auch die beiden von Herrn Reye (Civilingenieur, 1860, S. 247) für den eine ganze Kugel bildenden (also nur ideellen) Zapfen und für $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ angegebenen Werthe von L_1 und L_2 und mithin auch das Verhältniss $\frac{L_2}{L_1}$ ganz allgemein für jede Kugelzone, deren Endflächen $r_0^2\pi$ und $r_1^2\pi$ auf der Zapfenaxe normal stehen.

Für das Verhältniss $\frac{K_2}{K_1}$ hat sich beim conischen und kugelförmigen Zapfen der nämliche Werth ergeben.

Soll der kugelförmige Zapfen kein Bestreben haben, aus dem Lager herauszugleiten, so braucht man nur $z_0 = -z_1$ zu machen, wie z. B. an Kurbelzapfen. Auch bei conischen Zapfen lässt sich dasselbe erreichen, wenn man nur dem Zapfen die Form eines Doppelkegels giebt und die beiden Endhalbmesser gleich gross nimmt. Ein solcher Zapfen wird auch, wenn ähnliche verschiebende Kräfte von aussen auf den Zapfen wirken, minder leicht, als ein cylindrischer, eine Verschiebung des Zapfens zulassen, also der Lagerung der Welle überhaupt mehr Sicherheit gewähren.

---

*) Umgekehrt schneiden sich die beiden elliptischen Cylinderflächen $\frac{x^2}{x_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} = 1$ und $\frac{y^2}{y_1^2} + \frac{z^2}{z_1^2} = 1$ in einer auf einer Kugelfläche vom Halbmesser z_1 liegenden krummen Linie, sobald $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ ist; denn es ist ja $x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z^2\left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{z_1^2}\right)$.

VIII. Bei gleicher Reibungsfläche stehen sich bezüglich der Reibungsleistung, also auch bezüglich der Abnutzung und Erwärmung, der kugelförmige und cylindrische Zapfen ganz gleich, sofern nur ϑ_1 und die Länge l bei beiden Zapfen gleich gross sind und die Kugel und der Cylinder denselben Halbmesser R haben. Herr Reye musste die cylindrischen Zapfen günstiger finden, da er deren Länge $l = \frac{4}{3} R$ nahm und deshalb für den Kugelzapfen, bei dem $l \leqq 2R$ ist, einen grösseren Halbmesser nehmen musste, um gleiche Reibungsflächen zu erhalten.

Wählt man ferner bei einem conischen Zapfen $r_1 + r_0 = 2R \cos\delta$, so wird bei gleicher Länge $l_1 = l$ seine Reibungsfläche der des kugelförmigen oder cylindrischen Zapfens gleich, und man erhält nach dem Einlaufen für ersteren dieselbe Reibungsleistung, wie bei letzterem; so lange die Zapfen dagegen noch neu sind, verhält sich die Reibungsleistung des letzteren zu der des ersteren $= \frac{3R^2 \cos^2\delta}{(2r_1 R \cos\delta + r_0^2)}$; für $r_0 = 0$ aber erhält man hieraus das Verhältniss $\frac{3}{4}$.

Setzt man dagegen allgemeiner, um wieder gleiche Reibungsflächen zu bekommen, $\frac{l_1}{l} = \frac{2R\cos\delta}{r_1 + r_0}$, so verhalten sich die Reibungsleistungen bei neuen Zapfen $= \frac{3R^2 l \cos^2\delta}{(2Rr_1 l \cos\delta + r_0^2 l_1)}$, bei eingelaufenen Zapfen $= \frac{l_1}{l}$. Bei $r_0 = 0$, $r_1 = R$ und $\delta = \frac{\pi}{3}$ ergiebt sich wieder $l_1 = l$ und deshalb die schon erwähnten Leistungswerthe.

XXVII. Physikalische Notizen.

1) Bei dem kleinen Apparat von Melde wird durch eine Stimmgabel ein Faden in Schwingungen versetzt und schwingt als ganzer, in zwei Hälften, drei Dritteln u. s. w., wenn man die Spannung des Fadens passend abändert. Diese Abänderung geschieht durch Drehen eines Stimmstockes, wie beim Stimmen der Saiten der Streichinstrumente; sie hat den Uebelstand, dass man probiren muss und kein bestimmtes Maass für die Spannung hat. Beides wird durch einen kleinen Zusatz zu dem Apparat vermieden und dazu noch der Vortheil erreicht, das Gesetz nachweisen zu können, dass die Schwingungszahl der Quadratwurzel der Spannung proportional ist. Ich lasse nämlich den Faden über eine Rolle gehen und bestimme für eine gegebene Länge desselben dasjenige Gewicht, durch welches der Faden so gespannt wird, dass er als ganzer schwingt. Stellt man sich nun eine Reihe von Gewichten her, das grösste gleich dem gefundenen, das folgende gleich dem vierten Theil desselben, dann eines gleich dem neunten Theil u. s. w.,

so erhält man durch Anhängen dieser Gewichte sogleich die verschiedenen Schwingungszustände. Die Erklärung ist einfach: die Schwingungszahl muss immer dieselbe sein, nämlich die der Stimmgabel; wird die Spannung im Verhältniss $(1 : n^2)$ vermindert, so würde sich die Schwingungszahl im Verhältniss $(1 : n)$ vermindern, wenn alles andere gleich bliebe; theilt sich aber der Faden in n Abtheilungen, so wird die Schwingungszahl wieder im gleichen Verhältniss vermehrt, bleibt also, wenn diese beiden Aenderungen eintreten, ungeändert.

2) Zur Erläuterung des Grundgesetzes der Wellenlehre, dass die Bewegung eines Molecüls in einer geradlinigen Molecülreihe mit gleichförmiger Geschwindigkeit längs der Reihe sich fortpflanzt, bedient man sich gewöhnlich eines ausgespannten Seils, welchem man einen seitlichen Stoss ertheilt, oder, wie Nörrenberg gethan hat, einer dünnen Schraubenfeder von Messing, wie sie zu elastischen Hosenträgern, Bandagen u. s. w. verwendet wird. Das Unbequeme dabei ist, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erschütterung eine sehr grosse ist, also nicht leicht mit dem Auge sich verfolgen lässt. Dem lässt sich abhelfen, wenn man die Spannung vermindert oder das specifische Gewicht vermehrt. Nach einigen vergeblichen Versuchen kam ich auf folgende einfache Zusammenstellung, mit der sich ausser dem erwähnten Experiment noch eine Reihe anderer ausführen lässt und die zudem den Vortheil hat, dass Längen- und Querschwingungen gezeigt werden können. Ich construirte mir eine förmliche „Molecülreihe", jedes Molecül vorgestellt durch ein Bleigewicht von einem halben Pfund, je zwei Molecüle verbunden durch eine der oben genannten Messingfedern, deren Spannung die Cohäsion der Molecüle darstellt. Um diese Molecülreihe zu Versuchen tauglich zu machen, wurden die Molecüle durch gleich lange Drähte an einer horizontal durch das Zimmer gezogenen eisernen Stange aufgehängt im Abstand von zwei zu zwei Fuss etwa, und die letzten Molecüle durch Messingfedern mit festen Punkten der Wände verbunden, so dass schliesslich die Drähte, an denen die Molecüle hängen, vertical sich stellen und die Messingfeder zwischen je zwei Molecülen ungefähr auf das anderthalbfache ihrer ursprünglichen Länge (beiläufig $\frac{3}{4}$ Fuss) ausgedehnt ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verschiebung eines Molecüls beträgt bei dieser Zusammenstellung etwa 4 Fuss, lässt sich also gut mit dem Auge verfolgen, sie liesse sich aber natürlich durch Vergrösserung der Gewichte noch vermindern.

Versuche, die sich mit dieser „Molecülreihe" anstellen lassen, sind: das Fortschreiten und Zurückgeworfenwerden einer Quer- oder Längenverschiebung eines Molecüls, stehende Querschwingungen der ganzen Reihe oder zweier Hälften u. s. w., stehende Längenschwingungen mit Schwingungsbauch oder Schwingungsknoten in der Mitte. Auch kann man ein Ende oder beide frei lassen und damit den Schwingungszustand einer gedeckten oder offenen Pfeife nachahmen. Namentlich die Nachbildung der

Längenschwingungen scheint mir ein Vorzug meiner Zusammenstellung zu sein.

Stuttgart, im März 1866. Prof. Dr. Zech.

XXVIII. Interferenzversuche mit dem Soleil'schen Doppelquarz, von Prof. Stefan.

Der Doppelquarz besteht aus zwei neben einander liegenden gleich dicken, senkrecht zur Axe geschnittenen Quarzplatten, welche die Polarisationsebene in entgegengesetztem Sinne drehen. Klebt man eine solche Doppelplatte auf ein Interferenzprisma so, dass die Kante des letzteren in die Ebene fällt, in welcher die beiden Quarze zusammenstossen, so stört dieselbe die Symmetrie der Interferenzerscheinung nicht, wenn man gewöhnliches oder linear polarisirtes Licht anwendet. Schickt man circular polarisirtes Licht auf das Prisma, so verschieben sich die Interferenzstreifen. Die Verschiebung geht in die entgegengesetzte über, sobald das Licht aus der einen Art circularer Polarisation in die andere Art übergeführt wird.

Klebt man ein Stanniolblättchen, in welches zwei parallele Spalten von etwa 1 Millim. Breite in 1 Millim. Abstand eingeschnitten sind, so auf die Doppelplatte, dass eine Spalte auf den links drehenden Quarz kommt, die andere auf den rechts drehenden, so erscheint die Interferenzerscheinung im hellen Mittelfelde in ihrer Symmetrie ungestört bei gewöhnlichem oder linear polarisirtem Licht. Es tritt aber eine Verschiebung der Streifen ein bei circular polarisirtem Licht. Bei diesem Versuch geschieht die Beobachtung durch ein Fernrohr, beim früheren durch eine Loupe. Die Anordnung des Apparates ist folgende:

Das Licht wird durch den Polarisationsapparat (bestehend aus einem Nicol- und einem Fresnel'schen Parallelepiped oder entsprechendem Glimmerblättchen) auf die Spalte eines Spectralapparates geschickt, und tritt aus dem Collimator in parallelen Strahlen auf das Interferenzprisma oder die Doppelspalte.

Damit eine Verschiebung eintritt, braucht das Licht nicht genau circular polarisirt zu sein. Es genügt etwas stärker elliptisch polarisirtes. Lässt man das Licht aus dem Collimator zuerst auf ein total reflectirendes Prisma fallen, so sieht man die Verschiebung deutlich, wenn das aus dem Collimator kommende Licht unter 45° gegen die Reflexionsebene polarisirt ist.

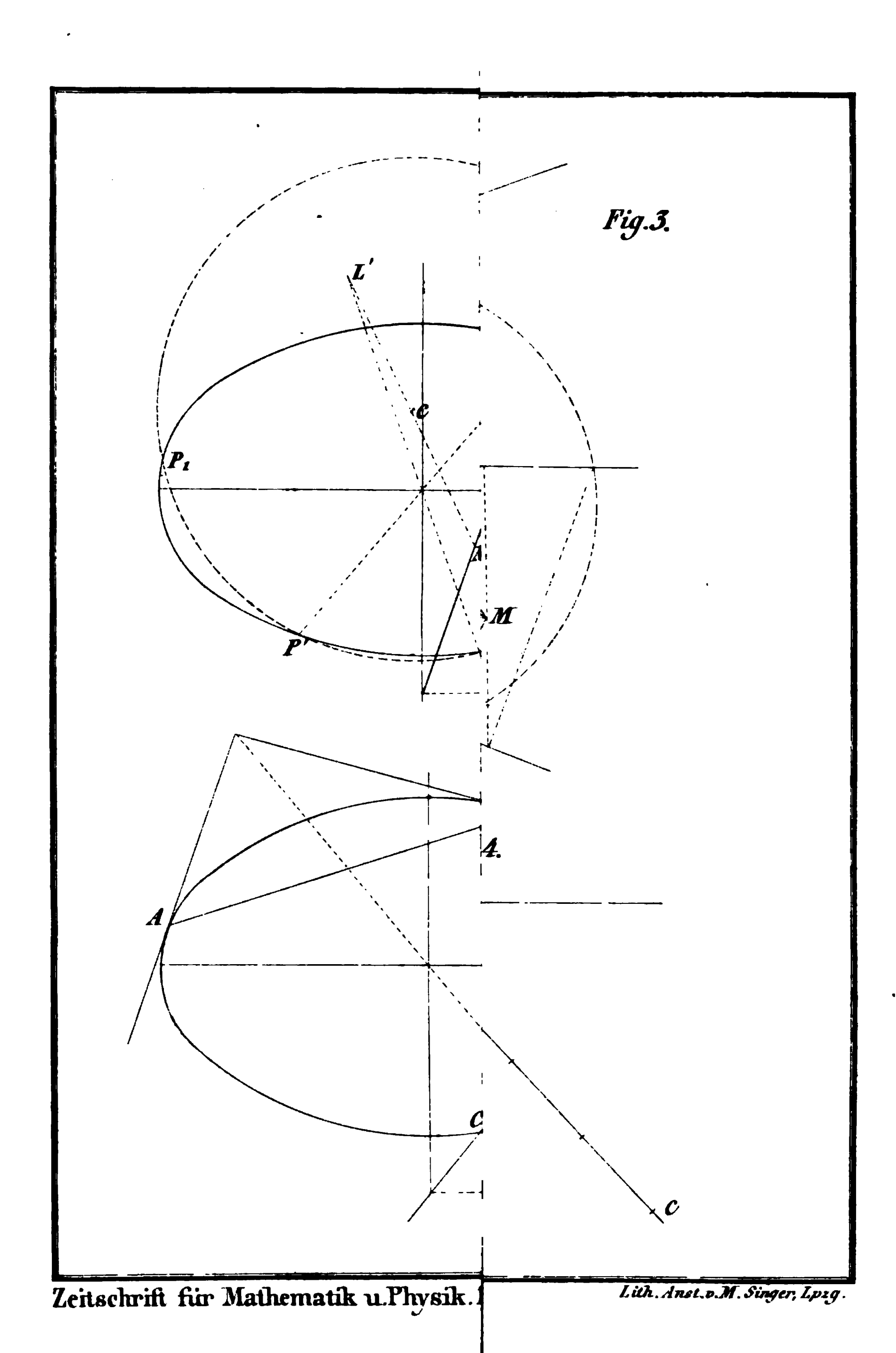
Daraus, dass bei linear schwingendem Licht die Doppelplatte die Symmetrie der Interferenzerscheinung nicht stört, dass ferner die Verschiebung in die entgegengesetzte übergeht, wenn statt links circularem rechts circulares Licht angewendet wird, folgt, dass der rechts und links circular polari-

sirte Strahl in den beiden Arten des Quarzes genau ihre Rolle vertauschen, dass in beiden Arten dieselben Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vorkommen. Es muss der Gangunterschied, den zwei rechts circulare Strahlen erhalten, wenn der eine durch eine rechts drehende, der andere durch eine links drehende Platte von gleicher Dicke geht, derselbe sein, den eine einzige der Platten zwischen einem rechts und einem links circularen Strahle erzeugt. Die gemessene Verschiebung stimmt mit der aus dem Drehungsvermögen des Quarzes gerechneten überein.

Wendet man rothes Licht an, so erscheinen bei gewöhnlichem oder linear polarisirtem Licht die Interferenzstreifen nur wenig dunkel, ganz schwarz aber bei circular polarisirtem Licht. Die Ursache davon ist die, dass die beiden Quarze die Schwingungen des rothen Lichtes um nahe drei Rechte gegen einander drehen, und die nahe senkrecht gegen einander stehenden Schwingungen sich nicht aufheben können.

Man kann mit dem Doppelquarz noch auf eine andere Art beweisen, dass senkrecht gegen einander stehende Schwingungen sich nicht auslöschen können, und auch, dass im gewöhnlichen Licht geradlinige Schwingungen vorhanden sind. Bedeckt man den einen Quarz mit einem Glasblättchen, lässt den andern frei, bringt die Doppelplatte so am Collimator an, dass das Licht zu gleichen Theilen aus den beiden Hälften austritt, breitet das Licht in ein Spectrum aus, so erscheinen im ganzen Spectrum Interferenzstreifen bei circular oder elliptisch polarisirtem Licht, sie fehlen aber bei linear polarisirtem oder gewöhnlichem Licht bei den Linien *C*, *F*, *G*, für welche die Drehungen drei, fünf, sieben Rechte betragen.

(Wiener Akad.)



Lith. Anst. v. M. Singer, Lpzg.

XVI.

Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.

Von

Dr. Otto Hesse,
ordentlichem Prof. a. d. Univers. Heidelberg.

Erste Vorlesung.

Homographie.

Ein System von unendlich vielen geraden Linien (Strahlen), welche sämmtlich von einem und demselben Punkte ausgehen, nennt man Strahlenbüschel. Schneidet man einen Strahlenbüschel U durch irgend eine gerade Linie A, so wird die gerade Linie in den Schnittpunkten homographisch getheilt. Jedem Punkte der geraden Linie entspricht ein Strahl des Büschels, der durch ihn geht, und jedem Strahle entspricht ein Punkt der geraden Linie, welcher auf dem Strahle liegt.

Man kann aber auch von einer durch unendlich viele Punkte getheilten geraden Linie A ausgehen. Zieht man von den Theilungspunkten Strahlen nach einem festen Punkte ausserhalb der geraden Linie, so bilden diese einen Strahlenbüschel U, welcher die gerade Linie homographisch theilt.

Es ist bekannt, dass ein Strahlenbüschel und ein Punktesystem auf einer geraden Linie sich analytisch ausdrücken lassen durch die Gleichungen:

1) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad A_0 - \mu A_1 = 0,$

wenn man unter $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Strahlen des ersten, unter $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Punkte des zweiten Systems und unter λ und μ zwei willkührliche Grössen versteht.

Die erste Gleichung stellt unter dieser Voraussetzung irgend einen Strahl λ des Strahlenbüschels U und die zweite irgend einen Punkt μ des Punktesystemes auf der geraden Linie A dar.

Sollen aber die genannten beiden Gleichungen **homographische Elemente** ausdrücken, das heisst, soll der durch die erste Gleichung dargestellte Strahl λ durch den durch die zweite Gleichung ausgedrückten Punkt μ gehen, so muss der Werth von λ den Werth von μ bedingen, mit anderen Worten, eine von diesen Grössen muss eine Function der anderen sein, sie müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ von einander abhängen.

Diese Gleichung muss vom ersten Grade sein in Rücksicht auf μ, weil jeder Strahl λ des Systemes U sein homographisches Element μ des Systemes A eindeutig bedingt. Ebenso muss die Gleichung vom ersten Grade sein in Rücksicht auf λ, weil auch jeder Punkt μ auf der geraden Linie A nur einem Strahle λ des Büschels U entspricht. Aus der so definirten Gleichung $\varphi(\lambda, \mu) = 0$ folgt, dass sie die Form haben muss:

2) . . . . . $$p - \lambda p_1 - \mu q + \lambda \mu q_1 = 0.$$

Man kann demnach sagen:

3) . . . **Ein Strahlenbüschel und seine homographische Theilung auf einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form 1) analytisch darstellen unter der Voraussetzung einer bestimmten Bedingungsgleichung zwischen λ und μ von der Form 2).**

Wir lassén noch einen zweiten Beweis des Satzes folgen, der zugleich die Werthe der vier Constanten p, q in der Bedingungsgleichung 2) bestimmen lehrt.

Soll der durch die zweite Gleichung 1) bestimmte Punkt μ auf dem durch die erste Gleichung gegebenen Strahl λ liegen, so müssen die aus der zweiten Gleichung genommenen homogenen Coordinaten des Punktes, in die erste homogene Gleichung gesetzt, derselben genügen. Macht man diese Substitutionen, so erhält man die Bedingungsgleichung:

4) . . . . $$U_0^0 - \lambda U_1^0 - \mu U_0' + \lambda\mu U_1' = 0$$

wenn U_0^0 und U_1^0 die Ausdrücke bezeichnen, in welche U_0 und U_1 übergehen, wenn man in ihnen für die Variabeln die Coordinaten des Punktes $A_0 = 0$ setzt, und U_0' und U_1' die Ausdrücke, in welche U_0 und U_1 übergehen, wenn man für die Variabeln in ihnen die Coordinaten des Punktes $A_1 = 0$ setzt.

Aus dem Vergleich der Gleichung 4) mit 2) ergeben sich die Werthe der vier Constanten in der letzteren:

5) . . . . $$p = U_0^0, \quad p_1 = U_1^0, \quad q = U_0', \quad q_1 = U_1'.$$

Die Gleichungen $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ stellen irgend zwei Punkte auf der geraden Linie A dar. Wählen wir dieselben so, dass der Punkt $A_0 = 0$ auf der geraden Linie $U_0 = 0$ liegt, dass der Punkt $A_1 = 0$ auf der geraden Linie $U_1 = 0$ liegt und richten zugleich die homogenen Coor-

dinaten dieser Punkte so ein, dass $U_0' + U_1^0 = 0$, so verschwinden U_0^0 und U_1' und die Bedingungsgleichung 4) geht über in $\lambda - \mu = 0$.

Hiernach können wir den Satz 3) kürzer so ausdrücken:

6) . . . Ein jeder Strahlbüschel und seine homographische Theilung auf irgend einer geraden Linie lassen sich analytisch durch Gleichungen ausdrücken von der Form:

$$6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad\qquad A_0 - \lambda A_1 = 0.$$

Man kann leicht einsehen, dass die Sätze 3) und 6) nach der gegebenen Definition der Homographie sich nicht umkehren lassen, dass, wenn Gleichungen von der angegebenen Form gegeben sind, nicht jeder durch sie ausgedrückte Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht. Will man jedoch, dass auch die umgekehrten Sätze 3) und 6) Geltung haben, so muss man den Begriff der Homographie erweitern.

Zu diesem Zwecke werden wir ein Punktesystem auf einer geraden Linie A und einen Strahlenbüschel U noch homographisch nennen, wenn man die gerade Linie aus dem vorhin beschriebenen Systeme herausnimmt und ihr, ohne die Punktefolge zu ändern, in der Ebene irgend welche Lage giebt; oder wenn man dem sonst unveränderten Strahlenbüschel eine beliebige andere Lage zuertheilt. Wir nennen diese Lage homographischer Systeme die schiefe Lage zum Unterschiede von den früheren der perspectivischen Lage, in der jeder Strahl des Büschels durch seinen entsprechenden Punkt ging.

Untersuchen wir nun, welche Aenderung das Versetzen der homographischen Systeme aus der perspectivischen Lage in die schiefe Lage in ihren analytischen Ausdrücken 1) und 6) zu Wege bringt.

Um den durch die erste Gleichung 1) oder 6) gegebenen Strahlenbüschel beliebig in die Ebene zu verlegen, beziehen wir denselben auf ein beliebiges anderes rechtwinkliges Coordinatensystem, was analytisch darauf hinauskommt, dass wir für die homogenen Coordinaten x, y, z in der Gleichung gewisse lineare homogene Ausdrücke der Coordinaten X, Y, Z des zweiten rechtwinkligen Systemes setzen. Wenn wir dann das zweite Coordinatensystem mit seinem Strahlenbüschel in die Lage bringen, dass die Coordinatenaxen des zweiten Systems mit den entsprechenden Coordinatenaxen des ersten Systemes zusammenfallen, so nimmt der Strahlenbüschel eine ganz beliebige andere Lage an. Diese letzte Operation wird analytisch dadurch vollführt, dass man für X, Y, Z respective setzt x, y, z.

Man verlegt demnach den durch die erste Gleichung 1) oder 6) gegebenen Strahlenbüschel beliebig in der Ebene, wenn man in der Gleichung an Stelle der homogenen Coordinaten x, y, z setzt gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten. Dadurch gehen zwar die homogenen Ausdrücke U_0 und U_1 der Coordinaten in andere ebenfalls

lineare Ausdrücke derselben Coordinaten über, aber die Form der Gleichung bleibt ungeändert.

Ebenso verlegt man das durch die zweite Gleichung 1) oder 6) gegebene Punktesystem auf einer geraden Linie beliebig in der Ebene, wenn man in den Gleichungen an Stelle der homogenen Liniencoordinaten u, v, w setzt gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten. Dadurch wird ebenso wenig die Form der Gleichungen geändert.

Demnach können wir sagen:

7) . . . Jeder Strahlenbüschel und seine homographische Theilung auf irgend einer geraden Linie in irgend welcher schiefen Lage lassen sich durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer bestimmten Bedingungsgleichung von der Form 2), oder einfacher durch Gleichungen von der Form 6), analytisch ausdrücken.

Wir werden jetzt untersuchen, ob Gleichungen von der Form 1) unter der Voraussetzung einer gegebenen Bedingungsgleichung von der Form 2) nach dem erweiterten Begriffe der Homographie immer homographischer Systeme analytisch ausdrücken.

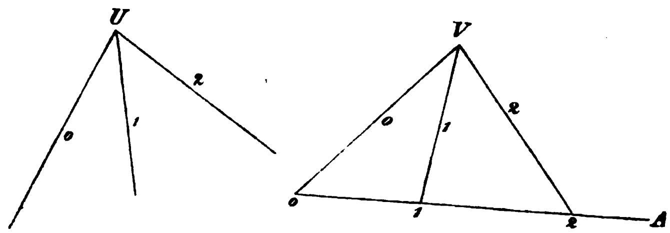
Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass nicht jeder durch die erste Gleichung 1) gegebene Strahl des Büschels durch den ihm nach der gegebenen Bedingungsgleichung 2) entsprechenden Punkt der geraden Linie geht, welcher durch die zweite Gleichung ausgedrückt wird. Ein bestimmter Strahl wird aber durch den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie gehen, wenn die Coordinaten des Punktes, in die Gleichung des Strahles gesetzt, der Gleichung genügen. Die Bedingung dafür ist die Gleichung 4), wenn man unter μ den Werth versteht, der sich aus der gegebenen Bedingungsgleichung 2) ergiebt. Der Umstand, dass diese Gleichung 4), wenn man den gegebenen Werth von μ einsetzt, eine quadratische Gleichung in λ wird, beweiset den Satz:

8) . . . Wenn ein Strahlenbüschel und ein den Strahlen desselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung 2) gegeben sind, so hat der Strahlenbüschel zwei Strahlen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen.

Wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen, so müssen die Werthe der λ für die drei Strahlen der genannten quadratischen Gleichung genügen. Da aber die quadratische Gleichung nur zwei Wurzeln hat, welche ihr genügen, so ist das nicht möglich, wenn nicht alle drei Coefficienten in der nach Potenzen von λ entwickelten quadratischen Gleichung zugleich verschwinden. Verschwinden aber diese, so genügt jeder beliebige Werth von λ der Gleichung und daraus entspringt der Satz:

9) ... **Wenn ein Strahlenbüschel und ein den Strahlen desselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung 2) gegeben sind, und wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen, so geht jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie — mit anderen Worten — die Systeme sind homographisch und zugleich in perspectivischer Lage.**

Auf diesen Satz gestützt können wir den Satz 3) umkehren. Diese Umkehrung beabsichtigend fixiren wir irgend drei Strahlen 0, 1, 2 aus dem durch die erste Gleichung 1) gegebenen Strahlenbüschel U und die ihnen aus der zweiten Gleichung unter Vermittelung von 2) entsprechenden Punkte 0, 1, 2 auf der geraden Linie A, wie die Figur zeigt:



Der Strahlenbüschel U lässt sich durch Verlegung in der Ebene in die Lage von V bringen, dass jeder der drei angegebenen Strahlen durch den ihm entsprechenden Punkt geht. Man braucht nur durch die Punkte 0 und 1 einen Kreis zu legen, dessen Peripheriewinkel dem Winkel gleich ist, den die beiden Strahlen 0 und 1 bilden, und einen zweiten Kreis durch die Punkte 1 und 2, dessen Peripheriewinkel gleich ist dem von den Strahlen 1 und 2 eingeschlossenen Winkel; der Schnittpunkt der beiden Kreise wird das Centrum des Strahlenbüschels V, und die drei geraden Linien, welche das Centrum mit den Punkten 0, 1, 2 verbinden, werden die Strahlen des verlegten Strahlenbüschels sein.

Analytisch wird diese Verlegung des Strahlenbüschels U, welcher durch die erste Gleichung 1) gegeben ist, in die Lage von V dadurch vollführt, dass man für die homogenen Coordinaten in jener Gleichung gewisse lineare homogene Ausdrücke derselben Coordinaten setzt, wodurch U_0 in V_0 und U_1 in V_1 übergehe und die erste Gleichung 1) in:

$$V_0 - \lambda V_1 = 0$$

Da nun drei Strahlen dieses verlegten Strahlenbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie A gehen, so tritt für ihn der zuletzt genannte Satz in Wirksamkeit, und da die Strahlenbüschel U und V, abgesehen von ihrer Lage, dieselben sind, so haben wir die Umkehrung des Satzes 3) bewiesen, nämlich:

10) . . . Wenn ein Strahlenbüschel und ein Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form 1) unter Voraussetzung einer beliebig gegebenen Bedingungsgleichung von der Form 2) gegeben sind, so sind die Strahlenbüschel und das Punktesystem homographische Systeme,

Im Speciellen, wenn die gegebene Bedingungsgleichung 2) die Gleichung $\lambda - \mu = 0$ ist, haben wir den mit 7) vereinten Satz:

11) . . . Jeder Strahlenbüschel und ein beliebiges mit ihm homographisches Punktesystem auf irgend einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form 6) analytisch ausdrücken, und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form 6) immer einen Strahlenbüschel und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie dar.

Unsere Untersuchung hatte nur einen Strahlenbüschel und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie im Auge, denn auch die durch die Gleichungen 1) unter einer beliebigen Bedingungsgleichung von der Form 2) gegebenen Systeme erwiesen sich als homographische Systeme.

Wie diese gegebenen Systeme in perspectivische Lage gebracht werden konnten, so lassen sich auch im Speciellen homographische Systeme in perspectivische Lage bringen nach der Regel:

12) . . . Man bringt einen Strahlenbüschel in perpectivische Lage mit einem homographischen Punktesystem auf einer geraden Linie, wenn man die Systeme so verlegt, dass drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der geraden Linie gehen.

In dieser perspectivischen Lage kann man zu jedem Strahle des Büschels den ihm entsprechenden Punkt der geraden Linie (den Schnittpunkt) construiren und umgekehrt zu jedem Punkte der geraden Linie den ihm entsprechenden Strahl (der durch ihn geht).

Demnach genügt es, drei Elemente des einen Systemes und die drei ihnen entsprechenden Elemente des anderen homographischen Systemes zu kennen, um für jedes Element des einen Systemes das entsprechende Element des andern Systemes zu finden. — Diese drei Paare entsprechender Elemente sind aber auch keiner Beschränkung unterworfen, wir meinen, es können irgend drei Strahlen eines Strahlenbüschels irgend drei Punkten in einer geraden Linie homographisch entsprechen; denn diese drei Paare entsprechender Elemente lassen sich immer in perspectivische Lage bringen.

Wir drücken dieses kurz so aus:

13) . . . Durch irgend drei Strahlen eines Strahlenbüschels und die ihnen homographisch entsprechenden Punkte in einer geraden Linie, die irgend welche drei Punkte der ge-

raden Linie sein können, sind die homographischen Systeme, der Strahlenbüschel und das Punktesystem auf der geraden Linie, vollständig bestimmt.

Bisher haben wir nur von homographischen Systemen gehandelt, von welchen das eine ein Strahlenbüschel, das andere ein System von Punkten auf einer geraden Linie waren. Wir erweitern nun den Begriff homographischer Systeme durch folgende Definitionen.

Zwei Strahlenbüschel sind homographisch, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der beiden Strahlenbüschel.

Punktesysteme auf zwei geraden Linien sind homographisch, wenn ein Strahlenbüschel gefunden werden kann, welcher homographisch ist mit jedem der beiden Punktesysteme.

Bezeichnen wir nun mit den letzten Buchstaben U, V.. des Alphabetes lineare homogene Ausdrücke der homogenen Punktcoordinaten und mit den ersten Buchstaben A, B.. lineare homogene Ausdrücke der homogenen Liniencoordinaten, so stellen sich beliebige homographische Strahlenbüschel analytisch unter der Form dar:

14) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda V_1 = 0$

weil das Punktesystem $A_0 - \lambda A_1$ nach 11) homographisch ist mit jedem der beiden Strahlenbüschel. Ebenso drücken die Gleichungen:

15) . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad B_0 - \lambda B_1 = 0$

beliebige homographische Punktesysteme auf irgend welchen geraden Linien aus, weil der Strahlenbüschel $U_0 - \lambda U_1 = 0$ homographisch ist mit jedem der beiden Punktesysteme.

Hiernach können wir, wenn wir mit Systeme ebensowohl Strahlenbüschel als Punktesysteme auf geraden Linien, auch untermischt mit einander, bezeichnen, den Satz aussprechen:

16) . . . Wenn zwei Systeme homographisch sind mit einem dritten Systeme, so sind je zwei von den drei Systemen homographisch.

Zwei homographische Strahlenbüschel sind im Allgemeinen in schiefer Lage. Sie haben eine perspectivische Lage, wenn die entsprechenden Strahlen der beiden Systeme sich in Punkten schneiden, die alle auf einer geraden Linie liegen.

Ebenso sind homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien im Allgemeinen in schiefer Lage. Sie haben eine perspectivische Lage, wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der beiden Systeme sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen.

Man kann homographische Systeme der genannten Art in perspectivische Lage bringen, wenn man sie so in der Ebene verlegt, dass sie den Bedingungen der folgenden Sätze genügen:

17) . . . Wenn zwei entsprechende Strahlen zweier homographischen Strahlenbüschel einen einzigen Strahl bilden, so sind die Strahlenbüschel in perspectivischer Lage.

18) . . . Wenn zwei entsprechende Punkte zweier homographischen Punktesysteme auf zwei geraden Linien zusammenfallen, so sind die Punktesysteme in perspectivischer Lage.

Denn es seien 14) die Gleichungen der homographischen Strahlenbüschel, von welchen die dem Werthe $\lambda = \lambda_0$ entsprechenden Strahlen:

$$U_0 - \lambda_0 U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda_0 V_1 = 0$$

zusammenfallen. Da diese Gleichungen eine und dieselbe gerade Linie darstellen, so muss man einen bestimmten Factor ϱ finden können, der Art, dass man identisch hat:

$$(U_0 - \lambda_0 U_1) - \varrho(V_0 - \lambda_0 V_1) \equiv 0$$

Ziehen wir nun von der ersten Gleichung 14) die mit jenem Factor ϱ multiplicirte zweite Gleichung und dann noch die angegebene identische Gleichung ab, so erhalten wir nach Division durch $\lambda_0 - \lambda$ die Gleichung:

$$U_1 - \varrho V_1 = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, in der sich jede zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlenbüschel 14) schneiden, weil sie unabhängig von λ ist.

Zum Beweise des zweiten Parallelsatzes bedarf es nichts weiter, als dass man in dem Vorhergehenden den Ausdruck „Strahlenbüschel" mit „Punktesystem" auf einer geraden Linie vertauscht und die Symbole U und V in A und B verändert.

Wir legen jetzt irgend zwei homographische Strahlenbüschel concentrisch auf einander, um ihre Eigenschaften in dieser Lage zu erforschen.

Es seien 14) die Gleichungen der so aufeinander gelegten Strahlenbüschel. Da in dieser Lage die vier Strahlen $U_0=0$, $U_1=0$, $V_0=0$, $V_1=0$ durch das gemeinschaftliche Centrum gehen, so lassen sich vier Constanten p, q der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$V_0 \equiv q U_0 - p U_1, \qquad V_1 \equiv q_1 U_0 - p_1 U_1.$$

Setzt man diese Ausdrücke von V_0 und V_1 in die Gleichungen 14), so hat man die Gleichungen von irgend zwei concentrisch auf einander gelegten Strahlenbüscheln:

$$19) \quad . \; . \quad U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} U_1 = 0.$$

Die einem Werthe von λ entsprechenden Strahlen der beiden concentrischen Büschel fallen zusammen unter der Bedingung:

$$20) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} - \lambda = 0.$$

Da diese Gleichung eine quadratische ist, so schliessen wir daraus, dass im Allgemeinen zwei Mal zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammenfallen.

Fallen drei Mal zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen, so muss entweder die quadratische Gleichung drei Wurzeln haben, was nicht möglich ist, oder die Coefficienten p, q_1 und $q + p_1$ der entwickelten quadratischen Gleichung verschwinden sämmtlich, in welchem Falle die beiden Strahlenbüschel nicht verschieden von einander sind.

Dem Vorhergehenden entsprechend legen wir auch irgend zwei homographische Punktesysteme in eine und dieselbe gerade Linie. Ihre Gleichungen 15) lassen sich bei der angegebenen Lage der Systeme in gleicher Weise zurückführen auf Gleichungen von der Form:

$$21) \quad \ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad A_0 - \frac{p - \lambda p_1}{q - \lambda q_1} A_1 = 0,$$

und die Gleichung 20) ist wieder die Bedingung, unter welcher zwei entsprechende Punkte der beiden Punktesysteme zusammenfallen. Aus der Interpretation der Gleichung 20) entspringen, wie bereits angedeutet worden, die Sätze:

22) ... Wenn zwei homographische Strahlenbüschel beliebig concentrisch auf einander gelegt werden, so fallen im Allgemeinen zwei Mal entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen. Wenn drei Mal entsprechende Strahlen zusammenfallen, so fallen jede zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammen.

23) ... Wenn zwei homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien auf einander gelegt werden, so vereinigen sich im Allgemeinen zwei Mal entsprechende Punkte der beiden Systeme. Wenn drei Mal entsprechende Punkte sich vereinigen, so vereinigen sich jede zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme.

Die beiden Strahlen, in welchen sich zwei entsprechende Strahlen concentrisch auf einander gelegter homographischer Strahlenbüschel vereinigen, heissen Doppelstrahlen der Strahlenbüschel.

Die beiden Punkte, in welchen sich zwei entsprechende Punkte der auf einander gelegten homographischen Punktesysteme vereinigen, heissen Doppelpunkte der beiden Systeme.

Die Gleichungen 19) und 21) concentrisch auf einander gelegter Strahlenbüschel und in eine gerade Linie gelegter homographischer Punktesysteme haben nicht die einfachste Gestalt, auf welche sie zurückgeführt werden können. Um sie darauf zurückzuführen dienen die Sätze 22) und 23).

In dem ersten Strahlenbüschel 19) waren $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Strahlen, an welche sich der ganze Strahlenbüschel anlehnte. Diese beiden Strahlen konnten aus den Strahlen des Büschels beliebig gewählt werden. Wir werden jetzt für dieselben die beiden Doppelstrahlen der beiden Büschel 19) wählen.

In dieser Voraussetzung müssen sowohl für $\lambda = 0$ als für $\lambda = \infty$ die beiden Strahlen 19) zusammenfallen. In dem ersten Falle muss $p = 0$, in dem anderen $q_1 = 0$ sein. Setzen wir demnach $\frac{p_1}{q} = -\alpha$, so führen wir die Gleichungen 19) zurück auf die einfachere Form:

$$24) \quad \ldots \quad U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda\alpha U_1 = 0,$$

Ebenso nehmen die Gleichungen zweier homographischen Punktesysteme auf einander gelegt die Gestalt an:

$$25) \quad \ldots \quad A_0 - \lambda A_1 = 0, \qquad A_0 - \lambda\alpha A_1 = 0,$$

wenn $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Doppelpunkte der beiden Systeme sind.

Aus der Ansicht dieser Gleichungen 24) und 25) lassen sich sogleich die Sätze abnehmen:

26) ... In zwei concentrisch auf einander gelegten homographischen Strahlenbüscheln haben je zwei entsprechende Strahlen dasselbe anharmonische Verhältniss zu den beiden Doppelstrahlen der Strahlenbüschel.

27) ... In zwei auf einander gelegten homographischen Punktesystemen haben je zwei entsprechende Punkte dasselbe anharmonische Verhältniss zu den beiden Doppelpunkten der Systeme.

Wenn einer der beiden concentrischen Strahlenbüschel 24) um das gemeinschaftliche Centrum gedreht wird, so ändern sich die Doppelstrahlen $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ und voraussichtlich auch das anharmonische Verhältniss α. Ebenso ändern sich die Doppelpunkte $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ und voraussichtlich das anharmonische Verhältniss α, wenn die beiden auf einander liegenden Punktesysteme 25) auf derselben geraden Linie gegen einander verschoben werden. Wir werden nun untersuchen, ob im ersten Falle durch eine bestimmte Drehung und im anderen Falle durch eine bestimmte Verschiebung das genannte anharmonische Verhältniss in ein harmonisches übergeführt werden kann.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Feststellung der Bedingung, unter welcher die entsprechenden Strahlen zweier concentrisch auf einander liegenden Strahlenbüschel 19) harmonisch sind mit den Doppelstrahlen.

Die genannten Strahlenbüschel lassen sich so ausdrücken:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 - \mu U_1 = 0,$$

indem man hat:

$$p - \lambda p_1 - \mu q + \lambda \mu q_1 = 0.$$

In der Voraussetzung, dass $p_1 = q$ geht diese Gleichung über in:

$$p - (\lambda + \mu) q + \lambda \mu q_1 = 0.$$

Da sich nun zwei Grössen λ_1 und μ_1 so bestimmen lassen, dass:

$$\frac{p}{q_1} = \lambda_1 \mu_1, \qquad \frac{q}{q_1} = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1),$$

so geht die letzte Gleichung dadurch über in die bekannte Bedingungsgleichung für harmonische Strahlenpaare:

$$\lambda_1 \mu_1 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda \mu = 0.$$

Das heisst, unter der gemachten Voraussetzung $p_1 = q$ sind je zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel harmonisch mit einem bestimmten Strahlenpaare, den Doppelstrahlen.

Diese und eine analoge Untersuchung an zwei auf einander liegenden homographischen Punktesystemen 21) führen zu den Sätzen:

28) ... In zwei concentrisch auf einander gelegten Strahlenbüscheln 19) sind je zwei entsprechende Strahlen harmonisch mit den beiden Doppelstrahlen unter der Bedingung $p_1 = q$.

29) ... In zwei auf einander gelegten homographischen Punktesystemen sind je zwei entsprechende Punkte harmonisch mit den beiden Doppelpunkten unter der Bedingung $p_1 = q$.

Die oben angegebene Untersuchung verlangt ferner die Lösung der folgenden Aufgabe:

30) ... Wenn ein durch seine Gleichung:

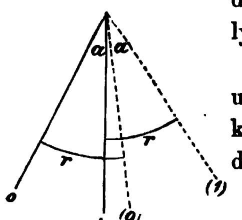
$$30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad U_0 - \lambda U_1 = 0$$

gegebener Strahlenbüschel um sein Centrum und um einen bestimmten Winkel r gedreht wird, die Gleichung des Strahlenbüschels nach seiner Drehung zu bestimmen.

Wir können annehmen, dass $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$, die Gleichungen der Strahlen 0 und 1 des gegebenen Strahlenbüschels, die Normalform haben. Im anderen Falle würden wir in der Gleichung 30) durch Multiplication mit gewissen Factoren die Ausdrücke U_0 und U_1 auf die Normalformen zurückzuführen und die Factoren mit der Variabeln λ zu einer neuen Variable vereinigen.

Unter der angegebenen Voraussetzung werden wir die fest mit ein-

ander verbundenen Strahlen 0 und 1, die den Winkel a einschliessen, um einen Winkel r drehen, wie die Figur zeigt: und die Gleichungen dieser Strahlen in der neuen Lage [0] und [1] analytisch ausdrücken.



Ihre analytischen Ausdrücke haben die Form 30) und für jeden derselben hat der Factor λ die bekannte geometrische Bedeutung, nach welcher sich die Gleichungen der gedrehten Strahlen ergeben:

$$U_0 \sin(r - a) - U_1 \sin r = 0,$$
$$U_0 \sin r - U_1 \sin(r + a) = 0.$$

Diese Gleichungen haben jedoch nicht die Normalformen. Sie werden auf dieselben zurückgeführt durch Division mit gewissen Factoren μ_0 und μ_1, deren Quadrate sich nach bekannten Regeln darstellen wie folgt:

$$\mu_0^2 = \sin^2(r - a) - 2\cos a \sin(r - a)\sin r + \sin^2 r = \sin^2 a,$$
$$\mu_1^2 = \sin^2(r + a) - 2\cos a \sin(r + a)\sin r + \sin^2 r = \sin^2 a.$$

Aus den Normalformen der Gleichungen der Strahlen [0] und [1] setzen wir nun in Berücksichtigung der geometrischen Bedeutung des Factors λ die Gleichung des Strahlenbüschels 30) nach der Drehung um den Winkel r so zusammen:

31) $$\{U_0 \sin(r - a) - U_1 \sin r\} - \lambda\{U_0 \sin r - U_1 \sin(r + a)\} = 0.$$

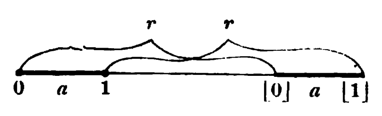
An die vorhergehende Aufgabe schliesst sich nun die analoge Aufgabe an:

32) . . . Wenn ein durch seine Gleichung

32) . . . . $A_0 - \lambda A_1 = 0$

gegebenes Punktesystem auf einer geraden Linie in dieser Linie um die Entfernung r verschoben wird, die Gleichung des verschobenen Punktesystemes zu finden.

Auch hier werden wir annehmen, dass $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen der Punkte 0 und 1 in der Normalform seien und a die Entfernung der beiden Punkte von einander. Durch Verschiebung um r auf der geraden Linie mögen die Punkte 0 und 1 in die Lage von [0] und [1] kommen.



Die Gleichungen der Punkte [0] und [1] sind von der Form 32), und, wenn man für den Factor λ die diesen Punkten entsprechenden Werthe setzt, so hat man die Gleichungen der Punkte [0] und [1]:

$$A_0(r - a) - A_1 r = 0, \qquad A_0 r - A_1(r + a) = 0.$$

Wir führen dieselben auf die Normalform zurück durch Division mit μ_0 und μ_1:

$$\mu_0 = (r - a) - r = - a, \qquad \mu_1 = r - (r + a) = - a$$

und aus diesen Gleichungen der Punkte [0] und [1] in der Normalform setzen wir in Erinnerung der geometrischen Bedeutung des Factors λ die Gleichung des um r verschobenen Punktesystemes 32) zusammen, wie folgt:

33) . . $\{A_0(r - a) - A_1 r\} - \lambda \{A_0 r - A_1 (r + a)\} = 0.$

Diese Aufgaben sind gelöset worden, um in Gemeinschaft mit den Sätzen 28) und 29) die oben angeregten Fragen zu entscheiden, erstens, ob durch Drehung eines von zwei concentrischen homographischen Strahlenbüscheln eine solche Lage herbeigeführt werden kann, dass jedes Paar entsprechender Strahlen der beiden Büschel harmonisch sei mit den Doppelstrahlen und zweitens, ob durch Verschiebung eines von zwei auf einander liegenden homographischen Punktesystemen eine Lage erreicht werden kann, in der je zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme harmonisch seien mit den Doppelpunkten der Systeme.

Zu dem angegebenen Zwecke drehen wir von den beliebig concentrisch auf einander gelegten homographischen Strahlenbüscheln 24) den zweiten um das gemeinschaftliche Centrum und um einen beliebigen Winkel r. Unter der Voraussetzung, dass U_0 und U_1 die Normalformen dieser Ausdrücke seien, geht dann die Gleichung jenes Strahlenbüschels über in eine Gleichung, die man aus 31) erhält, wenn man $\lambda\alpha$ für λ setzt:

34) $\{U_0 \sin(r - a) - U_1 \sin r\} - \lambda\alpha \{U_0 \sin r - U_1 \sin(r + a)\} = 0.$

Die Bedingung, unter welcher die entsprechenden Strahlen dieses gedrehten und des ersten homographischen Strahlenbüschels 24) harmonisch seien mit den Doppelstrahlen der beiden Büschel, lässt sich nach dem Satze 28) abnehmen:

$$\alpha \sin(r + a) = \sin(r - a),$$

woraus sich die Tangente des Drehungswinkels r ergiebt, der der Bedingung entspricht:

35) . . . . $\operatorname{tg} r = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot \operatorname{tg} a.$

Verschieben wir von zwei in einer geraden Linie auf einander gelegten homographischen Punktesystemen 25) das zweite System um r, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass A_0 und A_1 die Normalformen bezeichnen, die Gleichung des verschobenen Punktesystemes aus 33), wenn wir $\lambda\alpha$ für λ setzen:

36) . . $\{A_0(r - a) - A_1 r\} - \lambda\alpha \{A_0 r - A_1 (r + a)\} = 0$

und daraus nach Satz 29) die Bedingung:

37) . . . . $r = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \cdot a,$

unter welcher die entsprechenden Punkte des ersten Punktesystems 25) und des zweiten um r verschobenen homographischen Punktesystems harmonisch sind mit den Doppelpunkten der Systeme.

Es lässt sich also das anharmonische Verhältniss α für zwei concentrisch auf einander gelegte homographische Strahlenbüschel 24) durch Drehung des zweiten Strahlenbüschels um das gemeinschaftliche Centrum und um einen Winkel r, bestimmt durch die Gleichung 35), auf ein harmonisches zurückführen, selbst wenn $\alpha = 1$, in welchem Falle die Strahlenbüschel 35) congruent sind und sich in congruenter Lage befinden. In diesem Falle ist der Drehungswinkel r nach 35) ein rechter Winkel.

Ebenso lässt sich das anharmonische Verhältniss α für zwei auf einander gelegte homographische Punktesysteme 25) auf einer geraden Linie durch eine bestimmte Verschiebung r in der geraden Linie, ausgedrückt durch die Gleichung 37), auf ein harmonisches Verhältniss zurückführen. In dem Falle $\alpha = 1$ sind die homographischen Punktesysteme 25) congruent und in congruenter Lage. In diesem Falle rücken die endlichen Punkte durch die Verschiebung in's Unendliche.

Um die Resultate der letzten Untersuchungen kurz zusammen zu fassen, dienen die folgenden Definitionen.

Alle Linienpaare, welche harmonisch sind mit einem beliebig gegebenen Linienpaare, bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, so genannt, weil je drei von den Linienpaaren eine Involution bilden.

Alle Punktepaare, welche harmonisch sind mit einem beliebig gegebenen Punktepaare, bilden ein involutorisches Punktesystem auf einer geraden Linie, weil je drei von jenem Punktepaare eine Involution bilden.

Hiernach haben wir die Sätze:

38) . . . Jede zwei homographische Strahlenbüschel lassen sich concentrisch so auf einander legen, dass die entsprechenden Strahlen der beiden Systeme gepaart einen involutorischen Strahlenbüschel bilden.

39) . . . Jede zwei homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien lassen sich in einer geraden Linie so verlegen, dass die entsprechenden Punkte der beiden Systeme gepaart ein involutorisches Punktesystem auf einer geraden Linie bilden.

Da sich nun jeder involutorische Strahlenbüschel in zwei homographische Strahlenbüschel 24) mit dem Werthe $\alpha = -1$ auflöset und eben so jedes involutorische Punktesystem auf einer geraden Linie in zwei homographische Punktesysteme 25) mit dem Werthe $\alpha = -1$ getrennt werden kann, so hat man auch die umgekehrten Sätze:

40) ... Wenn man in einem beliebigen involutorischen Strahlenbüschel den einen Strahl eines jeden Strahlenpaares als einem Strahlenbüschel zugehörig betrachtet, den anderen einem zweiten Strahlenbüschel zugehörig und dem ersten Strahle entsprechend, und die beiden Strahlenbüschel in der Ebene beliebig verlegt, so hat man homographische Strahlenbüschel der allgemeinsten Art.

41) ... Wenn man in einem beliebigen involutorischen Punktesysteme auf einer geraden Linie den einen Punkt eines jeden Punktepaares als einem Punktesystem zugehörig betrachtet, den anderen einem zweiten Punktesysteme zugehörig und dem ersten Punkte entsprechend, und die beiden Punktesysteme in der Ebene beliebig verlegt, so hat man homographische Punktesysteme der allgemeinsten Art.

Zweite Vorlesung.

Erzeugung der Kegelschnitte durch homographische Systeme.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung gesehen, dass irgend zwei homographische Strahlenbüschel sich analytisch durch Gleichungen von der Form ausdrücken lassen:

1) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad V_0 - \lambda V_1 = 0,$

indem dieselben für den gleichen Werth von λ in beiden Gleichungen die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel darstellen.

Man erhält hieraus die Gleichung des geometrischen Ortes der Schnittpunkte entsprechender Strahlen, wenn man λ eliminirt:

2) . . . . $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$

die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Centra der beiden homographischen Büschel geht, weil die Gleichung 2) ebenso für $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ als für $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$ erfüllt wird.

Auf diese Form 2) lässt sich die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnittes zurückführen. Denn wählt man auf dem beliebig gegebenen Kegelschnitt irgend vier Punkte und legt durch dieselben zwei Linienpaare $U_0 = 0$, $V_1 = 0$ und $U' = 0$, $V_0 = 0$, so stellt die Gleichung:

$$U_0 V_1 - \mu U' V_0 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor μ alle möglichen Kegelschnitte dar, welche durch die vier Punkte gehen, also unter Voraussetzung des passenden Factors μ den beliebigen Kegelschnitt, dessen Gleichung in 2) übergeht,

wenn man für $\mu U'$ setzt U_1. Man erkennt hieraus, dass durch die Schnitte homographischer Strahlenbüschel sich alle möglichen Kegelschnitte erzeugen und hat daher den Satz:

3) ... Jede zwei homographische Strahlenbüschel erzeugen durch den Schnitt der entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt, auf dem die Centra der Strahlenbüschel liegen. Durch alle möglichen homographischen Strahlenbüschel werden auf diese Weise alle möglichen Kegelschnitte erzeugt.

Dieser Satz lässt sich umkehren wie folgt:

4) ... Wenn man von zwei beliebig auf einem Kegelschnitt als Centra angenommenen Punkten Strahlen zieht nach einem variabeln Punkte, der den Kegelschnitt beschreibt, so entstehen dadurch zwei homographische Strahlenbüschel mit den beliebig auf dem Kegelschnitt angenommenen Centren.

Denn legen wir durch vier beliebig auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte die beiden Linienpaare $U_0 = 0$, $V_1 = 0$ und $U_1 = 0$, $V_0 = 0$, so können wir die Gleichung des Kegelschnittes auf die Form 2) bringen. Definiren wir hierauf eine neue Variable λ durch die Gleichung: $U_0 - \lambda\, U_1 = 0$, so löset sich die Gleichung 2) des gegebenen Kegelschnittes in die Gleichungen 1) auf, die zwei homographische Strahlenbüschel analytisch darstellen, deren Centra zwei von den vier auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte sind.

Die homogenen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes p des von den homographischen Strahlenbüscheln 1) erzeugten Kegelschnittes 2) erhält man durch Berechnung aus den beiden Gleichungen 1). Man bemerkt sogleich, dass dieselben von der quadratischen Form in λ sind:

$$5) \quad \begin{aligned} x &= a + b\lambda + c\lambda^2 \\ y &= a_1 + b_1\lambda + c_1\lambda^2 \\ z &= a_2 + b_2\lambda + c_2\lambda^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich nun die homogenen Coordinaten x, y, z aller Punkte des Kegelschnittes, wenn man für λ alle möglichen Werthe setzt.

Multipliciren wir die Gleichungen 5) der Reihe nach mit den variabeln Liniencoordinaten u, v, w und addiren, um die Gleichung des beliebigen Punktes p des Kegelschnittes zu bilden, so erhalten wir:

$$6) \quad W = A + B\lambda + C\lambda^2$$

wenn wir abkürzend setzen:

$$7) \quad \begin{aligned} W &= xu + yv + zw, \\ A &= au + a_1v + a_2w, \\ B &= bu + b_1v + b_2w, \\ C &= cu + c_1v + c_2w. \end{aligned}$$



Hiernach ist $W = 0$, oder nach 6):

$$8) \quad \ldots \ldots \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes 2).

Wenn wir in dieser Gleichung 8) die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ einzeln gleich 0 setzen, so erhalten wir die Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ von drei bestimmten Punkten, aus welchen Gleichungen durch Multiplication mit den verschiedenen Potenzen von λ und Addition wieder die Gleichung 8) eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes zusammengesetzt ist. Diese Bemerkung führt auf den Satz:

9) ... Wenn man die Gleichungen von irgend drei Punkten multiplicirt respective mit der 0ten, 1ten und 2ten Potenz einer variabeln Grösse λ und addirt, so erhält man die Gleichung eines beliebigen Punktes eines und desselben Kegelschnittes.

Es seien nämlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei Punkten. Die Gleichung 8) wird dann die nach dem Satze zusammengesetzte Gleichung eines Punktes sein, dessen Coordinaten durch Gleichungen von der Form 5) ausgedrückt werden. Diese Gleichungen 5) sind linear in Rücksicht auf die Potenzen λ^0, λ^1, λ^2, wenn man sich für a, a_1, a_2 gesetzt denkt $a\lambda^0$, $a_1\lambda^0$, $a_2\lambda^0$. Lösen wir die Gleichungen 5) dann nach λ^0, λ^1, λ^2 auf, so erhalten wir Gleichungen von der Form:

$$10) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} \lambda^0 &= A_0 x + A_1 y + A_2 z, \\ \lambda^1 &= B_0 x + B_1 y + B_2 z, \\ \lambda^2 &= C_0 x + C_1 y + C_2 z. \end{aligned}$$

Setzen wir endlich diese Werthe der Potenzen von λ in die identische Gleichung ein:

$$11) \quad \ldots \ldots \quad \lambda^0\lambda^2 - \lambda^1\lambda^1 = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung des Kegelschnittes, von dem ein beliebiger Punkt p durch die Punktgleichung 8) dargestellt ist, weil die Coordinaten des Punktes p der beschriebenen Gleichung 11) genügen.

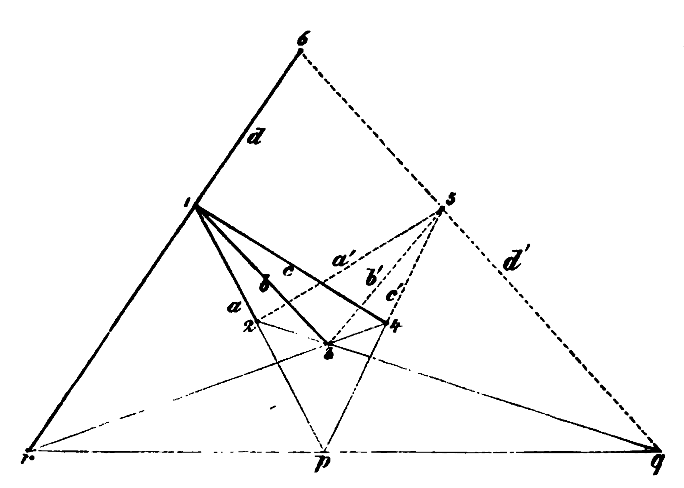
Es drücken in der That die Gleichungen 5) die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes eines Kegelschnittes aus, welche Werthe auch die neun Coefficienten a, b, c haben und durch Variation der neun Coefficienten erhält man alle möglichen Kegelschnitte.

Der oben angegebene Satz 4) von der Entstehung homographischer Strahlenbüschel durch einen Kegelschnitt in Verbindung mit dem Pascal'schen Satze, welcher lehrt alle Punkte eines Kegelschnitts linear zu construiren, von dem fünf Punkte gegeben sind, führt zu der Auflösung der Aufgabe:

12) ... Wenn drei Strahlen eines Strahlenbüschels und die entsprechenden Strahlen eines homographischen Strahlen-

büschels gegeben sind, die übrigen entsprechenden Strahlen der beiden Büschel lineare zu construiren.

Es seien von dem einen Strahlenbüschel mit dem Centrum 1 die Strahlen a, b, c gegeben, welchen homographisch entsprechen sollen die gegebenen Strahlen a', b', c' eines zweiten Strahlenbüschels mit dem Centrum 5. Der einem beliebigen Strahle d des ersten Strahlenbüschels entsprechende Strahl d' des zweiten Strahlenbüschels ist zu construiren.



Die drei gegebenen Strahlen des ersten Büschels schneiden die entsprechenden Strahlen des zweiten homographischen Strahlenbüschels in den Punkten 2, 3, 4. Durch die fünf Punkte 1 2 . . . 5 lässt sich nun ein Kegelschnitt legen, der von dem gegebenen Strahle d des ersten Strahlenbüschels in einem Punkte 6 geschnitten wird. Diesen Punkt 6 zu construiren wird die Aufgabe sein, denn der Strahl d' des zweiten Büschels, der die Punkte 6 und 5 verbindet, entspricht nach dem Satze 4) homographisch dem Strahle d des ersten Büschels.

Wir lösen nun die genannte Aufgabe, wenn wir den Schnittpunkt r der geraden Linie d und 3 4 durch eine gerade Linie verbinden mit dem Schnittpunkte p der Strahlen a und c'. Diese geraden Linien werden in q von der geraden Linie 2 3 geschnitten. Die Verbindungslinie d' von q und 5 schneidet nach dem Pascal'schen Satze den Strahl d in dem gesuchten Punkte 6. Sie wird deshalb der dem Strahle d entsprechende Strahl d' des zweiten homographischen Strahlenbüschels sein.

Wollte man die Aufgabe 12) dadurch lösen, dass man die gegebenen unvollständigen Strahlenbüschel in eine perspectivische Lage bringt, wie in der vorhergehenden Vorlesung angegeben worden ist, so würde diese Construktion keine lineare genannt werden können. Die Verlegung der Strahlenbüschel in der Ebene verlangt eben andere Hülfsmittel, als das Ziehen von geraden Linien durch gegebene Punkte.

Nach dem zu der vorgetragenen Construktion verwendeten Pacal'-schen Satze lässt sich geometrisch leicht ermitteln, ob sechs Punkte in einem Kegelschnitt liegen oder nicht; aber es ermangeln noch einfache Criterien für die Gleichungen von sechs Punkten, die in einem Kegelschnitt liegen. Solche Criterien im Anschlusse an das Vorhergehende festzustellen, wird der Zweck der folgenden Untersuchung sein.

Man hat gesehen, dass $W=0$ die Gleichung eines beliebigen Punktes, eines und desselben Kegelschnittes ist, wenn W definirt wird durch die Gleichung 6), die wir hier wiederholen:

13) $$W = A + B\lambda + C\lambda^2.$$

Hiernach werden irgend sechs Punkte 1, 2, ... 6 eines Kegelschnittes durch die Gleichungen ausgedrückt:

14) $$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad \ldots \quad W_6 = 0,$$

wenn wir unter W_1, W_2, ... W_6 die Ausdrücke verstehen:

15) $$\begin{aligned} W_1 &= A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2, \\ W_2 &= A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_6 &= A + B\lambda_6 + C\lambda_6^2, \end{aligned}$$

in welchen die sechs Grössen λ irgend welche sechs Werthe der Variable λ in 13) bedeuten.

Zwischen den angegebenen sechs Ausdrücken W existiren merkwürdige Relationen, die sich sehr einfach ergeben aus dem in der sechsten Vorlesung meiner Geometrie in der Ebene vorgetragenen algebraischen Satz 13).

„Wenn man mit π_1, π_2, ... π_6 die Produkte der Differenzen von „irgend sechs Grössen λ_1, λ_2, ... λ_6 bezeichnet:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \ldots (\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \ldots (\lambda_2 - \lambda_6), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) \ldots (\lambda_6 - \lambda_5), \end{aligned}$$

„wenn ferner $\varphi(\lambda)$ irgend eine ganze Function von λ des vierten Grades „ist, so hat man identisch:

16) $$\frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \ldots \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.\text{“}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\varphi(\lambda) = W^2$, so führt das zu dem Satze:

17) ... W e n n $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ d i e G l e i c h u n g e n v o n i r g e n d s e c h s P u n k t e n e i n e s K e g e l s c h n i t t e s sind, so lassen sich sechs Grössen π_1, π_2, ... π_6 der Art bestimmen, dass man identisch hat:

$$17) \quad \ldots\ldots \quad \frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

Während in 15) die sechs Ausdrücke W eine ganz bestimmte Form hatten, so wird dieses in dem angegebenen Satze nicht mehr verlangt. Welche Form die sechs Ausdrücke W auch haben, durch Multiplication mit geeigneten constanten Factoren lassen sie sich immer auf die Form 15) zurückführen. Die Quadrate dieser constanten Factoren sind in dem Satze mit den angegebenen Ausdrücken π verschmolzen. Deshalb haben auch auch die Ausdrücke π in dem Satze 17) nicht mehr die frühere Bedeutung der Produkte der Differenzen der sechs Grössen λ.

Wir wollen noch einen zweiten Beweis des Satzes 17), unabhängig von dem algebraischen Satze 16), folgen lassen, der zugleich die Umkehrung des Satzes vorbereitet.

Zu diesem Zwecke werden wir annehmen, dass $W_1=0$, $W_2=0$, ... $W_6=0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten 1, 2, ... 6 eines Kegelschnittes seien, deren homogene Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_3$ ... $x_6\, y_6\, z_6$ aus den Gleichungen nach bekannter Regel entnommen werden. Liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt:

$$a_{00}x^2 + 2\,a_{01}xy + \ldots a_{22}z^2 = 0,$$

so müssen die angegebenen Coordinaten den sechs Bedingungen genügen:

$$18) \quad \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} a_{00}x_1^2 + 2\,a_{01}x_1y_1 + \ldots a_{22}z_1^2 = 0, \\ a_{00}x_2^2 + 2\,a_{01}x_2y_2 + \ldots a_{22}z_2^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{00}x_6^2 + 2\,a_{01}x_6y_6 + \ldots a_{22}z_6^2 = 0. \end{array}$$

Es lassen sich nun sechs Grössen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ immer so bestimmen, dass fünf von den folgenden sechs Gleichungen erfüllt werden:

$$19) \quad \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{\pi_1} + \dfrac{x_2^2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{x_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{y_1^2}{\pi_1} + \dfrac{y_2^2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{y_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{z_1^2}{\pi_1} + \dfrac{z_2^2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{z_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{y_1z_1}{\pi_1} + \dfrac{y_2z_2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{y_6z_6}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{z_1x_1}{\pi_1} + \dfrac{y_2x_2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{z_6x_6}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{x_1y_1}{\pi_1} + \dfrac{x_2y_2}{\pi_2} + \ldots \dfrac{x_6y_6}{\pi_6} = 0. \end{array}$$

Dividirt man die vorhergehenden Gleichungen 18) der Reihe nach durch $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_6$ und addirt in vertikaler Richtung, so sieht man, dass

auch die sechste Gleichung des Systemes 19) erfüllt wird, wenn fünf derselben erfüllt werden.

Die Systeme Gleichungen 18) und 19) sind hiernach äquivalent. Indem sie auf einander zurückgeführt werden können, drückt jedes derselben, wenn man in dem ersten die sechs Coefficienten a und in dem anderen die sechs Grössen π unbestimmt lässt, nichts aus, als dass die sechs Punkte 1, 2, . . . 6 in einem Kegelschnitt liegen.

Multiplicirt man aber die Gleichungen 19) der Reihe nach mit u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$ und addirt wieder in vertikaler Richtung, so erhält man aus den Bedingungen 19) für die sechs Punkte 1, 2, . . . 6 eines Kegelschnitts die identische Gleichung 17), welche umgekehrt wieder in die sechs Bedingungsgleichungen 19) zerfällt.

Da die identische Gleichung 17) sich aber in die Bedingungsgleichungen 19) für die sechs Punkte eines Kegelschnittes auflöset, so ist damit zugleich der umgekehrte Satz 17) bewiesen:

20) . . . Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, . . . $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs Punkten sind und wenn die linken Theile dieser Gleichungen einer identischen Gleichung von der Form 17) genügen, so liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Die Gleichung 17) ist eine quadratische in den sechs Ausdrücken W, hervorgegangen aus der identischen Gleichung 16) durch die Substitution $\varphi(\lambda) = W^2$. Aus derselben identischen Gleichung 16) ergeben sich aber noch lineare identische Gleichungen in den sechs Ausdrücken W, wenn man für $\varphi(\lambda)$ nacheinander setzt:

$$W, \qquad \lambda W, \qquad \lambda^2 W$$

nämlich die Gleichungen:

$$21) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{1}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 &= 0. \end{aligned}$$

Verschmelzen wir wieder die Produkte π mit den ihnen entsprechenden Ausdrücken W, so können wir hiernach sagen:

22) . . . Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, . . . $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich immer sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen, dass die Gleichungen 21) identische werden.

Der Satz lässt sich auch umkehren wie folgt:

23) . . . Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, . . . $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs Punkten sind, und wenn sich sechs Grössen π und

sechs andere Grössen λ der Art bestimmen lassen, dass die Gleichungen 21) identische werden, so liegen die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Den Beweis des Satzes werden wir dadurch führen, dass wir unter Voraussetzung der Bedingungen 21) nachweisen, dass die sechs Punkte 1, 2, ... 6, um welche es sich handelt, die Ecken eines Pascal'schen Sechsecks bilden, dessen gegenüberliegende Seiten sich paarweise in drei Punkte p, q, r der vorhergehenden Figur schneiden, welche in einer geraden Linie liegen.

Durch Elimination von zwei Symbolen W aus den identischen Gleichungen 21) lassen sich andere identische Gleichungen bilden, welche nur vier von diesen Symbolen enthalten. Multipliciren wir, um W_5 und W_6 zu eliminiren, die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\lambda_5 \lambda_6, \quad -(\lambda_5 + \lambda_6), \quad 1$$

und addiren, so erhalten wir:

$$24) \ldots \quad (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2}$$
$$+ (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} = 0.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus 21) durch Elimination von W_3 und W_6 oder von W_1 und W_4 oder von W_2 und W_5 die identischen Gleichungen:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2}$$
$$+ (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0,$$
$$25) \ldots \quad (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3}$$
$$+ (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_1)\frac{W_5}{\pi_5} + (\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_1)\frac{W_6}{\pi_6} = 0,$$
$$(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4}$$
$$+ (\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2)\frac{W_6}{\pi_6} + (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{W_1}{\pi_1} = 0,$$

welche den Beweis liefern, dass folgende Gleichungen die drei Punkte p, q, r analytisch ausdrücken:

$$p) \ldots \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} = 0,$$
$$q) \ldots \quad (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} = 0,$$
$$r) \ldots \quad (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} = 0.$$

Multiplicirt man nun diese Punktgleichungen der Reihe nach mit:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_5), \quad (\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_5), \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)$$

und addirt, so erhält man die mit $(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)$ multiplicirte identische Gleichung 24). Da diese Gleichung aber eine identische ist, so liegen die drei Punkte p, q, r auf einer geraden Linie.

Es sei noch eines Systemes linearer identischer Gleichungen erwähnt, welches gleichfalls die Bedingungen für sechs Punkte eines Kegelschnitts ausdrückt:

$$26) \quad \begin{aligned} \frac{x_1}{\pi_1} W_1 + \frac{x_2}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{x_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{y_1}{\pi_1} W_1 + \frac{y_2}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{y_6}{\pi_6} W_6 &= 0, \\ \frac{z_1}{\pi_1} W_1 + \frac{z_2}{\pi_2} W_2 + \dots \frac{z_6}{\pi_6} W_6 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen componiren sich leicht aus den Gleichungen 19), können aber auch durch Differentiation nach den Variabeln u, v, w aus der identischen Gleichung 17) abgeleitet werden. In ihnen bedeuten $x_1, y_1, z_1, \dots$ die homogenen Coordinaten der sechs Punkte, die sich nach bekannter Regel aus ihren Gleichungen $W_1 = 0 \dots$ abnehmen lassen, und die π bedeuten sechs zu bestimmende Grössen.

Es wird Vortheil bringen, bei den identischen Gleichungen 17) und und 21), wie wir sie aus dem algebraischen Satze 16) abgeleitet haben, noch zu verweilen. Wir wiederholen deshalb die Bedeutung der sechs Grössen π in ihnen als die angegebenen Produkte der Differenzen der sechs willkürlichen Grössen λ, der sechs Ausdrücke W in 15) und der drei Ausdrücke A, B, C in 7). Wir nannten die Gleichungen 17) und 21) identische, und verstanden darunter, dass sie für alle Werthe der Variabeln u, v, w erfüllt werden.

Diese Gleichungen 17) und 21) bleiben identische, wenn man für die Variabeln u, v, w nach 17): $A = au + a_1 v + a_2 w$, $B = bu + b_1 v + b_2 w$, $C = cu + c_1 v + c_2 w$ die Variabeln A, B, C einführt. In dieser Form verificiren sie sich sogleich durch den algebraischen Satz 16) und können eben so leicht auf einander zurückgeführt werden. Die identische Gleichung 17) zerfällt nämlich nach Einführung der neuen Variabeln A, B, C in sechs Gleichungen, aus deren Composition sich die identischen Gleichungen 21) ergaben und die Gleichung 17) geht umgekehrt aus den Gleichungen 21) hervor durch Multiplication respective mit A, B, C und Addition. Durch Differentiation der identischen Gleichung 17) nach den neuen Variabeln werden ebenfalls die Gleichungen 21) erhalten.

Die Gleichungen 17) und 21) bleiben auch identische Gleichungen,

wenn man für die unabhänigen Variabeln A, B, C die Variabeln W_1, W_3, W_5 einführt durch die aus 15) entnommenen Gleichungen:

27) ... $W_1 = A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2$, $W_3 = A + B\lambda_3 + C\lambda_3^2$, $W_5 = A + B\lambda_5 + C\lambda_5^2$.

Betrachten wir nun die Variabeln W_1, W_3, W_5 als die unabhängigen Variabeln, so sind durch die Gleichungen 21) die Variabeln W_2, W_4, W_6 gegebene lineare Functionen der unabhängigen Variabeln W_1, W_3, W_5, welche in die Gleichung 17) eingesetzt diese zu einer identischen machen. Wenn wir demnach die Bedeutung der sechs Grössen π als die Produkte der Differenzen der sechs willkürlichen Constanten festhalten, so können wir allgemein sagen:

28) ... Wenn irgend 6 Variabele W_1, W_2, ... W_6 durch drei lineare Gleichungen von der Form 21) mit einander verbunden sind, so sind dadurch drei von den Variabeln als Functionen der drei anderen der Art bestimmt, dass sie in die Gleichung 17) eingesetzt diese Gleichung zu einer identischen machen.

Da die Gleichungen 21) linear sind, die Gleichung 17) aber aus den Quadraten der Variabeln zusammengesetzt, so erinnert der angegebene Satz an das Problem der Raumgeometrie, der Transformation der rechtwinkligen Coordinaten, welches algebraisch ausgedrückt verlangt: Die Substitutionen für drei abhängige Variabeln als lineare Ausdrücke von drei unabhängigen Variabeln zu bestimmen, welche die Summe der Quadrate der drei abhängigen Variabeln in die Summe der Quadrate der drei unabhängigen Variabeln transformiren.

Hier liegt ein ähnlicher Fall vor, der einzige Unterschied ist der, dass die Quadrate der Variabeln in 17) noch ganz bestimmte Coefficienten haben. Da sich aber der genannte Unterschied durch geeignete Substitutionen beseitigen lässt, so sind wir in der Lage, jenes Raumproblem algebraisch zu behandeln ohne weitere Raumbetrachtungen herbeizuziehen.

Wir führen zu diesem Zwecke an Stelle der unabhängigen Variabeln W_1, W_3, W_5 die unabhängigen Variabeln x, y, z ein und an Stelle der abhängigen Variabeln W_2, W_4, W_6 die abhängigen Variabeln X, Y, Z, indem wir setzen:

$$29) \quad \begin{aligned} W_1 &= i\sqrt{\pi_1}\,.\,x, & W_2 &= \sqrt{\pi_2}\,.\,X, \\ W_3 &= i\sqrt{\pi_3}\,.\,y, & W_4 &= \sqrt{\pi_4}\,.\,Y, \\ W_5 &= i\sqrt{\pi_5}\,.\,z, & W_6 &= \sqrt{\pi_6}\,.\,Z. \end{aligned}$$

Dadurch geht die identische Gleichung 17) über in:

$$30) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die Gleichungen 21) in:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi_2}} X + \frac{1}{\sqrt{\pi_4}} Y + \frac{1}{\sqrt{\pi_6}} Z = \frac{1}{i\sqrt{\pi_1}} x + \frac{1}{i\sqrt{\pi_3}} y + \frac{1}{i\sqrt{\pi_5}} z,$$

$$31) \ldots \frac{\lambda_2}{\sqrt{\pi_2}} X + \frac{\lambda_4}{\sqrt{\pi_4}} Y + \frac{\lambda_6}{\sqrt{\pi_6}} Z = \frac{\lambda_1}{i\sqrt{\pi_1}} x + \frac{\lambda_3}{i\sqrt{\pi_3}} y + \frac{\lambda_5}{i\sqrt{\pi_5}} z,$$

$$\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\pi_2}} X + \frac{\lambda_4^2}{\sqrt{\pi_4}} Y + \frac{\lambda_6^2}{\sqrt{\pi_6}} Z = \frac{\lambda_1^2}{i\sqrt{\pi_1}} x + \frac{\lambda_3^2}{i\sqrt{\pi_3}} y + \frac{\lambda_5^2}{i\sqrt{\pi_5}} z,$$

und der Satz 28) lässt sich nunmehr so ausdrücken:

32) ... **Die Gleichungen 31) bestimmen die Substitutionen von drei abhängigen Variabeln X, Y, Z als lineare Functionen der drei unabhängigen Variabeln x, y, z, durch welche die Summe der Quadrate der drei abhängigen Variabeln übergeführt wird in die Summe der Quadrate der drei unabhängigen Variabeln.**

Um die Substitutionen durch Elimination zu erhalten, multipliciren wir die Gleichungen 31) der Reihe nach mit:

$$\begin{array}{lll} \lambda_4\lambda_6, & -(\lambda_4+\lambda_6), & 1, \\ \lambda_6\lambda_2, & -(\lambda_6+\lambda_2), & 1, \\ \lambda_2\lambda_4, & -(\lambda_2+\lambda_4), & 1, \end{array}$$

und addiren. Dadurch erhalten wir die Substitutionen selbst:

$$33) \quad \ldots \ldots \quad \begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

indem wir haben:

$$a = \frac{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_1}}, \qquad b = \frac{(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_3}}$$

$$a' = \frac{(\lambda_1-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_1}}, \qquad b' = \frac{(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_3}}$$

$$34) \quad a'' = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_1}}, \qquad b'' = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_3}}$$

$$c = \frac{(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_6)}{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_6)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_2}}{i\sqrt{\pi_5}},$$

$$c' = \frac{(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_2)}{(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_2)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_4}}{i\sqrt{\pi_5}},$$

$$c'' = \frac{(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_4)}{(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_4)} \cdot \frac{\sqrt{\pi_6}}{i\sqrt{\pi_5}}.$$

Diesen Ausdrücken der neun Coefficienten in den Substitutionen geben wir noch eine andere Gestalt, indem wir für $\sqrt{\pi_1}, \ldots \sqrt{\pi_6}$ respective setzen $\frac{\pi_1}{\sqrt{\pi_1}}, \ldots \frac{\pi_6}{\sqrt{\pi_6}}$ und den von den Quadratwurzelzeichen

freien Grössen π ihre Werthe zuertheilen:

$$
35)\quad
\begin{aligned}
a &= \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_2}}, & b &= \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_2}}\\
a' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_4}}, & b' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_4}}\\
a'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_1}}{\sqrt{\pi_6}}, & b'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_5)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_5)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_3}}{\sqrt{\pi_6}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_2}},\\
c' &= \frac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_4}},\\
c'' &= \frac{(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_3)}{(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_3)}\cdot\frac{i\sqrt{\pi_5}}{\sqrt{\pi_6}}.
\end{aligned}
$$

Was die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_1}, \ldots \sqrt{\pi_6}$ anbetrifft, welche in die eben gegebenen Ausdrücke der neun Coefficienten eingehen, so können dieselben ganz willkürlich genommen werden. Bemerken wir aber, dass sämmtliche Variationen, die in den Substitutionen 33) durch die Veränderung der Vorzeichen der sechs Quadratwurzelgrössen hervorgehen, auch dadurch zu Wege gebracht werden können, dass man einer oder mehreren der sechs Variabeln die entgegengesetzten Vorzeichen zuertheilt, so können wir von diesen Variationen absehen und annehmen, dass sämmtliche Quadratwurzelgrössen das positive Vorzeichen haben.

Wir haben nun zwar die Substitutionen 33) bestimmt, welche die Gleichung 30) zu einer identischen machen, es erhebt sich aber die Frage, ob die angegebenen 33), welche wir von den sechs willkürlichen Grössen λ abhängig gemacht haben, auch die allgemeinsten seien.

Zur Beantwortung der Frage gehen wir auf die Bedingungsgleichungen zwischen den neun Coefficienten in den Substitutionen näher ein, in welche die identische Gleichung 30) nach den Substitutionen 33) sich auflöset:

$$
36)\quad
\begin{aligned}
a^2+a'^2+a''^2 &= 1, & bc+b'c'+b''c'' &= 0,\\
b^2+b'^2+b''^2 &= 1, & ca+c'a'+c''a'' &= 0,\\
c^2+c'^2+c''^2 &= 1, & ab+a'b'+a''b'' &= 0.
\end{aligned}
$$

Dass die Werthe 35) der Coefficienten in diese Gleichungen 36) eingesetzt denselben genügen, geht einfach daraus hervor, dass durch die Substitutionen 35) in 36) ganz dieselben Gleichungen erhalten werden, welche sich ergaben, wenn man in der identischen Gleichung für $\varphi(\lambda)$ nach einander setzt:

$$
\begin{gathered}
(\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_5)^2, \qquad (\lambda-\lambda_5)^2(\lambda-\lambda_1)^2, \qquad (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)^2,\\
(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_5), \quad (\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_5)(\lambda-\lambda_1), \quad (\lambda-\lambda_5)^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3).
\end{gathered}
$$

Es ist dieses nur ein Beweis a posteriori, dass die Substitutionen 33) mit den Werthen 35) der Coefficienten die Gleichung 30) zu einer identischen machen.

Aus den sechs Bedingungsgleichungen 36) zwischen den neun Coefficienten in den Substitutionen 33) lassen sich nur sechs Coefficienten fest bestimmen. Drei von ihnen können beliebig angenommen werden. Daraus folgt, dass die 9 Coefficienten in den Substitutionen 33), welche die Gleichung 30) zu einer identischen machen, sich durch nur drei Constanten ausdrücken lassen. Wir haben aber jene neun Coefficienten durch sechs willkürliche Constanten ausgedrückt. Das ist ein Paradoxon. Wir werden dasselbe dadurch lösen, dass wir zeigen, wie die sechs willkürlichen Grössen λ in den Coefficienten 34) oder 35) doch nur die Stelle von drei willkürlichen Grössen vertreten, die, wie es sein soll, in die Coefficienten eingehen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die Ausdrücke 34) oder 35) der neun Coefficienten ungeändert bleiben, wenn man erstens für alle $\lambda_\varkappa$ setzt $\alpha\lambda_\varkappa$, zweitens für alle $\lambda_\varkappa$ setzt $\lambda_\varkappa - \beta$ und drittens für alle $\lambda_\varkappa$ setzt $\frac{1}{\lambda_\varkappa}$. Wenn wir diese Substitutionen in eine vereinigen, so können wir sagen: die neun Coefficienten 34) oder 35) der sechs Variabeln $\lambda_\varkappa$ bleiben dieselben Functionen der sechs Variabeln $\mu_\varkappa$, wenn man setzt:

$$37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda_\varkappa = \frac{\alpha\mu_\varkappa + \beta}{\mu_\varkappa + \gamma},$$

also unabhängig von α, β, γ, wovon man sich auch direkt leicht überzeugen kann.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass, wenn man in den eben angegebenen Ausdrücken 34) oder 35) der neun Coefficienten irgend welchen drei Variabeln λ gegebene Werthe zuertheilt, die drei anderen aber beliebig variiren lässt, die neun Coefficienten alle Werthe annehmen, welche sie durch Variation sämmtlicher Variabeln λ erhalten würden.

Denn es sei C der Ausdruck irgend eines der neun Coefficienten und (C) der Ausdruck, in welchen C durch die Substitutionen 37) übergeht. Es ist (C) also dieselbe Function der sechs Variabeln $\mu_\varkappa$ als C der Variabeln $\lambda_\varkappa$, welche Werthe auch α, β, γ haben. Haben nun die sechs Variabeln $\lambda_\varkappa$ irgend welche Werthe, so kann man, da es freisteht über die Constanten α, β, γ beliebig zu verfügen, denselben solche Werthe zuertheilen, dass drei von den sechs Variabeln $\mu_\varkappa$ auf Grund der sechs Gleichungen 37) gegebene Werthe erhalten. Da aber $C = (C)$ ist, so haben wir auf der einen Seite irgend welche Werthe der Variabeln, auf der anderen Seite gegebene Werthe von drei Variabeln.

Die Ausdrücke 34) oder 35) der neun Coefficienten hängen demnach nur von drei Grössen ab, die ganz willkürlich bleiben und die

Substitutionen 33) sind deshalb die allgemeinsten, welche die Gleichung 30) zu einer identischen Gleichung machen.

---

*) Die Substitutionen 33) mit den in 34) oder 35) angegebenen Werthen der neun Coefficienten, abhängig gemacht von nur drei beliebigen Grössen, sind bekanntlich die Transformationsformeln für rechtwinklige Raumcoordinaten. Sie haben weder die Form der Euler'schen noch der Monge'schen Transformationsformeln. Sie stehen vielmehr in einer geometrischen Verbindung mit den confocalen Oberflächen und dadurch mit den elliptischen Coordinaten. Diese Verbindung darzulegen, ist der Zweck der Anmerkung.

Es ist aus meiner Vorlesung über Raumgeometrie, welche von den confocalen Oberflächen und den elliptischen Coordinaten handelt, bekannt, dass die confocalen Oberflächen sich durch eine einzige Gleichung mit dem willkürlichen Parameter λ ausdrücken lassen:

$$\frac{x^2}{\lambda_1-\lambda}+\frac{y^2}{\lambda_3-\lambda}+\frac{z^2}{\lambda_5-\lambda}-1=0.$$

Wenn wir annehmen, dass $\lambda_1>\lambda_3>\lambda_5$, so stellt die angegebene Gleichung Oberflächen verschiedener Gattung dar:

Ellipsoide, wenn $\lambda=\lambda_2$ zwischen $-\infty$ und λ_5
einfache Hyperboloide, wenn $\lambda=\lambda_4$ zwischen λ_5 und λ_3
zweifache Hyperboloide, wenn $\lambda=\lambda_6$ zwischen λ_3 und λ_1.

Es ist ferner aus der citirten Vorlesung bekannt, dass alle Oberflächen derselben Gattung den ganzen unendlichen Raum erfüllen, dass aber keine zwei Oberflächen derselben Gattung sich schneiden. Dagegen schneiden sich je zwei Oberflächen verschiedener Gattung immer in reellen Punkten und zwar senkrecht.

Nehmen wir also drei confocale Oberflächen verschiedener Gattung mit den Parametern λ_2, λ_4, λ_6, so schneiden sich dieselben in 8 Punkten, und wenn wir die Coordinaten eines dieser Schnittpunkte bezeichnen mit x', y', z', so werden dieselben bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_2}-1=0,$$
$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_4}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_4}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_4}-1=0,$$
$$\frac{x'^2}{\lambda_1-\lambda_6}+\frac{y'^2}{\lambda_3-\lambda_6}+\frac{z'^2}{\lambda_5-\lambda_6}-1=0.$$

Die Tangentenebenen der drei Oberflächen in dem Schnittpunkte stehen auf einander senkrecht gleich wie die drei ihnen parallelen Ebenen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen:

$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_2}=0,$$
$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_4}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_4}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_4}=0,$$
$$\frac{x'x}{\lambda_1-\lambda_6}+\frac{y'y}{\lambda_3-\lambda_6}+\frac{z'z}{\lambda_5-\lambda_6}=0.$$

Diese Ebenen sind nun die Coordinatenebenen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ des zweiten durch 33) bestimmten rechtwinkligen Coordinatensystems.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Gesagten, wenn man nach Vorschrift der citirten Stelle die Coordinaten x', y', z' des Schnittpunktes berechnet und in die drei letzten Gleichungen einsetzt.

Wie wir am Anfange der gegenwärtigen Vorlesung Kegelschnitte durch homographische Strahlenbüschel haben entstehen sehen, so lassen sich dem analog Kegelschnitte auch durch homographische Punktesysteme erzeugen. Die Analogie der sich daran knüpfenden Untersuchungen ist so vollständig, dass sie nach Verwechselung der Punktcoordinaten mit Liniencoordinaten einer Wiederholung der vorhergehenden Untersuchungen gleich kommen. Es werden darum nach der angegebenen Verwechselung die vorgeführten analytischen Formeln ausreichen und wir werden die sich ergebenden analogen Sätze mit gleichen Zahlen, aber in doppelten Klammern, bezeichnen.

Nach der ersten Vorlesung stellen die Gleichungen 1) der zweiten Vorlesung irgend zwei entsprechende Punkte homographischer Punktesysteme dar, wenn $U_0 = 0$, $V_0 = 0$ und $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ die Gleichungen sind von zwei Paaren entsprechender Punkte.

In dieser Voraussetzung kommen die Werthe der Liniencoordinaten, welche beiden Gleichungen 1) zugleich genügen, derjenigen geraden Linie zu, welche die beiden Punkte 1) verbindet. Die Coordinaten dieser, zugleich mit λ variabeln geraden Linie genügen der aus der Elimination von λ hervorgegangenen Gleichung 2) eines Kegelschnittes in Liniencoordinaten. Sie ist deshalb Tangente des Kegelschnittes 2).

Die beiden geraden Linien, auf welchen die homographischen Punktesysteme liegen, sind selbst Tangenten des Kegelschnittes 2), weil die Gleichung 2) erfüllt wird sowohl für $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ als für $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$. Da sich aber die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnittes in Liniencoordinaten auf die Form 2) zurückführen lässt, so haben wir den mit 3) analogen Satz:

(3) . . . Wenn man je zwei entsprechende Punkte von zwei homographischen Punktesystemen durch gerade Linien verbindet, so sind die Verbindungslinien Tangenten eines und desselben Kegelschnittes, der von den beiden geraden Linien berührt wird, auf welchen die homographischen Punktesysteme liegen.

Da man die Gleichung eines jeden Kegelschnittes in Liniencoordinaten immer auf die Form 2) zurückführen kann, in welcher $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ und $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ die Gleichungen der gegenüberliegenden Ecken eines beliebigen, dem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierecks bedeuten, und da mit Einführung der neuen Variable λ die eine Gleichung 2) in die beiden Gleichungen 1) zerfällt, so ist es erlaubt den Satz umzukehren, wie folgt:

(4) . . . Alle Tangenten eines Kegelschnittes theilen zwei beliebige unter ihnen homographisch.

Wenn wir unter x, y, z, wie diese Variabeln ursprünglich in die Gleichungen 1) eingehen, Liniencoordinaten verstehen, so erhalten wir

durch Auflösung der Gleichungen die homogenen Coordinaten x, y, z der Tangente des durch Liniencoordinaten ausgedrückten Kegelschnittes 2) in der Form 5). Bezeichnen wir ferner mit u, v, w variable Punktcoordinaten, so wird 8) auf Grund von 6) und 7) die Gleichung der genannten Tangente sein; was wir allgemeiner so ausdrücken:

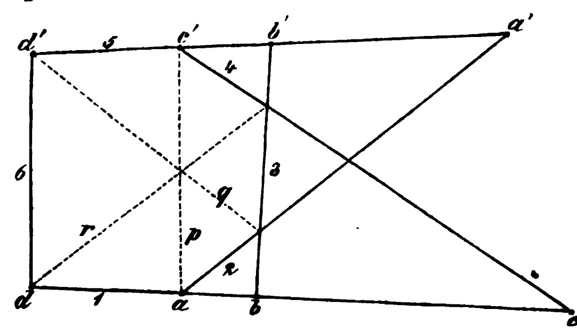
(9) ... Wenn man die Gleichungen von irgend drei geraden Linien multiplicirt respective mit der 0ten, 1ten und 2ten Potenz einer variabeln Grösse λ und addirt, so erhält man die Gleichung einer beliebigen Tangente eines und desselben Kegelschnittes.

Dass die Gleichungen der drei geraden Linien $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, aus welchen die Gleichung 8) der Tangente zusammengesetzt ist, beliebig gewählt werden können, erhellet aus den Gleichungen 10) und 11), von welchen die letztere den Kegelschnitt in Liniencoordinaten x, y, z darstellt, welcher von der Tangente 8) berührt wird.

Der Satz (4) in Verbindung mit dem Brianchon'schen Satze, dass jedes Sechseck einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, dessen Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, sich in einem und demselben Punkte schneiden, führt zu der Lösung der folgenden Aufgabe:

(12) ... Wenn von zwei homographischen Punktesystemen auf zwei geraden Linien drei Punkte des einen Systemes und die drei entsprechenden Punkte des anderen Systemes gegeben sind, die übrigen entsprechenden Punkte der beiden Systeme linear zu construiren.

Es seien von dem einen Punktesysteme auf der geraden Linie 1 die Punkte a, b, c gegeben und von dem anderen auf der geraden Linie 5 die ihnen homographisch entsprechenden Punkte a', b', c'. Es handelt sich darum, den Punkt d' des zweiten Systemes zu construiren, welcher einem beliebig gegebenen Punkte d des ersten Systemes entspricht.



Die Verbindungslinien 2, 3, 4 der gegebenen entsprechenden Punkte und die geraden Linien 1 und 5 bestimmen als Tangenten einen Kegelschnitt. Die Tangente 6 desselben, welche durch den gegebenen Punkt d geht, hat man zu suchen, denn sie bestimmt den gesuchten Punkt d'.

Zu diesem Zwecke ziehen wir die gerade Linie r, welche den Punkt d mit dem Schnittpunkte von 3 und 4 verbindet, und fixiren auf ihr den Punkt, in welchem sie von der geraden Linie ac' oder p getroffen wird. Verbinden wir den fixirten Punkt mit dem Schnittpunkte der geraden Linien 2 und 3 durch eine gerade Linie q, so trifft dieselbe die gerade Linie 5 in dem gesuchten Punkte d'. Denn dd' ist nach dem Brianchon'schen Satze die sechste Tangente des Kegelschnittes.

Man wird in dem Vorhergehenden zur Genüge gesehen haben, wie durch Vertauschung der Punktcoordinaten mit den Liniencoordinaten dieselben analytischen Formeln doppelt interpretirt werden können. Wenn wir in der angegebenen Richtung mit der Interpretation fortfahren, so ergeben sich daraus die Sätze:

(17) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich sechs Grössen π_1, π_2, ... π_6 der Art bestimmen, dass man identisch hat 17).

(20) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs geraden Linien sind, und wenn die linken Theile dieser Gleichungen einer identischen Gleichung von der Form 17) genügen, so berühren die sechs geraden Linien einen Kegelschnitt.

(22) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes sind, so lassen sich immer sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen, dass die Gleichungen 21) identische werden.

(23) ... Wenn $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, ... $W_6 = 0$ die Gleichungen von sechs geraden Linien sind, und wenn sich sechs Grössen π und sechs andere Grössen λ der Art bestimmen lassen, dass die Gleichungen 21) identisch werden, so berühren die sechs geraden Linien einen Kegelschnitt.

Dritte Vorlesung.

Erweiterung der Homographie.

Die in den vorhergehenden beiden Vorlesungen entwickelten Sätze paaren sich, indem jedes Paar hervorging aus einer doppelten geometrischen Interpretation derselben analytischen Formeln mit Vertauschung der Punktecoordinaten und Liniencoordinaten.

Ist demnach einer dieser Sätze bekannt, so kann man immer zu dem ihm entsprechenden Satze dadurch gelangen, dass man die analy-

tischen Formeln aufstellt, durch welche er bewiesen wird und diese Formeln nach der bekannten Vertauschung wieder geometrisch deutet. Das ist aber ein sehr beschwerlicher Weg, um von einem gegebenen Satze zu dem ihm entsprechenden zu gelangen. Die Geometrie ersetzt deshalb die vermittelnden Formeln durch Uebertragungsprinzipe, nach welchen man aus einem gegebenen Satze den ihm entsprechenden unmittelbar ableiten kann. In unserem Falle ist das Prinzip das bekannte Reciprocitätsgesetz.

Die Uebertragungsprinzipe haben in der Geometrie eine viel grössere Bedeutung als einzelne Sätze. Denn jedes derselben führt die Zahl der Sätze in dem Umfange, in welchem es gilt, auf die Hälfte zurück; so dass man nur die eine Hälfte der Sätze und das Uebertragungsprinzip zu kennen braucht, um das ganze Feld zu beherrschen. Ueberlegen wir darum, wo man erfahrungsgemäss Uebertragungsprinzipe zu suchen hat?

Wenn wir zu diesem Zwecke aus unseren Vorlesungen irgend zwei einander entsprechende Sätze hervorheben, so sehen wir sie auf der einen Seite mit einander verbunden durch dieselben analytischen Formeln, auf der anderen Seite durch das Reciprocitätsgesetz. Irgend zwei andere entsprechende Sätze hängen auf der einen Seite von denselben, aber von den vorhergehenden verschiedenen Formeln ab, auf der anderen Seite wieder von dem Reciprocitätsgesetz. Das Reciprocitätsgesetz bleibt von einem Sätzepaare zum anderen das gleiche, die beweisenden Formeln ändern sich. Bei Sätzepaaren, die durch ein anderes Uebertragungsprincip mit einander verbunden sind, können wir dieselbe Wahrnehmung machen, dass man jedes Paar aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen lassen kann, aus Formeln, welche sich von einem Sätzepaar zum anderen ändern.

Dieses soll uns zu dem Schlusse berechtigen, dass überall, wo zwei geometrische Sätze aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen, sich ein Uebertragungsprinzip werde entdecken lassen, welches die beweisenden Formeln auch in einer grösseren Zahl von Fällen ersetzt.

Wir werden unsere Ansicht an einem Beispiele entwickeln. — Zu diesem Zwecke stellen wir den Pascal'schen Satz mit einem bekannten anderen Satze zusammen, hergenommen aus der sechsten Vorlesung über die Involution.

Die gegenüberliegenden Seiten 12, 45 und 23, 56 und 34, 61 eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseckes 12 ... 6 schneiden sich in drei Punkten p, q, r,

Wenn irgend sechs Punkte 12 ... 6 auf einer geraden Linie liegen, so giebt es ein Punktepaar $\alpha\beta$, welches gleichzeitig mit den beiden Punktepaaren 12, 45 mit den

welche auf einer geraden Linie liegen.

beiden Punktepaaren 23, 56 und mit den beiden Punktepaaren 34, 61 eine Involution bildet.

Diese Sätze sind nicht durch das Reciprocitätsgesetz mit einander verbunden, denn nach diesem Gesetze entspricht der Pascal'sche Satz dem Brianchon'schen. Dennoch sind sie mit einander verwandt. Den sechs auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Sechsecks entsprechen sechs Punkte auf einer geraden Linie und der Pascal'schen geraden Linie entspricht ein Punktepaar. Schon diese Verwandtschaft lässt vermuthen, dass die beiden Sätze durch ein Uebertragungsprinzip von einander abhängig gemacht werden können. Wir werden aber unsere Vermuthung noch dadurch bestätigen, dass wir beide Sätze aus verschiedener Interpretation derselben analytischen Formeln hervorgehen lassen.

Wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei Punkten sind, und wir setzen:

$$W = A + B\lambda + C\lambda^2$$

so stellt nach 9) der vorhergehenden Vorlesung $W = 0$ irgend einen Punkt eines und desselben Kegelschnittes dar. Daraus ergeben sich nun die Gleichungen: $W_1 = 0$, $W_2 = 0 \ldots W_6 = 0$ von irgend sechs Punkten $1\ 2 \ldots 6$ des Kegelschnittes, wenn man für λ setzt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$, und man hat identisch 26)

$$\frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0$$

$$\frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0$$

$$\frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0$$

Gleichungen, welche aus der identischen Gleichung 16) hervorgingen, indem man für $\varphi(\lambda)$ setzte W oder λW oder $\lambda^2 W$.

Aus diesen Gleichungen setzt sich nun durch Multiplication mit $\lambda_3 \lambda_6$, $-(\lambda_3 + \lambda_6)$, 1 und Addition die ebenfalls identische Gleichung zusammen:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}$$
$$+ (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0,$$

welche beweiset, dass:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} = 0$$

die Gleichung des Punktes p ist, in welchem sich die gegenüberliegenden Seiten 12, 45 des Sechsecks $1\ 2 \ldots 6$ schneiden.

Um dieser Punktgleichung eine passendere Form zu geben, zerlegen wir den oben angegebenen, in λ quadratischen Ausdruck für W in seine Factoren:

$$W = C\,(\lambda - \alpha)\,(\lambda - \beta)$$

wo wir uns unter α und β allerdings irrationale Ausdrücke der Liniencoordinaten u, v, w vorzustellen haben. Mit Einführung dieses Produktes von W in die Punktgleichung und unter Berücksichtigung der Werthe von π_1 und π_2 nimmt die Gleichung des Punktes p eine Gestalt an, welche an die Bedingungsgleichung der Involution erinnert:

$$(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\alpha)(\lambda_1-\beta)-(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_2-\alpha)(\lambda_2-\beta)=0.$$

Denn in der That ist der linke Theil dieser Punktgleichung einer von den sieben Ausdrücken, deren Identität wir in der sechsten Vorlesung zur Involution nachgewiesen haben. Wir können daher die Gleichung des Punktes p auch so darstellen:

$$(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_4)(\beta-\lambda_5)-(\alpha-\lambda_4)(\alpha-\lambda_5)(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)=0.$$

Die Irrationalität in dem linken Theile dieser Punktgleichung ist nur scheinbar, denn er lässt sich durch $\alpha - \beta$ ohne Rest dividiren, weil er eine alternirende Function der Grössen α und β ist und der Quotient wird eine symmetrische Function der beiden Wurzeln α und β, welche sich rational durch die Coefficienten in der Gleichung ausdrücken lässt, deren Wurzeln α und β sind.

Durch cyclische Vertauschung der sechs Grössen λ erhält man nun aus der letzten Gleichung folgende, in einander übergehende, Gleichungen, welche die Punkte p, q, r darstellen:

$$(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_4)(\beta-\lambda_5)-(\alpha-\lambda_4)(\alpha-\lambda_5)(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)=0,$$
$$(\alpha-\lambda_2)(\alpha-\lambda_3)(\beta-\lambda_5)(\beta-\lambda_6)-(\alpha-\lambda_5)(\alpha-\lambda_6)(\beta-\lambda_2)(\beta-\lambda_3)=0,$$
$$(\alpha-\lambda_3)(\alpha-\lambda_4)(\beta-\lambda_6)(\beta-\lambda_1)-(\alpha-\lambda_6)(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_3)(\beta-\lambda_4)=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren:

$$(\alpha-\lambda_3)(\beta-\lambda_6) \qquad -(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_4) \qquad (\alpha-\lambda_5)(\beta-\lambda_2)$$

und addirt, so sieht man ohne die Produkte zu entwickeln, dass die Summe identisch 0 wird. Daraus schliessen wir, dass, wenn von den genannten Gleichungen zwei erfüllt werden, die dritte auch erfüllt wird. Denn die Annahme, dass der Factor der dritten Gleichung verschwinde, führt zu Widersprüchen in den beiden anderen Gleichungen.

Die Coordinaten u, v, w der geraden Linie, welche zwei von den drei Punkten p, q, r verbindet, genügen nun den diesen Punkten entsprechenden Gleichungen. Dass dieselben auch der dritten Gleichung genügen, beweiset eben den Pascal'schen Satz.

Dieselben drei Gleichungen beweisen zugleich den Satz, den wir neben den Pascal'schen Satz gestellt haben, wenn wir unter α und β

Grössen verstehen, die durch zwei von jenen Gleichungen bestimmt sind und demnach der dritten genügen.

Denn wenn $V_0 = 0$ und $V_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte bedeuten, so ist $V_0 - \lambda V_1 = 0$ die Gleichung eines beliebigen Punktes auf der Verbindungslinie der beiden Punkte. Daraus leiten wir nun die Gleichungen von irgend sechs Punkten 1, 2 ... 6 auf der geraden Linie ab, indem wir für λ nach einander setzen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$, und die Gleichungen von noch zwei Punkten α, β, indem wir unter λ die Werthe von α und β, bestimmt durch zwei von obigen drei Gleichungen, verstehen. In dieser Auffassung drücken die drei Gleichungen aber die Bedingungen der Involutionen zwischen den 8 Punkten auf der geraden Linie aus, wie sie der zu beweisende, dem Pascal'schen beigeordnete, Satz verlangt.

Nachdem wir die beiden hervorgehobenen Sätze aus derselben analytischen Quelle abgeleitet haben, bleibt noch übrig, das geometrische Band zwischen ihnen aufzusuchen, ein Band, welches ein Punktesystem auf einer geraden Linie und ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt vereiniget. Dazu wird die folgende Erweiterung der Homographie dienen.

Unsere erste Vorlesung beschäftigte sich nur mit homographischen Strahlenbüscheln und Punktesystemen auf geraden Linien und deren Eigenschaften. Am Anfange der zweiten Vorlesung sahen wir alle Punkte eines und desselben Kegelschnittes entstehen durch den Schnitt entsprechender Strahlen irgend zweier homographischen Strahlenbüschel. Lassen wir nun einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes entsprechen demjenigen Strahle des einen Büschels, auf welchem er liegt, so haben wir eine Verbindung aller Punkte eines Kegelschnittes mit allen Strahlen eines und desselben Strahlenbüschels. Erinnern wir uns ferner an die Sätze 3) und 4), so drängt sich uns von selbst die Definition auf:

Jeder Strahlenbüschel, dessen Centrum in der Peripherie eines Kegelschnittes liegt, theilt den Kegelschnitt homographisch.

Nach dieser Definition entspricht jeder Punkt des Kegelschnittes homographisch dem Strahle des Büschels, der durch ihn geht und umgekehrt. Die Lage der beiden homographischen Gebilde heisse die perspectivische Lage, weil jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes geht und jeder Punkt des Kegelschnittes auf dem ihm entsprechenden Strahle des Büschels liegt. Wir drücken dasselbe nur anders aus, wenn wir mit Rücksicht auf 3) und 4) sagen:

1) ... Jede zwei homographische Strahlenbüschel theilen den Kegelschnitt homographisch, welchen die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen beschreiben.

Der den Kegelschnitt homographisch theilende Strahlenbüschel mag aus seiner perspectivischen Lage, in welcher sein Centrum in der Peripherie des Kegelschnittes liegt, herausgenommen und beliebig in der Ebene verlegt werden; auch in dieser schiefen Lage werden wir ihn homographisch nennen mit dem Punktesystem auf dem Kegelschnitt, den er vorher homographisch theilte. Aber auch jeder andere Strahlenbüschel soll homographisch heissen mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt, welcher homographisch ist mit dem aus der perspectivischen Lage herausgenommenen Strahlenbüschel.

Um nun die analytischen Ausdrücke für zwei entsprechende Elemente der zuletzt genannten homographischen Systeme zu erhalten, gehen wir auf den Anfang der vorhergehenden Vorlesung zurück. Wir liessen dort einen Kegelschnitt 2): $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$ entstehen durch den Schnitt der entsprechenden Strahlen zweier homographischen Strahlenbüschel 1): $U_0 - \lambda U_1 = 0$, $V_0 - \lambda V_1 = 0$ und stellten die Gleichung des Schnittpunktes auf in der Form 8) $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$. Da das Centrum des ersten Strahlenbüschels $U_0 - \lambda U_1 = 0$ in der Peripherie des Kegelschnittes liegt, so theilt er den Kegelschnitt in den Punkten 8) homographisch. Sind endlich $R_0 = 0$ und $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend zwei geraden Linien, so hat man die Gleichung irgend eines mit dem ersten Strahlenbüschel 1) homographischen Strahlenbüschels $R_0 - \lambda R_1 = 0$.

Es stellen sich also ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein mit ihm homographischer Strahlenbüschel immer in der Form dar:

$$2) \quad . \; . \; . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad R_0 - \lambda R_1 = 0.$$

Um zu entscheiden, ob diese Gleichungen 2), welches auch die in Liniencoordinaten gegebenen linearen Ausdrücke A, B, C und die in Punktcoordinaten linearen Ausdrücke R_0 und R_1 seien, immer entsprechende homographische Elemente ausdrücken, müssen wir auf die Natur der durch die Gleichungen 2) gegebenen Systeme näher eingehen.

Es liegt ein durch die erste Gleichung 2) gegebener Punkt auf dem durch die zweite Gleichung gegebenen Strahle, wenn die Coordinaten des Punktes, das sind die Coefficienten von u, v, w in der ersten Gleichung, das sind quadratische Ausdrücke in λ, für die Punktcoordinaten in die zweite Gleichung eingesetzt der Gleichung genügen. Dieses giebt eine kubische Bedingungsgleichung in λ. Dieser Gleichung wird dreimal, nicht viermal genügt, ausgenommen, wenn in derselben die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ sämmtlich verschwinden. Ist das Letztere der Fall, so wird der kubischen Gleichung für jeden Werth von λ genügt. Wir drücken dieses geometrisch aus wie folgt:

3) . . . Wenn ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein demselben entsprechender Strahlenbüschel durch Gleichungen von der Form 2) gegeben sind, so geht dreimal ein

Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes. Wenn vier Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so geht jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes.

In dem letzteren Falle, wenn jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt des Kegelschnittes geht, muss das Centrum des Strahlenbüschels auf dem Kegelschnitt selbst liegen. Denn hätte das Centrum eine andere Lage, so würde ein beliebiger Strahl des Büschels den Kegelschnitt in zwei Punkten schneiden, denen zwei verschiedene Werthe von λ entsprechen, welche beide demselben Strahle des Büschels entsprechen müssten. Wir können daher zur Vervollständigung des vorhergehenden Satzes noch hinzufügen:

Wenn vier Strahlen des Büschels durch die ihnen nach 2) entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so liegt das Centrum des Büschels in der Peripherie des Kegelschnittes und die Systeme sind homographisch und in perspectivischer Lage.

Betrachten wir den Fall, dass das Centrum des Strahlenbüschels 2) in der Peripherie des Kegelschnittes 2) liegt, so sehen wir, dass der dem Centrum, als Punkt des Kegelschnittes, entsprechende Strahl des Büschels immer auf dem ihm entsprechenden Strahle liegt. Sehen wir demnach ab von dem Centrum des Büschels als Punkt des Kegelschnittes, so folgt aus dem vorhergehenden Satze:

4) . . . Wenn ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein demselben entsprechender Strahlenbüschel durch Gleichungen von der Form 2) gegeben sind, wenn ferner das Centrum des Strahlenbüschels auf dem Kegelschnitt liegt und wenn drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte des Kegelschnittes gehen, so sind die Systeme homographisch und in perspectivischer Lage.

Auf diesen Satz gestützt können wir nachweisen, dass die Gleichungen 2) immer homographische Systeme ausdrücken.

Denn fixiren wir auf dem durch die erste Gleichung 2) gegebenen Kegelschnitt irgend einen Punkt als Centrum eines zu construirenden Strahlenbüschels und ziehen von demselben drei Strahlen nach drei beliebigen Punkten 0, 1, 2 des Kegelschnittes, welchen die Strahlen 0, 1, 2 des durch die zweite Gleichung gegebenen Strahlenbüschels entsprechen mögen, so können wir die gegebenen Strahlen als die den drei Strahlen 0, 1, 2 entsprechenden Strahlen eines mit dem gegebenen Strahlenbüschel homographischen aber noch unvollständigen Strahlenbüschels ansehen. Vervollständigen wir nun den mit dem gegebenen Büschel homographischen Strahlenbüschel, so ist der vervollständigte Strahlenbüschel nach Satz 4)

homographisch mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt und in perspectivischer Lage. Der vervollständigte Strahlenbüschel theilt also den Kegelschnitt in dem durch die erste Gleichung 2) gegebenen Punktesystem homographisch. Da mit diesem Strahlenbüschel aber der durch die zweite Gleichung 2) gegebenen Strahlenbüschel homographisch ist, so sind nach der Definition die beiden Systeme 2) selbst homographisch. Mit Voranstellung früherer Bemerkungen drücken wir dasselbe so aus:

5) Jedes Punktesystem auf einem Kegelschnitt und jeder mit dem Punktesysteme homographische Strahlenbüschel lassen sich durch Gleichungen von der Form 2) analytisch ausdrücken; und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form 2) immer ein Punktesytem auf einem Kegelschnitt und einen mit dem Punktesysteme homographischen Strahlenbüschel dar.

Wir wollen nicht unterlassen, auf einen wesentlichen Unterschied der eben betrachteten homographischen Systeme gegen die früheren aufmerksam zu machen. Die früheren homographischen Systeme, Strahlenbüschel und Punktesysteme, liessen sich durch Verlegung in der Ebene immer in perspectivische Lage bringen; ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt und ein mit demselben homographischer Strahlenbüschel lassen sich im Allgemeinen nicht in eine perspectivische Lage versetzen. Dasselbe gilt auch von den homographischen Systemen auf welche die folgenden Untersuchungen führen werden.

Um Punkte eines Kegelschnittes mit Punkten auf einer geraden Linie in homographische Verbindung zu bringen, dehnen wir den Begriff der Homographie noch weiter aus. Wir werden sagen, dass ein Punktesystem auf einem Kegelschnitt homographisch sei mit einem Punktesysteme auf einer geraden Linie, wenn ein Strahlenbüschel gefunden werden kann, der sowohl mit dem Punktesysteme auf dem Kegelschnitt als auch mit dem Punktesysteme auf der geraden Linie homographisch ist.

Wenn demnach $T_0 = 0$ und $T_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Punkte sind, so sind die Gleichungen:

$$6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad T_0 - \lambda T_1 = 0$$

die allgemeinsten Ausdrücke für homographische Systeme der beschriebenen Art.

Ein Blick auf die Formeln 2) und 6) lässt ferner erkennen, dass der Satz 16) der ersten Vorlesung sich hier wiederholt:

7) . . . Wenn zwei Systeme homographisch sind mit einem dritten, so sind sie unter einander homographisch.

Dieser Satz wird sich bis zum Schlusse der Vorlesung bewähren, in der wir uns auf homographische Systeme noch anderer Art wie von selbst werden führen lassen.

Wir verweilen jedoch vorerst bei den durch die Gleichung 6) gegebenen homographischen Punktesystemen auf einem Kegelschnitt K und auf einer geraden Linie L.

Die erste Gleichung 6) ist, wenn wir λ variiren lassen, der analytische Ausdruck für alle Punkte eines und desselben Kegelschnittes K. Jedem Werthe von λ entspricht ein bestimmter Punkt des Kegelschnittes und jedem Punkte des Kegelschnittes entspricht ein Werth von λ. Wenn wir aber u, v, w in jener ersten Gleichung 6) die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie l bedeuten lassen, so haben wir eine ganz bestimmte in λ quadratische Gleichung, deren Wurzeln entsprechen werden den beiden Schnittpunkten des Kegelschnittes K und der geraden Linie l der Art, dass wenn man diese Wurzeln für λ nach einander einsetzt in die erste Gleichung 6), in welcher u, v, w als Variable betrachtet werden, man die Gleichungen der Punkte erhält, in welchen der Kegelschnitt K von der geraden Linie l geschnitten wird.

Die gerade Linie l wird Tangente des Kegelschnittes K, wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung einander gleich werden, das ist unter der Bedingung:

$$8) \quad \ldots \ldots \quad B^2 - 4AC = 0.$$

Diese Gleichung stellt also in Liniencoordinaten den Kegelschnitt K dar, dessen Punkte durch die erste Gleichung 6) analytisch ausgedrückt werden.

Wir wollen den Kegelschnitt K von irgend drei geraden Linien l_0, l_1, l_2 schneiden lassen, deren Coordinaten gegeben seien:

$$u_0\ v_0\ w_0, \qquad u_1\ v_1\ w_1, \qquad u_2\ v_2\ w_2.$$

Die den Schnittpunkten entsprechenden Werthe von λ ergeben sich dann als die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichungen, in welchen A_0, B_0, C_0; A_1 ... die Ausdrücke A, B, C bezeichnen, nachdem man in ihnen für u, v, w die Coordinaten der gegebenen geraden Linien gesetzt hat:

$$9) \quad \ldots \ldots \quad \begin{array}{l} A_0 + B_0\lambda + C_0\lambda^2 = 0, \\ A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 = 0, \\ A_2 + B_2\lambda + C_2\lambda^2 = 0. \end{array}$$

Wenn wir die Wurzeln dieser Gleichungen in die zweite Gleichung 6) nach einander einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen der den sechs Schnittpunkten auf dem Kegelschnitt K homographisch entsprechenden Punkte der geraden Linie L, die sich paaren, wie die Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt. Die Gleichungen dieser Punktepaare auf der geraden Linie L werden erhalten durch Einsetzung der Werthes von λ aus der zweiten Gleichung 6) in den Gleichungen 9):

$$
10) \quad \begin{aligned}
A_0 T_1^2 + B_0 T_1 T_0 + C_0 T_0^2 &= 0, \\
A_1 T_1^2 + B_1 T_1 T_0 + C_1 T_0^2 &= 0, \\
A_2 T_1^2 + B_2 T_1 T_0 + C_2 T_0^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso könnte man auch die Schnittpunktepaare auf dem Kegelschnitt durch drei Gleichungen ausdrücken. Die Gleichung des auf der geraden Linie l_0 liegenden Paares würde sich ergeben durch Elimination von λ aus der ersten Gleichung 6) und der ersten Gleichung 9). Jedoch sind diese Gleichungen zu wenig übersichtlich, als dass sie für unsere Untersuchungen von Werth sein sollten.

Wenn die drei geraden Linien l_0, l_1, l_2 sich in einem und demselben Punkte c schneiden, so lassen sich drei Factoren μ_0, μ_1, μ_2 finden, dass folgenden drei Gleichungen genügt wird:

$$
\begin{aligned}
\mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 &= 0, \\
\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 &= 0, \\
\mu_0 w_0 + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Daraus componiren sich die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 &= 0, \\
\mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 &= 0, \\
\mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

aus welchen Gleichungen folgt, dass, wenn man die Gleichungen 10) der Reihe nach mit μ_0, μ_1, μ_2 multiplicirt und addirt, man identisch o erhält, welches nach 18) der sechsten Vorlesung eben die Bedingung ist für die Involution der drei Punktepaare 10).

Wir haben dadurch den Satz bewiesen:

11) . . . Wenn die Verbindungslinien von drei Punktepaaren auf einem Kegelschnitt sich in einem und demselben Punkte schneiden, so bilden die diesen Punktepaaren homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution.

Beachten wir, dass in homographischen Punktesystemen jedem Punkte des einen Systemes immer nur ein Punkt des andern entspricht, so können wir den Satz auch umkehren wie folgt:

12) . . . Wenn drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die ihnen homographisch entsprechenden Punktepaare auf einem Kegelschnitt verbinden, in einem und demselben Punkte.

Diese beiden Sätze bilden das gesuchte Prinzip, nach welchem aus jedem der beiden Parallelsätze, von welchen die gegenwärtige Vorlesung ausging, der andere abgeleitet werden kann. Denn die Pascal'sche Linie und die gegenüberliegenden Seiten des dem Kegelschnitt einbeschriebenen Pascal'schen Sechsecks schneiden sich dreimal in einem Punkte, und auf

der anderen Seite haben wir das den Schnittpunkten der Pascal'schen Linie auf dem Kegelschnitt homographisch entsprechende Punktepaar α, β auf der geraden Linie, welches dreimal eine Involution bildet mit vier von den den sechs Ecken des Sechseckes homographisch entsprechenden Punkten.

Wenn man den Kegelschnitt schneiden lässt durch Strahlen eines Strahlenbüschels mit dem Centrum c, so bilden die den Schnittpunktepaaren von je drei Strahlen homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie nach 11) eine Involution. Das heisst, die den Schnittpunktepaaren sämmtlicher Strahlen des Büschels entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie bilden ein involutorisches Punktesystem.

Dieses involutorische System von Punktepaaren enthält bekanntlich zwei Doppelpunkte, in deren jedem ein Punktepaar zusammenfällt. Den Doppelpunkten entsprechen auf dem Kegelschnitt die Berührungspunkte der beiden durch den Punkt c gehenden Tangenten. Das Doppelpunktepaar, als ein einfaches Punktepaar aufgefasst, entspricht also auf dem Kegelschnitt demjenigen Punktepaare, in welchem die Polare des Punktes c den Kegelschnitt schneidet.

Da nun auf der einen Seite das Doppelpunktepaar harmonisch ist mit jedem Punktepaare des involutorischen Systemes, auf der anderen Seite jeder Strahl, der durch den Punkt c geht, mit der Polare des Punktes c ein Paar harmonischer Polaren des Kegelschnittes bildet, so können wir die beiden Prinzipiensätze 11) und 12) auch so ausdrücken:

13) . . . Den Schnittpunktepaaren irgend zweier harmonischen Polaren eines Kegelschnittes auf demselben entsprechen homographisch auf einer geraden Linie harmonische Punktepaare.

14) . . . Harmonischen Punktepaaren auf einer geraden Linie entsprechen homographische Punktepaare auf einem Kegelschnitt, deren Verbindungslinien harmonische Polaren des Kegelschnittes sind.

Umgekehrt lassen sich aus diesen beiden Sätzen die beiden vorhergehenden ableiten, wenn man sich erinnert, dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden, wenn sie mit einer vierten geraden Linie drei Paare harmonischer Polaren eines Kegelschnittes bilden und dass drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, wenn jedes derselben harmonisch ist mit einem vierten Punktepaare.

Wir nannten die Sätze 11) bis 14) Prinzipiensätze, weil sie eine Vermittelung bilden zwischen Sätzen der ebenen Geometrie und, wenn wir uns so ausdrücken sollen, der Geometrie auf der geraden Linie. An einem Beispiele haben wir die Vermittelung nachgewiesen. Andere Beispiele zur Anwendung liegen in der sechsten Vorlesung über ebene Geo-

metrie 22)—24) vor. Indem wir die erwähnten Sätze hier wiederholen, wollen wir jedem derselben denjenigen Satz voranstellen, der ihm nach den Prinzipiensätzen entspricht.

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt umbeschrieben, ein zweites Sechseck durch Verbindung der Tangirungspunkte 1, 2 ... 6 der auf einander folgenden Seiten mit geraden Linien demselben Kegelschnitt einbeschrieben ist, so ist jede Diagonale, welche zwei gegenüberliegende Ecken des umbeschriebenen Sechsecks verbindet, die harmonische Polare zu einem der gegenüberliegenden Seitenpaare 12, 45; 23, 56; 34, 61 des einbeschriebenen Sechsecks und die drei Diagonalen des umbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Wenn irgend sechs Punkte 1, 2 ... 6 auf einer geraden Linie liegen und man construirt drei Punktepaare, von welchen das erste harmonisch ist mit den Punktepaaren 12, 45, das zweite harmonisch mit den Punktepaaren 23, 56, das dritte harmonisch mit den Punktepaaren 34, 61, so bilden die drei construirten Punktepaare eine Involution.

Durch vier Punkte eines Kegelschnittes lassen sich drei Linienpaare legen. Diejenige gerade Linie, welche harmonische Polare ist zu jeder Linie eines der drei Linienpaare, verbindet die Schnittpunkte der beiden anderen Paare; und diejenige gerade Linie, welche die Schnittpunkte zweier von jenen drei Linienpaaren verbindet, ist harmonische Polare zu jeder geraden Linie des dritten Paares.

Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist mit jedem Punktepaare einer Gruppe, bildet eine Involution mit den Punktepaaren der beiden andern Gruppen; und dasjenige Punktepaar, welches mit zwei Gruppen eine Involution bildet, ist harmonisch mit jedem Punktepaare der dritten Gruppe.

Wenn man durch beliebige vier Punkte eines Kegelschnittes drei Linienpaare legt und das Dreieck construirt, dessen Ecken die Schnitt-

Beliebige vier Punkte auf einer geraden Linie bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Construirt man drei Punktepaare, von denen jedes

punkte der drei Linienpaare sind, so ist jede Seite des Dreiecks die harmonische Polare zu einem jener drei Linienpaare und je zwei Seiten sind harmonische Polaren des Kegelschnittes.

harmonisch ist mit den Punktepaaren einer Gruppe, so sind je zwei construirte Punktepaare harmonisch.

Der erste von diesen Sätzen der ebenen Geometrie ist der bekannte Brianchon'sche Satz, der zweite führt auf die bekannte Construktion der Polare eines Punktes in einem Kegelschnitt mit der geringsten Zahl von geraden Linien, und der letzte Satz lehrt ein System harmonischer Polaren eines Kegelschnittes construiren. Was die, mit Einschluss des ersten Sätzepaares unserer Vorlesung, ihnen entsprechenden Sätze auf der geraden Linie anbetrifft, so können wir in rein algebraischer Auffassung sagen, dass die beiden ersten Relationen ausdrücken zwischen den Wurzeln irgend einer algebraischen Gleichung des sechsten Grades und den Wurzeln anderer aus jenen Wurzeln construirbaren Gleichungen, während die beiden letzten Sätze Relationen geben zwischen den Wurzeln einer beliebigen biquadratischen Gleichung und anderen aus diesen Wurzeln construirbaren Gleichungen, von welchen wir bereits in der siebenten Vorlesung der ebenen Geometrie bei Auflösung der biquadratischen Gleichung Gebrauch gemacht haben.

Wie an den aufgeführten Beispielen bilden die Prinzipiensätze 22) — 24) die Vermittelung von allen Sätzen der ebenen Situationsgeometrie mit entsprechenden Sätzen der Geometrie auf der geraden Linie. Wir wollen uns eingehender darüber äussern.

Wir gehen von dem unendlich getheilten Kegelschnitt K aus und von der mit dem Kegelschnitt homographisch getheilten geraden Linie L. Irgend eine gegebene gerade Linie l in der Ebene des Kegelschnittes wird bestimmt sein durch das Schnittpunktepaar der geraden Linie auf dem Kegelschnitt. Durch das Schnittpunktepaar auf dem Kegelschnitt ist das demselben homographisch entsprechende Punktepaar auf der geraden Linie bestimmt. Wenn wir dieses Punktepaar das Bild der geraden Linie l auf der geraden Linie L nennen, so hat jede gegebene gerade Linie l ihr entsprechendes Bild auf der geraden Linie L, und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare auf der geraden Linie L eine durch dasselbe bestimmte gerade Linie l in der Ebene.

Betrachtet man nun alle Figuren in der Ebene durch gerade Linien entstanden, den Punkt durch den Schnitt zweier geraden Linien, die Curve gegeben durch ihre sämmtlichen Tangenten, so haben wir für die Figuren in der Ebene auf der geraden Linie L entsprechende Bilder, in welchen sich der Charakter der Figuren, das sind geometrische Sätze, ebenfalls aussprechen muss, wie umgekehrt der Charakter der Bilder die

Eigenschaften ihrer Figuren in der Ebene bedingt. Da nun Sätze der Situationsgeometrie sich immer so ausdrücken lassen, dass gewisse gerade Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden, so sieht man, dass die Prinzipiensätze 22)—24) dazu dienen werden, Sätze der Situationsgeometrie in Bildsätze zu übertragen und umgekehrt aus Bildsätzen Sätze in der ebenen Geometrie herzuleiten.

Man kann auch den Pol c der geraden Linie l in dem Kegelschnitt K als das Element der Figuren in der Ebene betrachten. In diesem Falle würde das dem Schnittpunktepaare der Polare l und des Kegelschnittes K homographisch entsprechende Punktepaar auf der geraden Linie L das Bild des Poles c sein. Es würde also jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar als Bild auf der geraden Linie entsprechen, wie umgekehrt jedem Punktepaar auf der geraden Linie L ein Punkt in der Ebene entspricht. Die Prinzipiensätze liessen sich dann in ähnlicher Weise dazu verwerthen, um Sätze aus der ebenen Situationsgeometrie zu übertragen in Bildsätze und umgekehrt.

Wir brechen hiermit die angeregte Uebertragung von geometrischen Sätzen ab, indem wir uns vorbehalten, in der nächsten Vorlesung auf denselben Gegenstand aus einem anderen Gesichtspunkte noch einmal zurückzukommen, und fahren in der Erweiterung der Homographie fort.

Zwei Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten sollen **homographisch** heissen, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie (oder ein Strahlenbüschel) gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der Punktesysteme auf den Kegelschnitten.

Auf Grund dieser Definition stellen sich homographische Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten analytisch in der Form dar:

$$15) \quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0,$$

wie umgekehrt zwei Gleichungen der angegebenen Form immer homographische Punktesysteme auf zwei Kegelschnitten ausdrücken werden, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ die Gleichungen von irgend sechs Punkten sind.

Die Kegelschnitte 15) können unter Umständen zusammenfallen, ohne dass die entsprechenden Punkte zusammenfallen. Dann hätte man zwei homographische Theilungen eines und desselben Kegelschnittes.

Wenn man in den Gleichungen 15) C' identisch 0 werden lässt, so kommt man auf die Gleichungen 6) zurück, deren geometrische Bedeutung an der betreffenden Stelle angegeben worden ist.

Eliminirt man in diesem Systeme 6) die Variable λ, so erhält man eine Bedingungsgleichung $\Omega = 0$ zwischen den Coordinaten u, v, w der geraden Linien, welche die entsprechenden Punkte der homographischen Systeme 6) verbinden. Diese Gleichung $\Omega = 0$ ist vom dritten Grade und kann nach der bekannten Methode der Elimination in Determinanten-

form dargestellt werden. Sie drückt analytisch eine Curve dritter Klasse aus, welche von jenen geraden Linien berührt wird.

Die Elimination der Variable λ aus den Gleichungen 15) giebt gleichfalls eine Bedingungsgleichung $\Omega' = 0$, zwischen den Coordinaten u, v, w der geraden Linie, welche die entsprechenden Punkte der homographischen Systeme 15) verbinden. Durch diese Gleichung vom vierten Grade, ebenfalls in Determinantenform, ist eine Curve vierter Classe bestimmt, welche von jenen geraden Linien berührt wird.

Der Begriff der Homographie kann noch nach einer anderen Richtung hin erweitert werden, wenn man die Kegelschnitte nicht durch Punkte, sondern durch ihre Tangenten entstehen lässt. Da diese Erweiterung nur eine Uebertragung des Verhergehenden ist, so wird es, indem wir die Analogie der Sätze und Formeln mit den vorhergehenden durch gleiche Zahlen in doppelten Klammern andeuten, der Ausführlichkeit nicht mehr bedürfen.

Wir gehen von dem Satze (4) der zweiten Vorlesung aus: dass alle Tangenten eines Kegelschnittes zwei beliebige unter ihnen homographisch theilen. Dieser Satzt lehrt das ganze System der Tangenten eines Kegelschnittes in Verbindung bringen mit der Theilung einer Tangente nach folgender Definition:

Das System der Tangenten eines Kegelschnittes theilt eine beliebige unter ihnen homographisch mit dem Tangensysteme.

Hiernach entspricht homographisch jeder Tangente des Kegelschnittes der Punkt der beliebigen Tangente, durch welchen er geht und umgekehrt. Die Lage der homographischen Systeme heisse die perspectivische Lage. Wir können nach der angegebenen Definition auch sagen:

(1) . . . Das System der Tangenten eines Kegelschnittes theilt zwei beliebige unter ihnen homographisch mit dem Tangentensysteme.

Wenn man die von dem Systeme der Tangenten des Kegelschnittes homographisch getheilte beliebige Tangente mit ihrer Theilung aus ihrer perspectivischen Lage heraushebt und sie beliebig in der Ebene verlegt, so soll die Theilung auch in dieser schiefen Lage homographisch heissen mit dem Tangentensysteme. Selbst jedes andere Punktesystem auf einer geraden Linie soll mit dem Tangentensysteme des Kegelschnittes homographisch genannt werden, wenn es homographisch ist mit der Theilung der beliebigen Tangente in der früheren perspectivischen Lage.

In der Absicht die analytischen Ausdrücke für zwei entsprechende Elemente der zuletzt genannten homographischen Systeme zu finden, gehen wir auf die Formeln der zweiten Vorlesung zurück. Die Gleichungen 1) $U_0 - \lambda U_1 = 0$, $V_0 - \lambda V_1 = 0$ stellten dort homographische Punktesysteme auf zwei geraden Linien dar, wenn die Gleichungen $U_0 = 0$,

$U_1 = 0$, $V_0 = 0$, $V_1 = 0$ irgend vier Punkte ausdrücken. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte in den homographischen Systemen 1) waren Tangenten des Kegelschnittes 2) $U_0 V_1 - U_1 V_0 = 0$, der auch von den geraden Linien berührt wurde, auf welchen die Punktesysteme 1) liegen. Durch den von den Gleichungen 1) dargestellten Punkt ging eine Tangente des Kegelschnittes 2) hindurch, deren Gleichung sich in der Form darstellte 8) $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$, wo $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen bestimmter gerader Linien bedeuteten. Das ist eine Tangente des Kegelschnittes 2), welche nach der Definition die Tangente, auf welcher das erste Punktesystem 1) liegt, in dem Punkte $U_0 - \lambda U_1 = 0$ homographisch theilt. Da nun $R_0 - \lambda R_1 = 0$ die Gleichung eines beliebigen mit dem ersten Punktesysteme 1) homographischen Punktesystemes ist, wenn $R_0 = 0$ und $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend welchen Punkten bedeuten, so stellen sich das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit demselben homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie in der Form dar:

(2) . . . $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad R_0 - \lambda R_1 = 0.$

Es erhebt sich nun die Frage, ob die beiden Gleichungen (2) immer homographische Systeme, ein Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit ihm homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie, ausdrücken, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von irgend drei geraden Linien und $R_0 = 0$, $R_1 = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Punkten sind.

Der Weg zur Untersuchung der Frage ist im Vorhergehenden vorgezeichnet. Wir geben nur die Zwischensätze an, welche zu ihrer Beantwortung dienen.

(3) . . . Wenn das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein demselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form (2) gegeben sind, so geht dreimal eine Tangente durch den ihm entsprechenden Punkt. Wenn vier Tangenten durch die ihnen entsprechenden vier Punkte gehen, so geht jede Tangente durch den ihr entsprechenden Punkt.

Wenn vier Tangenten durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, so ist die gerade Linie, auf welcher das Punktesystem liegt, welches dem Tangentensysteme entspricht, selbst Tangente des Kegelschnittes.

(4) . . . Wenn das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein demselben entsprechendes Punktesystem auf einer geraden Linie durch Gleichungen von der Form (2) gegeben sind, wenn ferner die gerade Linie Tangente des Kegelschnittes ist und wenn drei Tangenten des Kegelschnittes

durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, so sind die Systeme homographisch und in perspectivischer Lage.

Daraus folgt nun der allgemeine Satz, auf Grund dessen sich die beiden vorhergehenden Sätze aussprechen lassen, ohne der Gleichungen (2) Erwähnung zu thun:

(5) . . . Das Tangentensystem eines Kegelschnittes und jedes mit dem Tangentensysteme homographische Punktesystem auf einer geraden Linie lassen sich durch Gleichungen von der Form (2) ausdrücken, und umgekehrt stellen Gleichungen von der Form (2) immer das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein mit demselben homographisches Punktesystem auf einer geraden Linie dar.

Das Tangentensystem eines Kegelschnittes soll homographisch sein mit einem Strahlenbüschel, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit dem Tangentensystem und zugleich mit dem Strahlenbüschel.

Homographische Systeme der genannten Art stellen sich analytisch in der Form dar:

$$(6) \quad . \; . \; . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad T_0 - \lambda T_1 = 0,$$

wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $T_0 = 0$, $T_1 = 0$ irgend welche Liniengleichungen sind.

Lassen wir jedoch $T = 0$ und $T_1 = 0$ Punktgleichungen bedeuten, wodurch die Gleichungen (6) in die Gleichungen (2) übergehen und vergegenwärtigen wir uns die geometrische Bedeutung der Formeln 8) — 11) in der angegebenen Auffassung, so ergeben sich daraus die Sätze:

(11) . . . Wenn man von drei Punkten auf einer geraden Linie drei Tangentenpaare an einen Kegelschnitt zieht, so bilden die den Tangentenpaaren homographisch entsprechenden Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution.

(12) . . . Wenn drei Punktepaare auf einer geraden Linie eine Involution bilden, so schneiden sich die ihnen homographisch entsprechenden Tangentenpaare eines Kegelschnittes in drei Punkten, welche auf einer geraden Linie liegen.

(13) . . . Wenn man von zwei harmonischen Polen eines Kegelschnittes Tangentenpaare an den Kegelschnitt zieht, so entsprechen diesen homographisch harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie.

(14) . . . Harmonische Punktepaare auf einer geraden Linie entsprechen homographisch Tangentenpaaren eines Kegelschnittes aus einem Polenpaare des Kegelschnittes.

Es sollen ferner Tangentensysteme an zwei Kegelschnitten homo-

graphisch sein, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der Systeme.

Homographische Systeme der Art stellen sich in der Form dar:

$$(15) \quad . \quad . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \qquad A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass beide Gleichungen Liniengleichungen sind.

Endlich werden wir das Tangentensystem eines Kegelschnittes und ein Punktesystem auf einem anderen Kegelschnitt **homographisch** nennen, wenn ein Punktesystem auf einer geraden Linie gefunden werden kann, welches homographisch ist mit jedem der beiden Systeme.

Solche Systeme werden ebenfalls durch Gleichungen von der Form (15) ausgedrückt, wenn die eine eine Liniengleichung, die andere eine Punktgleichung vorstellt.

An die gegebenen Definitionen der complicirteren homographischen Systeme schliessen sich nun Fragen an, welche analog sind den Fragen, welche wir für die einfachen homographischen Systeme beantwortet haben, zum Beispiel, wie viel Tangenten eines Kegelschnittes werden durch die ihnen homographisch entsprechenden Punkte eines anderen Kegelschnittes gehen? Wir werden jedoch weder auf diese noch auf andere Fragen, die sich nach dem Vorhergehenden von selbst aufdrängen, eingehen, uns vielmehr damit begnügen, einen ganz speciellen Fall homographischer Systeme der zuletzt bezeichneten Art in dem folgenden Satze vorzuführen.

Das System der Tangenten eines Kegelschnittes ist homographisch mit dem Systeme ihrer Berührungspunkte.

Es sei die Gleichung der Tangente eines Kegelschnittes:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0.$$

Die Gleichung der ihr unendlich naheliegenden Tangente desselben Kegelschnittes ist, wenn wir mit ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + (B + 2\,C\lambda)\,\varepsilon = 0.$$

Berechnen wir x, y, z aus den beiden Gleichungen oder aus zwei anderen, die aus diesen Gleichungen combinirt sind, so erhalten wir die Coordinaten des Berührungspunktes der ersten Tangente.

Aus der Combination der beiden Gleichungen gehen aber folgende hervor:

$$B + 2\,C\lambda = 0, \qquad 2\,A + B\lambda = 0,$$

aus welchen sich quadratische Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes ergeben. Setzt man aus diesen die Gleichung des Berührungspunktes zusammen, so erhält man für ihn einen Ausdruck von der Form:

$$A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0.$$

Dass nun die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes und die

Gleichung ihres Berührungspunktes von der Form (15) sind, beweiset den genannten Satz.

Durch den Schnitt des Tangentensystemes eines Kegelschnittes und eines mit ihm homographischen Strahlenbüschels (6) entsteht eine Curve dritter Ordnung, deren Gleichung $\Omega = 0$*) durch Elimination von λ aus jenen Gleichungen in Determinantenform erhalten wird.

Durch den Schnitt der homographischen Tangentensysteme (15) zweier Kegelschnitte entsteht eine Curve vierter Ordnung, deren Gleichung $\Omega' = 0$*) aus der Elimination von λ ebenfalls in Determinantenform hervorgeht.

Da es jedoch nicht in unserem Plane liegt, auf algebraische Curven höherer Klassen oder Ordnungen weiter einzugehen, so schliessen wir unsere Vorlesung mit der Bemerkung, dass in derselben der Weg vorgezeichnet worden ist, Curven dritter und vierter Klasse durch ihre Tangenten, und Curven dritter und vierter Ordnung durch ihre Punkte in homographische Verbindung zu bringen mit Punktesystemen auf einer geraden Linie oder Strahlenbüschel.

Vierte Vorlesung.

Ein Prinzip der Uebertragung aus der Ebene in die gerade Linie und umgekehrt.

Die Sätze 11) — 14) oder (11) — (14) der vorhergehenden Vorlesung bilden die Grundlage eines Prinzipes zur Uebertragung aus der Ebene in die gerade Linie und aus der geraden Linie in die Ebene. Sie gingen hervor aus einer weiten Theorie, die man verfolgen musste, um zu jenen Sätzen zu gelangen. Wir beabsichtigen in dieser Vorlesung dasselbe Prinzip der Uebertragung unabhängig von dem Vorhergehenden aus einem neuen analytischen Gesichtspunkte zu entwickeln. Bei dieser

*) Die Determinanten für Ω und Ω' sind folgende:

$$\Omega = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ T_0, & -T_1, & 0 \\ 0, & T_0, & -T_1 \end{vmatrix} \qquad \Omega' = \begin{vmatrix} A, & B, & C, & 0 \\ 0, & A, & B, & C \\ A', & B', & C', & 0 \\ 0, & A', & B', & C' \end{vmatrix}.$$

Ihre Elemente sind lineare homogene Ausdrücke in Punktcoordinaten.

Solche Determinantenformen der Curven $\Omega = 0$ der dritten und $\Omega' = 0$ der vierten Ordnung waren es, welche vormals in „Crelle's Journal" verborgene Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung entwickeln lehrten. Die Wahl der Determinantenform war damals ein Kunstgriff; hier ergiebt sie sich als eine nothwendige Folge unserer Untersuchungen. Die geometrische Bedeutung derselben kann zu neuen Sätzen Veranlassung geben.

Gelegenheit wird es sich zeigen, das der Modus der Uebertragung, auf welchen die Homographie hinführte, zugleich der allgemeinste ist.

Man kann nicht jedem Punkte in der Ebene einen durch ihn bestimmten Punkt in der geraden Linie der Art entsprechen lassen, dass auch umgekehrt jedem Punkte in der geraden Linie ein einziger Punkt in der Ebene entspricht. Die Ebene enthält eben das Quadrat von Punkten der geraden Linie.

Hiernach scheint es unmöglich, die Geometrie in der Ebene auf die Geometrie in einer geraden Linie zurückzuführen.

Die Möglichkeit leuchtet aber sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Ebene gerade so viel verschiedene Punkte enthält, als die gerade Linie verschiedene Punktepaare. Lässt man demnach jedem Punkte in der Ebene ein Punktepaar in der geraden Linie und umgekehrt jedem Punktepaare in der geraden Linie einen Punkt in der Ebene in unzweideutiger Weise entsprechen, so hat man ein Uebertragungsprinzip, welches die Geometrie in der Ebene zurückführt auf die Geometrie in einer geraden Linie und umgekehrt.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Raumgeometrie zurückführen auf die Geometrie in einer geraden Linie, selbst die Geometrie von mehr als drei Dimensionen. Hier würde es sich aber nicht um Punktepaare in der geraden Linie handeln, sondern um Systeme von drei oder mehreren Punkten.

Sieht man jedoch ab von den angedeuteten Erweiterungen des Uebertragungsprinzipes, so kommt es darauf an, den Modus festzustellen, nach welchem die Uebertragung einer ebenen Figur in eine ihr entsprechende Figur auf einer geraden Linie und umgekehrt eindeutig vor sich geben muss.

Es liegen zwei Systeme von Punkten vor, das eine System in der Ebene, das andere auf der geraden Linie, der **Fundamentallinie**. Ein beliebiger Punkt in der Ebene sei durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y bestimmt; ein Punkt λ auf der Fundamentallinie werde bestimmt durch seine Gleichung:

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad T_0 - \lambda T_1 = 0,$$

indem die Gleichungen $T_0 = 0$ und $T_1 = 0$ zwei feste Punkte der Fundamentallinie, **Fundamentalpunkte**, darstellen.

Soll nun der Punkt λ einer der beiden Punkte der Fundamentallinie sein, welche dem Punkte xy in der Ebene entsprechen, so muss die Grösse λ von den beiden Grössen x und y abhängen, das heisst, die drei Grössen λ, x, y müssen durch eine Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ mit einander verbunden sein. Da aber jeder Punkt der Ebene einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen soll, so muss die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$ eine quadratische in λ sein.

Andererseits soll einem gegebenen Punktepaare λ_0, λ_1 auf der Fundamentallinie der Voraussetzung nach nur ein einziger Punkt in der Ebene entsprechen. Das will sagen, dass die beiden Gleichungen: $\varphi(\lambda_0, x, y) = 0$, $\varphi(\lambda_1, x, y) = 0$ nur eine einzige Auflösung für die Unbekannten x, y zulassen, dass die Gleichungen linear seien in Rücksicht auf die Unbekannten.

Hierdurch ist der Modus der Uebertragung analytisch festgestellt. Die Uebertragung wird vermittelt durch die Gleichung $\varphi(\lambda, x, y) = 0$, welche in λ quadratisch, in x und y aber linear ist, also durch eine Gleichung von der Form:

$$2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

wenn man unter A, B, C beliebig gegebene lineare Functionen von x und y versteht.

Man sieht, dass diese Gleichung alles leistet, was das ausgesprochene Prinzip verlangt. Jedem Punkte in der Ebene entspricht nach ihr ein Punktepaar 1) auf der Fundamentallinie und umgekehrt entspricht jedem Punktepaare auf der Fundamentallinie ein Punkt in der Ebene.

Um das dargelegte Prinzip irgend fruchtbar zu machen, bedarf es solcher Fundamentalsätze, welche die einfachsten Figurenverhältnisse der Systeme auf einander übertragen.

Ein einfaches Figurenverhältniss in der Ebene besteht darin, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Die Coordinaten dieser Punkte seien $x_0\, y_0$, $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ und A_0, B_0, C_0, A_1 ... die Ausdrücke, in welche A, B, C übergehen, wenn man für die Coordinaten in ihnen nach einander setzt die Coordinaten der drei Punkte. Alsdann ist die analytische Bedingung, unter welcher die drei Punkte auf einer geraden Linie liegen die, dass sich drei Factoren μ_0, μ_1, μ_2 finden lassen, welche den drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 &= 0, \\ \mu_0 B_0 + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 &= 0, \\ \mu_0 C_0 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diesen drei Punkten in der Ebene entsprechen drei Punktepaare 1) auf der Fundamentallinie, für welche die Werthe von λ sich als die Wurzeln der quadratischen Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} A_0 + B_0\lambda + C_0\lambda^2 &= 0, \\ A_1 + B_1\lambda + C_1\lambda^2 &= 0, \\ A_2 + B_2\lambda + C_2\lambda^2 &= 0, \end{aligned}$$

und die Gleichungen der drei Punktepaare auf der Fundamentallinie selbst sind:

$$\begin{aligned} A_0 T_1^2 + B_0 T_1 T_0 + C_0 T_0^2 &= 0, \\ A_1 T_1^2 + B_1 T_1 T_0 + C_1 T_0^2 &= 0, \\ A_2 T_1^2 + B_2 T_1 T_0 + C_2 T_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Dass diese Gleichungen nach einander mit den Factoren μ_0, μ_1, μ_2 multiplicirt und addirt mit Rücksicht auf die ersten drei Gleichungen identisch 0 geben, ist ein Beweis, dass die drei Punktepaare eine Involution bilden.

Daraus entspringen nun die Fundamentalsätze:

Irgend drei Punkten auf einer und derselben geraden Linie in der Ebene entsprechen drei Punktepaare der Involution auf der Fundamentallinie.

Jeden drei Punktepaaren der Involution auf der Fundamentallinie entsprechen drei Punkte in der Ebene, welche auf einer geraden Linie liegen.

Es ist damit für das einfachste Figurenverhältniss in der Ebene der Ausdruck der entsprechenden Figur in der Fundamentallinie gefunden. Suchen wir nun ebenso umgekehrt das einfachste Figurenverhältniss in der Fundamentallinie auszudrücken für die Ebene.

In der Fundamentallinie liegen Punktepaare der verschiedensten Art vor. Jedem derselben entspricht in der Ebene ein Punkt. Unter diesen Punktepaaren giebt es solche, welche zusammenfallen in dem einen oder dem anderen Punkte, Doppelpunkte. Ja, man kann die Fundamentallinie betrachten als bestehend allein aus Doppelpunkten und man wird die Frage erheben, welches das entsprechende Bild in der Ebene sei für die Aufeinanderfolge der Doppelpunkte.

Das Punktepaar 1) auf der Fundamentallinie, entsprechend den Wurzeln λ der quadratischen Gleichung 2), wird ein Doppelpunkt, wenn die Wurzeln gleich werden, das ist unter der Bedingung:

3) . . . . $B^2 - 4AC = 0.$

Diese Bedingungsgleichung stellt aber für die Ebene einen Kegelschnitt dar. Man hat demnach den Satz:

Alle Doppelpunkte auf der Fundamentallinie entsprechen in der Ebene Punkten eines bestimmten Kegelschnittes, und allen Punkten dieses Kegelschnittes entsprechen Doppelpunkte auf der Fundamentallinie.

Der Kegelschnitt 3) hängt ab von den 9 Constanten, welche in seine Gleichung eingehen. Er kann deshalb jeder beliebige Kegelschnitt sein. Beachtet man nun, dass der Kegelschnitt die Grenze bildet für diejenigen Punkte xy in der Ebene, welchen reelle oder welchen imaginäre Wurzeln der quadratischen Gleichung 2) entsprechen, das heisst, reellen oder imaginären Punktepaaren auf der Fundamentallinie, so sieht man, dass es freisteht diese Grenze beliebig zu verengern oder zu erweitern.

Dieser Kegelschnitt 3), die Directrix, spielt bei der Uebertragung der ebenen Figur in die lineare Figur und umgekehrt eine wichtige

Rolle. Gehen wir nämlich von irgend zwei Punktepaaren α und α' der Fundamentallinie aus, welchen zwei Punkte a und a' in der Ebene entsprechen werden, und construiren auf der Fundamentallinie alle möglichen Punktepaare, von welchen jedes eine Involution bildet mit den beiden Punktepaaren α und α', so entsprechen diesen in der Ebene alle möglichen Punkte, welche auf der geraden Linie aa' liegen. Unter den auf der Fundamentallinie construirten Punktepaaren giebt es aber bekanntlich zwei Doppelpunkte und diese, als ein einfaches Punktepaar betrachtet, sind harmonisch mit jedem der construirten Punktepaare. Die den beiden Doppelpunkten entsprechenden Punkte in der Ebene liegen nach dem letzten Satze auf der Directrix. Da sie aber auch auf der geraden Linie aa' liegen, so sind sie die Schnittpunkte der geraden Linie aa' und der Directrix. Man kann deshalb sagen:

Jeden drei Punkten in der Ebene auf einer geraden Linie entsprechen auf der Fundamentallinie drei Punktepaare der Involution. Construirt man dasjenige Punktepaar, welches harmonisch ist mit jedem der drei Punktepaare der Involution und betrachtet jeden Punkt des construirten Paares als einen Doppelpunkt, so entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie in der Ebene dem Schnittpunktepaare der geraden Linie und der Directrix.

So entsprechen den Punkten auf irgend einer Tangente der Directrix alle Punktepaare auf der Fundamentallinie, von welchen der eine Punkt des Paares immer unverändert bleibt, nämlich der Punkt, welcher als Doppelpunkt betrachtet dem Berührungspunkte der Tangente entspricht. So entsprechen ferner irgend zwei Punkte der Directrix zweien Doppelpunkten in der Fundamentallinie. Dem Pole der geraden Linie, welche jene beiden Punkte der Directrix verbindet, entspricht das Doppelpunktepaar auf der Fundamentallinie, wenn man jeden Doppelpunkt für einen einfachen Punkt nimmt. So kann man endlich Sätze rücksichtlich eines Kegelschnittes, der Directrix hier, umwandeln in Sätze der Geometrie in der geraden Linie; wovon Beispiele in der vorhergehenden Vorlesung vorliegen.

Sehr viel complicirter wird die Uebertragung, wenn der Kegelschnitt nicht mehr die Directrix sein soll. Man wird sie aber um so lieber aufnehmen, als sie auf neue Gesichtspunkte führt, die in dem Folgenden flüchtig angedeutet werden sollen.

Wenn man den Werth von λ aus 1) in 2) setzt, so erhält man die Gleichung des Punktepaares

$$4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; AT_1^2 + BT_1T_0 + CT_0^2 = 0$$

auf der Fundamentallinie, welches dem Punkte xy in der Ebene entspricht. Da in diese Gleichung nur die Verhältnisse A, B, C eingehen,

so kann man diesen Grössen auch beliebige Werthe zuertheilen und aus den gegebenen Verhältnissen die Coordinaten x, y des diesen Werthen entsprechenden Punktes in der Ebene eindeutig bestimmen. Das will sagen, dass die Gleichung 4) alle möglichen Punktepaare auf der Fundamentallinie darstelle, mag man in ihr entweder x und y oder A, B und C beliebig variiren lassen.

Die Bedingung nun, dass Punkte in der Ebene auf einer geraden Linie liegen, ist bekanntlich die, dass ihre Coordinaten x, y einer linearen Gleichung von der Form genügen:

$$5) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad aA + bB + cC = 0.$$

Die diesen Punkten in der Ebene entsprechenden Punktepaare 4) auf der Fundamentallinie bilden nach dem ersten Fundamentalsatze ein involutorisches System. Wir können deshalb sagen:

Die Gleichung 4) stellt ein involutorisches System von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar, wenn die variabeln Coefficienten A, B, C einer linearen Bedingungsgleichung von der Form 5) genügen, und jene Punktepaare entsprechen Punkten in der Ebene, welche auf einer geraden Linie liegen.

Sollen Punkte in der Ebene auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen ihre Coordinaten x, y einer homogenen Bedingungsgleichung der 2ten Ordnung genügen:

$$6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad F(A, B, C) = 0.$$

Die ihnen entsprechenden Punktepaare auf der Fundamentallinie werden durch die Gleichungen 4) ausgedrückt, deren Coefficienten eben derselben Gleichung 6) genügen müssen. Wir werden daher analog dem Vorhergehenden sagen:

Die Gleichung 4) stellt ein involutorisches System der zweiten Ordnung von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar, wenn die variabeln Coefficienten A, B, C einer homogenen Bedingungsgleichung 6) von der zweiten Ordnung genügen, und jene Punktepaare entsprechen in der Ebene Punkten, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

Wir nennen eben das System der Punktepaare 4) auf der Fundamentallinie ein involutorisches System der zweiten Ordnung, weil es sich in zwei involutorische Systeme zerspaltet, wenn die Bedingungsgleichung 6) sich in lineare Factoren auflösen lässt.

Fünf beliebig in der Ebene gewählte Punkte bestimmen den Kegelschnitt, der durch sie geht, ein sechster Punkt des Kegelschnittes ist nur unvollständig durch die beliebig gewählten fünf Punkte bestimmt.

Demnach können auf der Fundamentallinie fünf Punktepaare beliebig gewählt werden, wenn sie in der Ebene fünf Punkten entsprechen

sollen, durch welche ein Kegelschnitt geht. Ein sechstes Punktepaar, welches in der Fundamentallinie einem sechsten Punkte des Kegelschnittes entsprechen soll, ist einer Beschränkung unterworfen. Der eine Punkt des sechsten Paares kann immer noch willkürlich auf der Fundamentallinie gewählt werden, der andere ist durch ihn und die fünf gewählten Punktepaare, wie wir sehen werden, nicht mehr eindeutig bestimmt.

Durch fünf von den sechs Punktepaaren des involutorischen Systemes zweiter Ordnung ist der Kegelschnitt in der Ebene bestimmt, der durch die den fünf Punktepaaren in der Ebene entsprechenden Punkte geht. Von dem sechsten Punktepaare soll nur der eine gegeben sein. Dieser, als Doppelpunkt betrachtet, entspricht einem bestimmten Punkte der Directrix. Allen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, von welchen der eine unverändert der gegebene Punkt ist, entsprechen in der Ebene Punkte auf der Tangente der der Directrix und der Doppelpunkt dem Berührungspunkte. Die erwähnte Tangente der Directrix schneidet aber den Kegelschnitt in zwei Punkten und jeder dieser Schnittpunkte wird einem Punktepaare auf der Fundamentallinie entsprechen, von welchem der eine Punkt unverändert der gegebene bleibt, die beiden anderen Punkte der beiden Paare werden verschieden sein und jeder derselben wird als zwölfter Punkt des involutorischen Systemes zweiter Ordnung genommen werden können.

Das gewonnene Resultat drücken wir kurz so aus:

Wenn von sechs Punktepaaren eines involutorischen Systemes zweiter Ordnung elf Punkte gegeben sind, so giebt es zwei verschiedene zwölfte Punkte des Systemes.

Den zwölften Punkt eines involutorischen Systemes zweiter Ordnung wird man demnach nicht ohne Hülfe eines Kreises oder Kegelschnittes construiren wollen.

Das zuletzt beschriebene Figurenverhältniss gehört schon zu den complicirteren, auf deren Betrachtung wir hier nicht weiter eingehen; vielmehr werden wir uns damit begnügen, die analytische Behandlung der Geometrie in der geraden Linie in den ersten Anfängen vorzuzeichnen.

Wir wollen annehmen, dass die Gleichung 4), welche das dem Punkte x, y in der Ebene entsprechende Punktepaar auf der Fundamentallinie darstellt, durch Einführung der homogenen Coordinaten selbst homogen gemacht sei, dass also A, B, C lineare homogene Ausdrücke der Coordinaten x, y, z bedeuten.

Bezeichnen wir unter dieser Voraussetzung mit U den Ausdruck:

$$7) \quad \ldots \ldots \quad U = AT_1^2 + BT_1T_0 + CT_0^2$$

und mit U_0 und U_1 die Ausdrücke, in welche U übergeht, wenn man für die Coordinaten x, y, z setzt die Coordinaten x_0, y_0, z_0 eines Punktes 0 in der Ebene oder x_1, y_1, z_1 eines Punktes 1 in der Ebene, so

sieht man, dass dasjenige Punktepaar auf der Fundamentallinie, welches dem Punkte:

$$x = x_0 - \lambda x_1, \qquad y = y_0 - \lambda y_1, \qquad z = z_0 - \lambda z_1,$$

auf der geraden Linie 01 entspricht, durch die Gleichung ausgedrückt wird:

8) . . . . $U_0 - \lambda U_1 = 0.$

Diese Gleichung stellt also ein involutorisches System von Punktepaaren auf der Fundamentallinie dar.

Zweien mit 0 und 1 harmonischen Punkten in der Ebene entsprechen auf der Fundamentallinie die beiden Punktepaare 8) und:

9) . . . . $U_0 + \lambda U_1 = 0.$

Nennen wir demnach zwei Punktepaare **harmonisch** mit zwei anderen Punktepaaren auf der Fundamentallinie, wenn die ihnen in der Ebene entsprechenden Punktepaare harmonisch sind, so stellen sich die ersteren analytisch in der Form dar:

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad U_0 - \lambda U_1 = 0, \qquad U_0 + \lambda U_1 = 0.$$

Operiren wir mit diesen Gleichungen wie mit Gleichungen von harmonischen Punktepaaren, so ergiebt sich daraus der Satz:

Wenn $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen sind von irgend zwei Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie, so stellen die Gleichungen:

$$U_0 - \lambda U_1 = 0, \quad U_0 - \mu U_1 = 0, \quad U_0 - \lambda_1 U_1 = 0, \quad U_0 - \mu_1 U_1 = 0$$

irgend vier Punktepaare desselben involutorischen Systemes dar, von welchen das erste Paar Punktepaare harmonisch ist mit dem letzten unter der Bedingung:

$$\lambda\mu - \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0.$$

Wir werden ferner sagen, dass drei Paare von Punktepaaren auf der Fundamentallinie eine **Involution** bilden, wenn die ihnen in der Ebene entsprechenden drei Punktepaare eine Involution bilden. Auf Grund dieser Definition lässt sich der Satz aussprechen:

Wenn $U_0 = 0$ und $U_1 = 0$ die Gleichungen sind von irgend zwei Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie, so stellen die drei Gleichungenpaare:

$$\begin{aligned} U_0 - \lambda_0 U_1 &= 0, & U_0 - \lambda_1 U_1 &= 0, & U_0 - \lambda_2 U_1 &= 0, \\ U_0 - \mu_0 U_1 &= 0, & U_0 - \mu_1 U_1 &= 0, & U_0 - \mu_2 U_1 &= 0 \end{aligned}$$

irgend sechs Punktepaare desselben involutorischen Systemes dar und die drei Paare von Punktepaaren bilden eine Involution unter der Bedingung:

$$(\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0.$$

Man wird bereits die Bemerkung gemacht haben, dass die symbo-

lischen Gleichungen, welche hier auftreten, ganz dieselben sind, welche uns gedient haben die Geometrie in der Ebene von Anfang zu entwickeln. Wie wir die angegebenen Gleichungen doppelt interpretirt haben, so lassen sich alle jene symbolischen Gleichungen, durch welche Sätze in der Ebene bewiesen werden, doppelt interpretiren und dieses giebt Gelegenheit eine grosse Zahl von Sätzen aus der Geometrie in der geraden Linie zu entdecken.

Diese Sätze aus der Geometrie in der geraden Linie drücken sich allerdings schwerfällig aus, was recht zu Tage tritt, wenn man entsprechende Sätze neben einander stellt, wie zum Beispiel:

Jede zwei gerade Linien in der Ebene schneiden sich in einem Punkte.	Jede zwei involutorische Systeme von Punktepaaren auf einer und derselben geraden Linie haben ein Punktepaar gemeinsam.

von welchen Sätzen der letztere in einer anderen Form in der 5ten Vorlesung unter No. 22 bereits angegeben worden ist, oder

Wenn jede von zwei geraden Linien durch zwei gegebene Punkte geht, so fallen die geraden Linien zusammen.	Wenn zwei involutorische Systeme von Punktepaaren zwei Punktepaare gemeinsam haben, so ist jedes Punktepaar des einen Systemes zugleich ein Punktepaar des anderen Systemes.

Da der Mangel kurzer Ausdrücke für Figurenverhältnisse bei den complicirteren Sätzen der Geometrie in der geraden Linie sich viel fühlbarer macht, so wird man es sich angelegen sein lassen, solche kurze Bezeichnungen zu erfinden.

Die eigentliche Aufgabe der Geometrie in der geraden Linie wird aber die bleiben, sie zu construiren ohne die gerade Linie zu verlassen. Denn mit der Lösung der Aufgabe und mit dem Uebertragungsprinzipe kann man die breitere Basis der Ebene verlassen und sich auf die gerade Linie zurückziehen ohne die Herrschaft über die Ebene aufzugeben. Die gerade Linie wird dann gleichsam als Telegraphenbureau dienen, auf dem man alle geometrischen Zustände in der Ebene erfahren und neue Combinationen in ihr anordnen kann.

Kleinere Mittheilungen.

XXIX. Bemerkung über Doppelreihen.

Nach Cauchy's Untersuchung (Cours d'Analyse, page 537) weiss man längst, dass es bei einer Doppelreihe nicht gleichgültig ist, ob man sie nach Horizontalzeilen oder nach Verticalcolonnen anordnet, es sind aber im Gebiete der elementaren Analysis sehr wenig Beispiele bekannt, an denen sich der Unterschied jener zwei Anordnungen recht klar nachweisen lässt. Vielleicht wird man desshalb die folgende Bemerkung, welche nur die Kenntniss der Formel

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots, \quad -1 < z < +1,$$

erheischt, bei Vorlesungen brauchbar finden.

Da der absolute Werth des Productes $2x(1-x)$ so lange ein echter Bruch ist, als x zwischen $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ und $+\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ liegt, so hat man einerseits folgende Entwickelung

$$1)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{1-2x(1-x)} \\ = 1 + 2x(1-x) + 4x^2(1-x)^2 + 8x^3(1-x)^3 + \ldots \\ -0{,}366\ldots < x < +1{,}366\ldots \end{array}\right.$$

Andererseits ist identisch

$$\frac{1}{1-2x(1-x)} = (1 + 2x + 2x^2)\frac{1}{1+4x^4},$$

und wenn hier der letzte Bruch unter der Voraussetzung $4x^4 < 1$ d. h. $x^2 < \frac{1}{2}$ entwickelt wird, so ergiebt sich

$$2)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{1-2x(1-x)} \\ = 1 + 2x + 2x^2 - 4x^4 - 8x^5 - 8x^6 + 16x^8 + 32x^9 + \ldots \\ -0{,}7071\ldots < x < +0{,}7071\ldots \end{array}\right.$$

Die beiden Reihen in 1) und 2) kann man sich entstanden denken aus der Doppelreihe

$$\begin{array}{llllllll}
1 + 2x - 2x^2 & & & & & & \\
& + 4x^2 - 8x^3 + 4x^4 & & & & & \\
& & + 8x^3 - 24x^4 + 24x^5 - 8x^6 & & & & \\
& & & + 16x^4 - 64x^5 + 96x^6 - \dots & & & \\
& & & & + 32x^5 - 160x^6 + \dots & & \\
& & & & & + 64x^6 - \dots & \\
& & & & & & + \dots
\end{array}$$

und zwar erhält man die Reihe 1) wenn zuerst die Horizontalzeilen zusammengezogen werden, dagegen die Reihe 2) wenn man zuerst die vertical unter einander stehenden Glieder vereinigt. Falls nun x den beiden Bedingungen

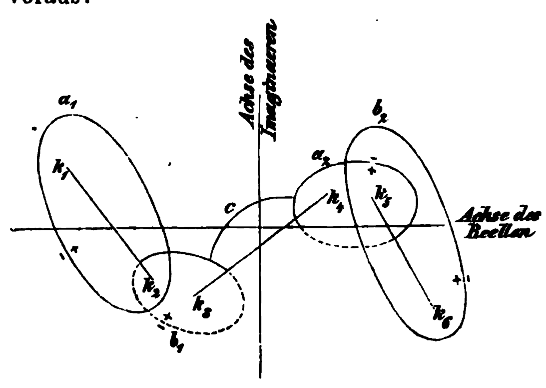
$$- 0{,}366 \dots < x < + 1{,}366 \dots$$
$$- 0{,}707 \dots < x < + 0{,}707 \dots$$

gleichzeitig genügt, d. h. wenn x zwischen $-0{,}366\dots$ und $+0{,}707\dots$ liegt, so liefert jede der beiden verschiedenen Anordnungen eine convergente Reihe, und die Summen der letzteren Reihen sind identisch; die verschiedene Anordnung hat dann keinen Einfluss auf das Endresultat. Wenn dagegen x zwar der ersten aber nicht der zweiten Bedingung genügt, d. h. im Falle $+0{,}707\dots < x < +1{,}366\dots$, so führt die erste Anordnung zu einer convergirenden, die zweite zu einer divergirenden Reihe. Für $-0{,}707\dots < x < -0{,}366\dots$ wird umgekehrt die erste Reihe divergent, die zweite convergent, und ist endlich $x < -0{,}707\dots$ oder $x > +1{,}366\dots$, so divergiren beide Reihen. Schl.

XXX. Ueber Functionen einer fünffach zusammenhängenden Fläche.

Die nachstehende Abhandlung betrachtet die Rosenhain'schen Functionen als ein Beispiel zu Riemanns „Theorie der Abel'schen Functionen". Da sie die Bekanntschaft mit dieser Theorie voraussetzt, so kommt es ihr nicht darauf an, die Riemann'schen Deductionen zu reproduciren, sondern für den vorliegenden Fall nach den von Riemann gegebenen Methoden die Formen und Identitäten wirklich aufzustellen, und begnügt sich meist, statt der Beweise Citate aus Riemanns Abhandlung zu geben. Ein Theil dieser Arbeit ist im Anfange des Jahres 1865 in Halle gedruckt, aber nur in die Hände weniger gelangt. Sie ist in 2 Theile zerfällt, deren erster die directe Darstellung der Functionen einer 5-fach zusammenhängenden Fläche durch algebraische Functionen und Integrale solcher, deren zweiter die indirecte durch überall endliche Integrale mit Hülfe der ϑ-Functionen enthält. Einiges über die zu Grunde liegende

Fläche, und eine Abbildung derselben schicken wir diesen Theilen voraus:



Wir bezeichnen die 5-fach zusammenhängende Fläche mit T. Sie sei überall 2-fach über der z-Ebene ausgebreitet und setze sich um die 6 Verzweigungspunkte $k_1, k_2, \dots k_6$ herum, aus einem Flächenaste in den andern fort. Es ist dann nach Riemann p. 7, $\overline{z - k_\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ unendlich klein erster Ordnung in T für $z = k_\varepsilon$, wenn k_ε einer der 6 Verzweigungswerthe ist. In der nebenstehenden Figur, in welcher k_1, k_2; k_3, k_4; k_5, k_6 durch (der Einfachheit wegen) sich nicht schneidende Linien verbunden sind, längs welcher die beiden Aeste der Fläche zusammenhängen sollen, ist die Zerschneidung der Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' durch das Querschnittsystem a_1, b_1; a_2, b_2 und die Linie c nach Riemanns Vorschrift (p. 43 seiner Abhandlung) dargestellt. An das Ufer der Querschnitte, welches als das positive betrachtet werden soll, ist ein $+$ Zeichen, auf das negative ein $-$ Zeichen gesetzt.

Jede einwerthige Function in T kann eindeutig durch z und die Wurzel $S_{\mu,\nu,\nu'}$ der Gleichung:

$$F(S_{\mu,\nu,\nu'}, z) = \overline{z - k_\mu} \,.\, \overline{z - k_\nu} \,.\, \overline{z - k_{\nu'}} \,.\, S_{\mu,\nu,\nu'} - \overline{z - k_{\mu'}} \,.\, \overline{z - k_\varrho} \,.\, \overline{z - k_{\varrho'}} = 0$$

dargestellt werden, und wir werden die zu einem Werthe $S_{\mu,\nu,\nu'}$ gehörenden Werthe von z durch die Gleichung $F(S_{\mu,\nu,\nu'}, z) = 0$ verknüpft nennen. Jedoch zur Darstellung der Functionen in T bedienen wir uns der Grösse

$$s = \sqrt{(\overline{z - k_1} \,.\, \overline{z - k_2} \,.\, \overline{z - k_3} \,.\, \overline{z - k_4} \,.\, \overline{z - k_5} \,.\, \overline{z - k_6}} = \sqrt{\Pi_\nu \overline{z - k_\nu}}$$

und bezeichnen einen Punkt in T durch (s, z), (s_1, z_1), (σ, ζ) etc., worin s_1, σ etc. durch z_1, ζ etc. ebenso ausgedrückt sind, als s durch z. Ferner wollen wir

$$\frac{\overline{z - k_1} \,\, \overline{z - k_2} \dots \overline{z - k_6}}{z - k_\mu} = \Pi_{(\nu)}^{(\mu)} \overline{z - k_\nu}, \quad \frac{\Pi_{(\nu)}^{(\mu)} (z - k_\nu)}{z - k_{\mu'}} = \Pi_{(\nu)}^{(\mu, \mu')} \overline{k - z_\nu}$$

setzen.

I. Directe Darstellung.

Functionen, welche in T' überall einwerthig und endlich sind, und beim Uebergange vom negativen Ufer der Querschnitte zum positiven um eine constante Grösse, den Periodicitätsmodul, wachsen, heissen In-

tegrale erster Gattung und sind lineare Functionen der beiden einfachsten:

$$w_1 = \int^s \frac{dz}{s}, \qquad w_2 = \int^s \frac{z\,dz}{s},$$

für deren Periodicitätsmoduln wir die Bezeichnung gebrauchen:

$$\begin{array}{lcccc} \text{am Schnitt} & a_1, & a_2, & b_1, & b_2, \\ w_1, & a_{11}, & a_{12}, & b_{11}, & b_{12}, \\ w_2, & a_{21}, & a_{22}, & b_{21}, & b_{22}. \end{array}$$

Setzen wir dann

$$\varDelta(a) = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{\mu,\mu'} = i\pi \frac{\partial \lg \varDelta(a)}{\partial a_{\mu,\mu'}}, \quad m_{\mu,\mu'} = \sum_{1}^{2}{}_{(\nu)} A_{\nu,\mu}\, b_{\nu,\mu'}$$

$$u_1 = \sum_{1}^{2}{}_{(\nu)} A_{\nu 1}\, w_\nu, \quad u_2 = \sum_{1}^{2}{}_{\nu} A_{\nu 2}\, w_\nu,$$

so sind die Periodicitätsmoduln von u_1, u_2, welcher Integrale wir uns meist bedienen, folgende

$$\begin{array}{lcccc} \text{am Schnitt} & a_1, & a_2, & b_1, & b_2, \\ u_1, & i\pi, & 0, & m_{11}, & m_{12}, \\ u_2, & 0, & i\pi, & m_{21}, & m_{22}. \end{array}$$

Bestimmt man die Anfangswerthe dieser Integrale nach Riemann p. 48, so fliessen hieraus für die Verzweigungspunkte Werthe, wie sie sich in der angehängten Tabelle I berechnet finden.

Hieraus leiten wir durch Differenziren nach den Verzweigungswerthen einige specielle Integrale zweiter Gattung ab, vermittelst welcher sodann wir die allgemeinen zweiter und dritter Gattung leicht darstellen. Es hat $\frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k_\mu}$ die Periodicitätsmoduln Null an den Schnitten a_1, a_2, $\frac{\partial m_{\nu 1}}{\partial k_\mu}$, $\frac{\partial m_{\nu 2}}{\partial k_\mu}$ an den Schnitten b_1, b_2, und wird im Windungspunkt k_μ unendlich gross erster Ordnung.

Mit den Bezeichnungen $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $t(\varepsilon_1)$ für Integrale dritter und zweiter Gattung, die in Puncten ε_1, ε_2 logarithmisch resp. in ε_1 erster Ordnung unendlich gross werden, verbinden wir für die darin vorkommenden willkürlichen Constanten feste Bedingungen. Wir setzen nämlich

$$\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, (s,z)) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\sigma \,.\, \overline{z-k_\mu} \,.\, \overline{z-k_{\mu'}} + s \,.\, \overline{\zeta-k_\mu} \,.\, \overline{\zeta-k_{\mu'}}}{2\sigma \,.\, \overline{z-k_\mu} \,.\, \overline{z-k_{\mu'}} \,.\, \overline{\zeta-z}}\, d\zeta$$

$$+ \frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k_\mu} \,.\, \frac{\Pi_s^{(\mu\mu')}\, \overline{k_\nu - k_s} \,.\, \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\overline{\zeta - k_{\mu'}}}{2\sigma}\, d\zeta}{A_{1\nu} + A_{2\nu} k_\mu}$$

$$+ \frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k_{\mu'}} \,.\, \frac{\Pi_s^{(\mu\mu')}\, \overline{k_{\mu'} - k_s} \,.\, \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\overline{\zeta - k_\mu}}{2\sigma}\, d\zeta}{A_{1\nu} + A_{2\nu} k_{\mu'}}.$$

Es hat dann $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bei a_1, a_2 die Periodicitätsmoduln Null und wird in ε_1, ε_2 wie $\lg \overline{z - z_1}$ resp. $-\lg \overline{z - z_2}$ unendlich und unterscheidet sich auf beiden Ufern einer von ε_1 nach ε_2 durch das Innere von T' führenden Linie um $2\pi i$. Hieraus fliesst sofort $t(\varepsilon_1)$ wenn wir $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ setzen und durch $d\varepsilon_1$ dividiren:

$$t(\varepsilon_1, (s, z)) = \frac{\Pi_e^{(\mu\mu')}\overline{k_\mu - k_e} \,.\, \overline{z - k_{\mu'}}}{A_{1\nu} + A_{2\nu} k_\mu \,.\, 2 s_1} \,.\, \frac{\partial u_\nu(s, z)}{\partial k_\mu}$$
$$+ \frac{\Pi_e^{(\mu\mu')}\overline{k_{\mu'} - k_e} \,.\, \overline{z_1 - k_\mu}}{A_{1\nu} + A_{2\nu} k_{\mu'} \,.\, 2 s_1} \,.\, \frac{\partial u_\nu(s, z)}{\partial k_{\mu'}}$$
$$\frac{s_1 \,.\, \overline{z - k_\mu} \,.\, \overline{z - k_{\mu'}} + s \,.\, \overline{z_1 - k_\mu} \,.\, \overline{z_1 - k_{\mu'}}}{2 s_1 \,.\, \overline{z - k_\mu} \,.\, \overline{z - k_{\mu'}} \,.\, \overline{z_1 - z}},$$

worin (s_1, z_1) für ε_1 gesetzt ist. Eine einwerthige Function in T muss nach Riemann pag. 23 wenigstens zweimal unendlich gross (und klein) erster Ordnung werden und ist von der Form $\frac{z - z_1}{z - z_2} \,.\, C$*). Nur in 15 Fällen und deren Reciproken fallen die Punkte Unendlich und ebenso die Punkte Null zusammen, wenn nämlich z_1, z_2 Verzweigungspunkte sind. Die Quadratwurzel einer der letzteren Functionen ist eine in T' ebenfalls einwerthige Function, gewinnt aber beim Uebergange über die Querschnitte wenigstens einmal den Factor -1.

Eine in T' einwerthige Function, die nur in 2 oder weniger Punkten unendlich gross (und klein) erster Ordnung wird, lässt sich allgemein zu reden und abgesehen von einem constanten Factor nur auf eine Weise so bestimmen, dass sie an den Querschnitten bestimmte Factoren ± 1 gewinnt. (Riem. p. 53.) Der Ausnahmefall ist $\overline{z - z_1} : \sqrt{(\overline{z - k_\mu} \,.\, \overline{z - k_{\mu'}})}$. Wird eine solche Function für $(s, z) = (-s_1, z_1)$, $(-s_2, z_2)$ unendlich gross erster Ordnung, so ist sie in folgender Form enthalten:

$$A \,.\, \sqrt{\frac{\overline{z - k_\mu} \,.\, \overline{z_1 - k_\mu} \,.\, \overline{z_2 - k_\mu}}{\overline{z - k_{\mu'}} \,.\, \overline{z_1 - k_{\mu'}} \,.\, \overline{z_2 - k_{\mu'}}}} \,.\, \begin{vmatrix} 1, & z, & z^2, & z^3, & s \\ 1, & z_1, & z_1^2, & z_1^3, & s_1 \\ 1, & z_2, & z_2^2, & z_2^3, & s_2 \\ 1, & k_\mu, & k_\mu^2, & k_\mu^3, & 0 \\ 1, & k_{\mu'}, & k_{\mu'}^2, & k_{\mu'}^3, & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & z, & z^2, & z^3 \\ 1, & z_1, & z_1^2, & z_1^3 \\ 1, & z_2, & z_2^2, & z_2^3 \\ 1, & k_\mu, & k_\mu^2, & k_\mu^3 \end{vmatrix},$$

worin wir $\frac{1}{A^2} = (k_\mu - k_{\mu'})^2 \,.\, \sqrt{\Pi_e^{(\mu\mu')}\overline{k_\mu - k_e} \,.\, \Pi_e^{(\mu\mu')}\overline{k_{\mu'} - k_e}}$ setzen wollen und dann diese Function mit $\Phi_{\mu\mu'}$ bezeichnen.

---

*) Man hat hierfür einen besondern Beweis für nöthig erachtet, welcher auf genauer Zählung der Constanten einer Function in T beruht. Diese Anzahl $(2\mu - p + 1)$ ist jedoch in ganz allgemein gültiger Weise von Riemann pag. 23 gegeben, weshalb wir nicht darauf einzugehen brauchen.



Ist hierin $(s_1, z_1) = (\sigma, \zeta)$, $(s_2, z_2) = (0, k_{\mu'})$, so wollen wir $\varphi_{\mu\mu'}$ schreiben, es ist dann:

$$\varphi_{\mu\mu'} = \sqrt{\frac{\overline{z-k_\mu}\,.\,\overline{\zeta-k_\mu}}{\overline{z-k_{\mu'}}\,.\,\overline{\zeta-k_{\mu'}}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{\Pi_s^{(\mu\mu')}(k_{\mu'}-k_s)}{\Pi_s^{\mu\mu'}\ (k_\mu-k_s)}}.$$

Ist aber $(s_1, z_1) = (0, k_\nu)$ $(s_2, z_2) = (0, k_\nu)$, so schreiben wir

$$\Psi_{(\nu\nu')}^{(\varrho\varrho')} = \sqrt{\left(\frac{z-k_\varrho}{z-k_\nu}\cdot\frac{z-k_{\varrho'}}{z-k_{\nu'}}\right)}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{k_\mu-k_\nu}{k_\mu-k_\varrho}\cdot\frac{k_{\mu'}-k_\nu}{k_{\mu'}-k_\varrho}\cdot\frac{k_\mu-k_{\nu'}}{k_\mu-k_{\varrho'}}\cdot\frac{k_{\mu'}-k_{\nu'}}{k_{\mu'}-k_{\varrho'}}\right)}.$$

Die Darstellung der Function Φ durch φ-Functionen ist in folgender Formel enthalten und kann als Additionstheorem der ultra elliptischen Functionen angesehen werden:

$$\Phi_{\mu\mu'} = B\cdot\begin{vmatrix}\Pi_\nu^{\mu\mu'}\varphi_{\nu\mu'}(s, z), & \varphi_{\mu\mu'}(s, z), & \varphi^3_{\mu\mu'}(s, z)\\ \Pi_\nu^{\mu\mu'}\varphi_{\nu\mu'}(s_1, z_1), & \varphi_{\mu\mu'}(s_1, z_1), & \varphi^3_{\mu\mu'}(s_1, z_1)\\ \Pi_\nu^{(\mu\mu')}\varphi_{\nu\mu'}(s_2, z_2), & \varphi_{\mu\mu'}(s_2, z_2), & \varphi^3_{\mu\mu'}(s_2, z_2)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, & \varphi^2_{\mu\mu'}(z), & \varphi^4_{\mu\mu'}(z)\\ 1, & \varphi^2_{\mu\mu'}(z_1), & \varphi^4_{\mu\mu'}(z_1)\\ 1, & \varphi^2_{\mu\mu'}(z_2), & \varphi^4_{\mu\mu'}(z_2)\end{vmatrix},$$

worin $B^2 = \Pi_\nu^{(\mu\mu')}\varphi_{\mu\mu'}(z = k_\nu) : \Pi_\nu^{\mu\mu'}\varphi_{\nu\mu'}(z = k_\mu)$.

Die Factoren ± 1 an den Querschnitten hängen von $\mu\mu'$ ab und sind in der Tabelle II enthalten.

II. Darstellung durch ϑ-Functionen.

Zur Darstellung der Functionen in T durch $u_1\, u_2$ bedient man sich der ϑ-Functionen, deren Moduln m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} sind. Wir bezeichnen mit $\vartheta(v_1^{(\nu)}, v_2^{(\nu)})$ eine solche Function, in welcher $v_1^{(\nu)} = u_1(s_\nu, z_\nu) + u_1(s, z) + u_1(\sigma, \zeta)$, $v_2^{(\nu)} = u_2(s_\nu, z_\nu) + u_2(s, z) + u_2(\sigma, \zeta)$ gesetzt wird. Bei den von uns gewählten Anfangswerthen der Integrale $u_1\, u_2$ ist $\vartheta(u_1, u_2)$ identisch Null. Es ist nach Riem. pag 50

$$1)\quad \lg(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) - \lg(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) = \pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, (\sigma, \zeta)) + \pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, (sz))$$

worin die π-Functionen die im ersten Abschnitt wirklich dargestellten Functionen bis auf eine in dieselbe einzurechnende, von ε_1, ε_2 abhängende Constante sind. Ist $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + d\varepsilon_1$, so erhält man:

$$2)\qquad \frac{d\lg\vartheta(v_1^{(1)}, v_2^{(1)})}{dz_1} = t(\varepsilon_1, (\sigma, \zeta)) + t(\varepsilon_1, (s, z))$$

worin die in t eingerechnete, von ε_1 abhängende Constante dadurch bestimmt wird, dass man $v_1^{(1)} = 0$, $v_1^{(2)} = 0$ setzt, wodurch die linke Seite einen leicht berechenbaren Werth erhält. Dies geschieht dadurch, dass man für (σ, ζ) (s, z) die dem Punkte (s_1, z_1) durch die Gleichung $F(S_{\mu,\nu,\nu'}, z) = 0$ verknüpften Werthepaare setzt, wobei μ, ν, ν' passend zu wählen sind. Der Beweis hiervon wird sich später ergeben. Ist die Constante für diesen Fall bestimmt, so erhält man durch Integration zwischen den Grenzen ε_1, ε_2 auch die, welche in $\pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ eingerechnet wurde.

Setzen wir in 2) für s_1, z_1 den Verzweigungswerth k_μ so können die ganzen Zahlen h_1, h_2 leicht so bestimmt werden, dass die Gleichung statthat:

$$3)\quad \frac{d\lg(e^{h_1 v_1 + h_2 v_2}\,.\,\vartheta)}{dv_1}(A_{11}+A_{21}k_\mu)+\frac{d\lg e^{h_1 v_1 + h_2 v_2}\,.\,\vartheta}{dv_2}(A_{12}+A_{22}k_\mu)$$
$$=\frac{\Pi_\nu^{(\mu)}\overline{k_\mu - k_\nu}}{z(A_{1\nu'}+A_{2\nu'}k_\mu}\;\frac{d(u_{\nu'}(s,z)+u_{\nu'}(\sigma,\zeta)}{dk_\mu}.$$

Denn da die Grössen sich nur um eine Constante unterscheiden können, so folgt zunächst durch Vergleichung der Periodicitätsmoduln:

$$4)\quad \frac{4(A_{1\nu}+A_{2\nu}k_\mu)(A_{1\nu'}+A_{2\nu'}k_\mu)}{\Pi_s^{(\mu)}(k_\mu - k_s)}=\frac{dm_{\nu\nu'}}{dk_\mu}.$$

Differenziren wir die Gleichung 2) nach z, vertauschen z und z_1, setzen dann $z_1 = k_\mu$, so erhalten wir dasselbe Resultat, als wenn wir 3) nach z differenziren, hieraus entspringt die bemerkenswerthe Doppelgleichung:

$$5)\quad \frac{\partial^2 \lg\vartheta}{\partial v_1\partial z}(A_{11}+A_{21}k_\mu)\;\frac{\partial^2\lg\vartheta}{\partial v_2\partial z}(A_{12}+A_{22}k_\mu)$$
$$=\frac{\Pi_\nu^{(\mu)}\overline{k_\mu - k_\nu}}{A_{1\nu'}+A_{2\nu'}k_\mu}\cdot\frac{\partial^2 u_{\nu'}(s,z)}{\partial k_\mu\cdot\partial z}=\lim_{z_1=k_\mu} s_1\,\frac{\partial t(\varepsilon,(s_1,z_1))}{\partial z_1}$$

worin ε den Punkt (s, z) bedeutet.

Mit diesen Hülfsmitteln deducirt man leicht die Gleichung:

$$6)\quad \tfrac{1}{2}\sum_1^2{}_{\varrho\varrho'}\frac{\partial\lg\vartheta(v_1,v_2)}{\partial v_\varrho\cdot\partial v_{\varrho'}}\frac{\partial m'_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu}=-\frac{\partial\lg}{\partial k_\mu}\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1(s,z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_1(\sigma,\zeta)}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial u_2(s,z)}{\partial z}\;\;\frac{\partial u_2(\sigma,\zeta)}{\partial\zeta}\end{vmatrix}$$
$$=-\frac{\partial\lg}{\partial k_\mu}\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{vmatrix}+\frac{\partial\lg\sqrt{\overline{z-k_\mu}\cdot\overline{\zeta-k_\mu}}}{\partial k_\mu}$$

worin $v_\nu = u_\nu(k_\mu) + u_\nu(s, z) + u_\nu(\sigma, \zeta)$ zu setzen ist. Für z und ζ wählen wir sodann Werthe, für welche $v_1, v_2 \equiv g_1\frac{i\pi}{2}, g_2\frac{i\pi}{2}$ wird. Man findet, dass dies für Verzweigungswerthe $z = k_\nu$, $\zeta = k_{\nu'}$ welche von k_μ verschieden sind, geschieht. Es folgt:

$$7)\quad d\lg\left\{\vartheta\left(g_1\frac{i\pi}{2},\;g_2\frac{i\pi}{2}\right)\sqrt{\Delta(A)}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{4}\,d\lg(\overline{k_\mu - k_\nu}\cdot\overline{k_\mu - k_{\nu'}}\cdot\overline{k_\nu - k_{\nu'}}\cdot\overline{k_{\mu'}-k_\varrho}\cdot\overline{k_{\mu'}-k_{\varrho'}}\cdot\overline{k_\varrho - k_{\varrho'}})$$
$$\text{oder }\sqrt{\Delta(A)}\,.\,\vartheta\left(g_1\frac{i\pi}{2},g_2\frac{i\pi}{2}\right)$$
$$=C\cdot\sqrt[4]{(\overline{k_\mu - k_\nu}\cdot\overline{k_\mu - k_{\nu'}}\cdot\overline{k_\nu - k_{\nu'}}\cdot\overline{k_{\mu'}-k_\varrho}\cdot\overline{k_{\mu'}-k_{\varrho'}}\cdot\overline{k_\varrho - k_{\varrho'}})}$$

worin $\mu\nu\nu'$; $\mu'\varrho\varrho'$ solche 2 Combinationen sind, für welche

$v_1, v_2 \equiv g_1\frac{i\pi}{2}, g_2\frac{i\pi}{2}$ wird, z. B. $\mu, \nu, \nu' = 1, 3, 5$, $\mu', \varrho, \varrho' = 2, 4, 6$ für $g_1 = 0$, $g_2 = 0$

etc. Setzt man $k_2 = k_3$, $k_4 = k_5$ so werden die $a_{\mu\mu'}$ und daher die $A_{\mu\mu'}$

berechenbar und $\vartheta(0, 0) = 1$ woraus $C = 2$ folgt, und nur noch das Vorzeichen, wohl am besten für reelle k, zu bestimmen ist.

Es ist nach Riemann pag. 54, wenn die ganzen Zahlen h, g gemäss $\mu\mu'$ bestimmt werden:

$$8)\ \Phi_{\mu\mu'} = \frac{e^{-h_1 v_1 - h_2 v_2 + \sum\limits_{1}^{2}{}_{(\nu\nu')} h_\nu h_{\nu'} \frac{m_{\nu\nu'}}{4} + \sum\limits_{1\nu}^{2} h_\nu g_\nu \frac{i\pi}{4}} \cdot \vartheta\left(v_1^{(1)} - \sum\limits_{1\nu}^{2} h_\nu \frac{m_{1\nu}}{2} - g_2 \frac{i\pi}{2},\ v_2^{(1)} - \sum\limits_{1\nu}^{2} h_\nu \frac{m_{2\nu}}{2} - g_2 \frac{i\pi}{2}\right)}{\vartheta(v_1^{(1)}, v_2^{(1)})}.$$

Man kann aber auch vermöge des im ersten Theile gegebenen Additionstheorems speciellere ϑ-Functionen zur Darstellung anwenden, in welchen $(s_1, z_1) = (0, k_\mu)$ ist, nämlich:

$$9)\ \varphi_{\mu\mu'} = \frac{e^{-\sum\limits_{1}^{2} h_\nu v_\nu - \sum\limits_{1\nu\nu'}^{2} h_\nu h_{\nu'} \frac{m_{\nu\nu'}}{4} + (g_1 h_1 + g_2 h_2) \frac{i\pi}{4}} \cdot \vartheta\left(v_1 - \sum\limits_{1}^{2} h_\nu \frac{m_{1\nu}}{2} - g_1 \frac{i\pi}{2},\ v_2 - \sum\limits_{1}^{2} h_\nu \frac{m_{2\nu}}{2} - g_2 \frac{i\pi}{2}\right)}{\vartheta(v_1, v_2)};$$

In welcher Gleichung jedoch hg so zu wählen sind, dass der Zähler für $(s, z) = (-\sigma, \zeta)$ verschwindet, was immer möglich ist, auch kann dann für (σ, ζ) ein Verzweigungspunkt gewählt werden.

Nimmt man in $\Phi_{\mu\mu'}$, $(s_1, z_1) = (-s, z)$, $(\sigma, \zeta) = (0, k_\mu')$ so kann man hg so wählen, dass für diese Werthe die Argumente im Zähler $v_1, v_2 = 0$, 0 werden. Für $u_1(z)$, $+u_1(k_{\mu'})$ kann man aber $u_1(\sigma_1, \zeta_1)$, $+u_2(\sigma_2, \zeta_2)$ setzen, wenn $(-\sigma_1, \zeta_1)$, $(-\sigma_2, \zeta_2)$ die dem Werthepaare (s_1, z_1) durch die Gleichung $F(S, z) = 0$ verknüpfte Werthepaare sind. Hierin liegt ein früher verlangter Beweis.

Wir fügen noch in der Tabelle III. die Berechnung der Werthe hg für $\mu\mu'$ an, welche mit der 2. Tabelle verglichen werden kann, wenn man beachtet, dass $h_\nu = 0$, 1 den Factoren $+1$, -1 bei a_ν und $g_\nu = 0$, 1 den $+1$, -1 bei b_ν entspricht.

Tabelle I.

	k_1	k_2	k_3	k_4
$2u_1$	$m_{11} + m_{12}$,	m_{12},	$-i\pi + m_{12}$,	$-i\pi - m_{11} + m_{12}$,
$2u_2$	$-i\pi + m_{21} + m_{22}$,	$-i\pi + m_{22}$,	$-i\pi + m_{22}$,	$-m_{21} + m_{22}$,

k_5	k_6
$-i\pi - m_{11} + 2m_{12}$,	$-i\pi - m_{11} + 2m_{12}$,
$-m_{21} + 2m_{22}$,	$-i\pi - m_{11} + 2m_{22}$.

Tabelle II.

$(\mu\mu')$ = bei	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,4	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
a_1	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+
a_2	+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+
b_1	+	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+
b_2	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+	+	−	−

Tabelle III.

$\mu\mu'=$	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
h_1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
h_2	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
g_1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
g_2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1

Dr. Thomae.

XXXI. Note über ein Theorem der ebenen Geometrie.

Auf den Umfängen zweier ebenen Curven C_1 und C_2 bewege sich eine Gerade von constanter Länge, ein fester Punkt derselben beschreibt dann eine dritte Curve C. Sei P_1 ein Punkt der Curve C_1, P_2 ein Punkt der Curve C_2, so dass $P_1P_2 = 2p$, wo p eine Constante bedeutet. Ist M der Halbirungspunkt der Geraden P_1P_2, so lässt sich ein fester Punkt P dieser Geraden durch seine Abstände $P_1P = p + m$, $PP_2 = p - m$ von den beiden Punkten P_1 und P_2 bestimmen, wo m eine Constante ist. Bezeichnet man durch ω den Winkel, welchen die Gerade P_1P_2 mit der Abscissenaxe bildet, sind ferner x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 die respectiven Coordinaten von P, P_1, P_2, so bestehen zwischen denselben die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x_1 = x - (p+m)\cos\omega, & x_2 = x + (p-m)\cos\omega, \\ y_1 = y - (p+m)\sin\omega, & y_2 = y + (p-m)\sin\omega. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die nachstehenden ersetzen:

$$2)\quad \begin{cases} 2x = \left(1 - \frac{m}{p}\right) x_1 + \left(1 + \frac{m}{p}\right) x_2, \\ 2y = \left(1 - \frac{m}{p}\right) y_1 + \left(1 + \frac{m}{p}\right) y_2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4p^2. \end{cases}$$

Eliminirt man x_1, y_1; x_2, y_2 zwischen den vorstehenden Gleichungen und den Gleichungen der beiden Curven C_1 und C_2, so ergiebt sich die Gleichung der Curve C. Seien $\partial s, \partial s_1, \partial s_2$ die Bogenelemente der Curven C, C_1, C_2, die Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 können dann respective als Functionen von s, s_1, s_2 angesehen werden. Die beiden ersten Gleichungen 2) geben dann s_1, s_2 als Functionen von s, durch deren Substitution die dritte Gleichung 2) identisch wird. Die Winkel, welche die Tangenten in den Punkten P, P_1, P_2 der Curven C, C_1, C_2 mit der Abscissenaxe und der Geraden P_1P_2 bilden, seien respective ψ, ψ_1, ψ_2 und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$. Zwischen diesen Winkeln finden offenbar folgende Gleichungen statt:

$$\psi = \varphi + \omega, \quad \psi_1 = \varphi_1 + \omega, \quad \psi_2 = \varphi_2 + \omega.$$

Mit Rücksicht auf die vorstehenden Gleichungen hat man:



$$3)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = \cos(\varphi + \omega), & \frac{\partial y}{\partial s} = \sin(\varphi + \omega), \\ \frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \cos(\varphi_1 + \omega), & \frac{\partial y_1}{\partial s_1} = \sin(\varphi_1 + \omega), \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \cos(\varphi_2 + \omega), & \frac{\partial y_2}{\partial s_2} = \sin(\varphi_2 + \omega). \end{cases}$$

Sieht man in den Gleichungen 1) s_1 und s_2 als Functionen von s an, differentiirt diese Gleichungen nach s, so folgt mittelst der Gleichungen 3):

$$\frac{\partial s_1}{\partial s}\cos(\varphi_1 + \omega) = \cos(\varphi + \omega) + (p + m)\sin\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial s}\sin(\varphi_1 + \omega) = \sin(\varphi + \omega) - (p + m)\cos\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial s}\cos(\varphi_2 + \omega) = \cos(\varphi + \omega) - (p - m)\sin\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial s}\sin(\varphi_2 + \omega) = \sin(\varphi + \omega) + (p - m)\cos\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial s},$$

oder:

$$4)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial s_1}{\partial s}\cos\varphi_1 = \cos\varphi, \quad \frac{\partial s_1}{\partial s}\sin\varphi_1 = \sin\varphi - (p + m)\frac{\partial \omega}{\partial s}, \\ &\frac{\partial s_2}{\partial s}\cos\varphi_2 = \cos\varphi, \quad \frac{\partial s_2}{\partial s}\sin\varphi_2 = \sin\varphi + (p - m)\frac{\partial \omega}{\partial s}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \operatorname{tang}\varphi - \frac{p + m}{\cos\varphi}\frac{\partial \omega}{\partial s}, \quad \operatorname{tang}\varphi_2 = \operatorname{tang}\varphi + \frac{p - m}{\cos\varphi}\frac{\partial \omega}{\partial s},$$

oder:

$$2\operatorname{tang}\varphi = \left(1 - \frac{m}{p}\right)\operatorname{tang}\varphi_1 + \left(1 + \frac{m}{p}\right)\operatorname{tang}\varphi_2.$$

Fällt der Punkt P mit Punkt M zusammen, so ist $m = 0$, die vorstehende Gleichung wird dann einfacher:

$$2\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2.$$

Sind x_0, y_0 beliebige Constanten, so geben die Gleichungen 1):

$$(x_1 - x_0)\frac{\partial y_1}{\partial s} - (y_1 - y_0)\frac{\partial x_1}{\partial s} = \left\{(x_1 - x_0)\frac{\partial y_1}{\partial s_1} - (y_1 - y_0)\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right\}\frac{\partial s_1}{\partial s}$$

$$= (x - x_0)\frac{\partial y}{\partial s} - (y - y_0)\frac{\partial x}{\partial s} + (p + m)^2\frac{\partial \omega}{\partial s}$$

$$-(p + m)\left\{\cos\omega\frac{\partial y}{\partial s} - \sin\omega\frac{\partial x}{\partial s} + (x - x_0)\cos\omega\frac{\partial \omega}{\partial s} + (y - y_0)\sin\omega\frac{\partial \omega}{\partial s}\right\},$$

$$(x_2 - x_0)\frac{\partial y_2}{\partial s} - (y_2 - y_0)\frac{\partial x_2}{\partial s} = \left\{(x_2 - x_0)\frac{\partial y_2}{\partial s_2} - (y_2 - y_0)\frac{\partial y_2}{\partial s_2}\right\}\frac{\partial s_2}{\partial s}$$

$$= (x - x_0)\frac{\partial y}{\partial s} - (y - y_0)\frac{\partial x}{\partial s} + (p - m)^2\frac{\partial \omega}{\partial s}$$

$$+(p - m)\left\{\cos\omega\frac{\partial y}{\partial s} - \sin\omega\frac{\partial x}{\partial s} + (n - n_0)\cos\omega\frac{\partial \omega}{\partial s} + (y - y_0)\sin\omega\frac{\partial \omega}{\partial s}\right\}.$$

Multiplicirt man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $p - m$, die zweite mit $p + m$, bildet die Summe der Producte, so folgt:

$$
5)\qquad
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{m}{p}\right)\left\{(x_1-x_0)\frac{\partial y_1}{\partial s_1}-(y_1-y_0)\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right\}\frac{\partial s_1}{\partial s}\\
&+\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{m}{p}\right)\left\{(x_2-x_0)\frac{\partial y_2}{\partial s_2}-(y_2-y_0)\frac{\partial y_2}{\partial s_2}\right\}\frac{\partial s_2}{\partial s}\\
&-\left\{(x-x_0)\frac{\partial y}{\partial s}-(y-y_0)\frac{\partial x}{\partial s}\right\}=(p^2-m^2)\frac{\partial \omega}{\partial s}.
\end{aligned}
$$

Auf der Curve C_1 entspreche jedem Punkt des Bogens $P_1 R_1$ ein Punkt des Bogens $P_2 R_2$ der Curve C_2, so dass die Distanz der beiden Punkte gleich $2p$ ist. Der Punkt P beschreibt dann einen Bogen PR. In der Ebene werde ein beliebiger Punkt O angenommen, dessen Coordinaten x_0, y_0 sein mögen. Verbindet man diesen Punkt O mit den beiden Endpunkten von jedem der drei Bogen PR, $P_1 R_1$ und $P_2 R_2$, so entstehen drei gemischtlinige Dreiecke, deren Inhalte respective S, S_1 und S_2 seien. Für S, S_1, S_2 hat man die folgenden Gleichungen:

$$
6)\qquad
\begin{aligned}
\pm\, 2S &= \int^{s}\left\{(x-x_0)\frac{\partial y}{\partial s}-(y-y_0)\frac{\partial x}{\partial s}\right\}\partial s,\\
\pm\, 2S_1 &= \int^{s}\left\{(x_1-x_0)\frac{\partial y_1}{\partial s_1}-(y_1-y_0)\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right\}\partial s_1,\\
\pm\, 2S_2 &= \int^{s}\left\{(x_2-x_0)\frac{\partial y_2}{\partial s_2}-(y_2-y_0)\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\right\}\partial s_2.
\end{aligned}
$$

In den vorstehenden Gleichungen ist links das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem die rechte Seite positiv oder negativ ist. Sieht man s_1, s_2 als Functionen von s an, so erstrecken sich die Integrationen in allen drei Integralen über dieselben Werthe von s. Die Gleichung 5) lässt sich wegen der Gleichungen 6) einfacher schreiben:

$$
7)\qquad \pm\left(1-\frac{m}{p}\right)\frac{\partial S_1}{\partial s}\pm\left(1+\frac{m}{p}\right)\frac{\partial S_2}{\partial s}\mp 2\frac{\partial S}{\partial s}=(p^2-m^2)\frac{\partial \omega}{\partial s}.
$$

Man überzeugt sich leicht durch einen besondern Fall, dass in der vorstehenden Gleichung das obere Zeichen zu nehmen ist. Sind z. B. die Curven C_1, C_2 Parallelcurven, so ist auch die Curve C den Curven C_1 und C_2 parallel, eine einfache Betrachtung zeigt dann, dass die linke Seite der Gleichung 7) positiv ist. Durch Integration nach s folgt aus 7):

$$
8)\qquad \left(1-\frac{m}{p}\right)S_1+\left(1+\frac{m}{p}\right)S_2-2S=(p^2-m^2)\,.\,\theta,
$$

wo θ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinien der Punkte P_1, P_2 und der Punkte R_1, R_2 einschliessen. Nimmt man auf der Geraden von constanter Länge drei feste Punkte an, setzt successive $\frac{m}{p} = \alpha, \beta, \gamma$, wo α, β, γ positive oder negative ächte Brüche sind, bezeichnet die ent-

sprechenden Flächenräume S durch A, B, C, so giebt die Gleichung 8):

$$(1-\alpha)\,S_1 + (1+\alpha)\,S_2 - 2A = p^2\,(1-\alpha^2)\,\theta,$$
$$(1-\beta)\,S_1 + (1+\beta)\,S_2 - 2B = p^2\,(1-\beta^2)\,\theta,$$
$$(1-\gamma)\,S_1 + (1+\gamma)\,S_2 - 2C = p^2\,(1-\gamma^2)\,\theta.$$

Durch Elimination von S_1 und S_2 folgt hieraus:

$$A(\beta-\gamma)+B(\gamma-\alpha)+C(\alpha-\beta)=\tfrac{1}{2}p^2\theta\left\{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)\right\}.$$

Sind die beiden Curven C_1 und C_2 geschlossene Curven, bezeichnet man ihre Inhalte durch Σ_1 und Σ_2, ist dann Σ der Inhalt der Curve C, so giebt die Gleichung 8):

$$\left(1-\frac{m}{p}\right)\Sigma_1 + \left(1+\frac{m}{p}\right)\Sigma_2 - 2\,\Sigma = 2\,\pi\,(p^2-m^2).$$

Diese Gleichung gilt auch offenbar noch, wenn die Curven C_1 und C_2 zusammenfallen, also $\Sigma_2 = \Sigma_1$ ist. In diesem Fall ist:

$$\Sigma_1 - \Sigma = (p^2-m^2)\,\pi = (p+m)\,(p-m)\,\pi.$$

Diese Gleichung enthält folgenden Satz:

> Durchlaufen die Endpunkte einer Geraden von constanter Länge eine geschlossene Curve C_1, so beschreibt ein fester Punkt derselben eine Curve C. Der Inhalt von C ist gleich dem Inhalt von C_1 vermindert um den Inhalt einer Ellipse, deren halbe Hauptaxen die beiden Segmente sind, in welche der feste Punkt die Gerade von constanter Länge theilt.

Die Gleichung 8) giebt noch zu einigen analogen Sätzen Veranlassung, welche aber weniger einfach wie der vorstehende sind.

Dr. A. Enneper.

XXXII. Ueber die Anziehung elliptischer und kreisförmiger Scheiben.

In einer Abhandlung „über die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale" (Crelle's Journal, Band 60, p. 321), hat Herr Mehler über die Anziehung eines vollen Ellipsoides und einer von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzten Schale eine Reihe bemerkenswerther Sätze aufgestellt für den Fall, dass die Elementaranziehung umgekehrt proportional irgend einer geraden Potenz der Entfernung erfolgt. Eben so einfache und ganz ähnliche Sätze lassen sich über die Anziehung einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe und eines von zwei ähnlichen Ellipsen begrenzten Ringes aufstellen, für den Fall, dass die Anziehung umgekehrt proportional einer ungeraden Potenz der Entfernung ist. Man gelangt sehr leicht zu diesen Sätzen mit Benutzung der von Herrn Mehler für das Potential des Ellipsoides und der von mir (Crelle's Journal, Band 65, p. 62) für die Componente eines endlichen elliptischen Cylinders in der Richtung seiner Axe aufge-

stellten Formeln. Es findet nämlich ein merkwürdiger Zusammenhang Statt, erstens zwischen der Componente eines endlichen elliptischen Cylinders und dem Potential einer elliptischen Scheibe, zweitens zwischen dem Potential eines unendlichen elliptischen Cylinders und dem Potential einer elliptischen Scheibe. Ich werde zunächst diese beiden Relationen entwickeln, und dann dieselben benutzen, um die für den unendlichen und endlichen Cylinder gültigen Formeln auf das Scheibenpotential zu übertragen. Darauf werde ich die für die Anziehung unendlich dünner Scheiben aufgestellten Formeln auf die Anziehung der Scheiben von endlicher Dicke anwenden, insofern letztere ein einfaches Resultat darbieten.

1. Unendlich dünne Scheiben.

Relationen zwischen dem Scheibenpotential einerseits und dem Potential des unendlichen sowie der Componente des endlichen Cylinders andrerseits. — Allgemeine Formeln.

Die Halbaxen einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe seien α, β, ihre Dicke dx. Die constante Dichtigkeit des Stoffes, woraus die Scheibe besteht, das heisst die Zahl, mit welcher man irgend ein Volumen multipliciren muss, um die darin enthaltene Masse zu erhalten, nenne ich δ. Alsdann ist offenbar $\delta \,.\, dx$ der Factor, mit welchem man das Flächenelement der „mit Masse belegten“ Scheibe multipliciren muss, um die darauf befindliche Masse zu erhalten. Die im Mittelpunkt der Scheibe senkrecht auf derselben stehende gerade Linie sei die X-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems; die Entfernung des Anfangspunktes vom Mittelpunkt der Scheibe sei x; die Y- und Z-Axe sollen die Richtung der Halbaxen α und β der Scheibe haben. Die Coordinaten des von der Scheibe angezogenen Punktes seien a, b, c. Bezeichnen wir endlich das Potential der Scheibe, wenn die Elementaranziehung umgekehrt proportional der p^{ten} Potenz der Entfernung ist, mit V_p, und nehmen die Kraft als Einheit, mit der die in einem Punkt concentrirt gedachte Masseneinheit den Punkt (a, b, c) in der Entfernung 1 anzieht, dann ist

$$1)\qquad V_p = \frac{\delta\, dx}{p-1} \int\!\!\int \frac{dy\, dz}{(r^2 + k)^{\frac{p-1}{2}}},$$

wo $r^2 = (y-b)^2 + (z-c)^2$, $k = (x-a)^2$.

Die Integrationen erstrecken sich auf alle Werthe y, z, die der Ungleichheit

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} < 1$$

genügen. Es ist ferner die Componente der Attraction X'_p eines elliptischen Cylinders, dessen Grundfläche die anziehende Scheibe, dessen Höhe x, und dessen Dichtigkeit δ' ist, in der Richtung seiner

Axe*)

2) $$X'_p = \Big|_{k=a^2}^{k=(x-a)^2} \frac{\delta'}{p-1} \iint \frac{dy\,dz}{(r^2+k)^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Durch Vergleichung von 1) und 2) ergiebt sich der am Eingang erwähnte Zusammenhang zwischen der Componente des endlichen Cylinders und dem Scheibenpotential. Wir können denselben so aussprechen:

I. Man erhält das Scheibenpotential V_p aus der Componente X'_p des endlichen Cylinders in der Richtung seiner Axe, wenn man in X'_p das Substitutionszeichen fortlässt, unter k die Grösse $(x-a)^2$ versteht, und δdx statt δ' schreibt.

Liegt der angezogene Punkt in der Ebene der Scheibe, so ist $k=0$, und man hat aus 1)

3) $$V_p = \frac{\delta\,.\,dx}{p-1} \iint \frac{dy\,dz}{r^{p-1}}.$$

Für das Potential T_{p+1} eines Cylinders, der sich nach beiden Seiten vom angezogenen Punkte aus in's Unendliche erstreckt, und dessen Grundfläche die Scheibe ist, hat man

$$T_{p+1} = \frac{\delta'}{p} \iint dy\;dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+r^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

Hieraus erhält man, wenn man die Integration nach x ausführt mit Hülfe der Dirichlet'schen Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+k^2)^{\frac{a}{2}}} = \frac{\pi\,\Gamma(a-1)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\,.\,2^{a-2}\,k^{a-1}},\quad (a>\tfrac{1}{2}),$$

die Gleichung

$$T_{p+1} = \frac{\delta'\pi\,\Gamma(p-1)}{p\,2^{p-2}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \iint \frac{dy\,dz}{r^{p-1}},$$

oder vermöge 3)

$$T_{p+1} = \frac{\delta'}{\delta\,dx} \cdot \frac{\pi\,\Gamma(p)}{2^{p-1}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}\,V_p.$$

Diese Formel erhält den erwähnten Zusammenhang zwischen dem Potential der Scheibe und des unendlichen Cylinders. Derselbe lässt sich so aussprechen:

---

*) $\Big|_{x_1}^{x_2} f(x)$ bedeutet $f(x_2) - f(x_1)$.

II. Ein unendlicher elliptischer Cylinder übt, abgesehen von einem constanten nur vom Anziehungsgesetze abhängigen Factor, auf irgend einen Punkt dieselbe Anziehung aus, wie derjenige seiner gegen seine Axe senkrechten Querschnitte, in dessen Ebene der angezogene Punkt liegt, vorausgesetzt, dass über den Querschnitt eben so viel Masse gleichmässig vertheilt ist, als in jedem Stück des Cylinders von der Höhe 1 enthalten ist, und dass die Anziehung beim Querschnitt umgekehrt proportional der um eine Einheit kleineren Potenz der Entfernung wie beim Cylinder erfolgt.

Den nur von p abhängigen Factor $\frac{2^{p-1}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\pi\,\Gamma(p)}$ will ich der Kürze wegen durch C_p bezeichnen, so dass

$$V_p = \frac{\delta\,dx}{\delta'}\,C_p\,T_{p+1}. \tag{4}$$

Derselbe nimmt, wenn p eine ganze Zahl ist, einfache Werthe an, und zwar ist für $p = 2n$

$$C_{2n} = \frac{n\,!\,2^n}{\pi\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)},$$

und für $p = 2n + 1$

$$C_{2n+1} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n+1)}{n\,!\,2^{n+1}}.$$

Wir können noch eine dritte bemerkenswerthe Relation aufstellen, nämlich zwischen der senkrecht gegen die Scheibe gerichteten Componente X_p der Scheibe selbst und dem Potential der Scheibe. Es ist nämlich

$$X_p = \frac{\partial V_p}{\partial a} = -\,2\,\frac{\partial V_p}{\partial k}\,(x-a),$$

und nach 1)

$$\frac{\partial V_p}{\partial k} = -\,\frac{p+1}{2}\,V_{p+2},$$

folglich

III. $$X_p = (p+1)\,(x-a)\,V_{p+2},$$

d. h. man erhält die X-Componente der Scheibe, wenn man das Potential derselben für das um 2 Einheiten grössere p mit $(p+1)\,(x-a)$ multiplicirt.

Wie in der erwähnten Abhandlung (Crelle's Journal, Band 65, p. 64) bezeichne ich wieder die grösste Wurzel dieser cubischen Gleichung

$$s(s+\alpha^2)\,(s+\beta^2) - k\,(s+\alpha^2)\,(s+\beta^2) - b^2 s(s+\beta^2) - c^2 s(s+\alpha^2) = 0 \tag{5}$$

durch σ, die beiden anderen durch σ_1, σ_2. Vermöge I.) und der für die Cylindercomponente a. a. O. aufgestellten Formeln 2), 6), 7) ergeben sich

unmittelbar folgende Formeln für das Potential der elliptischen Scheibe, wenn wir die Masse derselben $\delta d x \alpha \beta \pi$ durch M bezeichnen:

$$6)\quad V_p = \frac{M}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-p}{2}\right)}\int_\sigma^\infty \frac{s^{-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{k}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}\right)^{\frac{1}{2}(3-p)}ds}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}$$

$$7)\quad V_{2n+3} = \frac{(-1)^{n-1}M}{2(n+1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}}\left[\frac{\{(\sigma+\alpha^2)(\sigma+\beta^2)\}^{n-\frac{1}{2}}}{\sigma\{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)\}^n}\right].$$

$$8)\quad V_{2n+2} = \frac{\delta d x}{(1n-1)(2n+1)}\left(2\pi\varepsilon k^{-\frac{2n-1}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi' d\varphi}{(k+\Phi)^{n-1}\sqrt{k+\Phi}}\right),$$

wo
$$\Phi = (\alpha\cos\varphi - b)^2 + (\beta\sin\varphi - c)^2.$$
$$\Phi' = \frac{\alpha\beta - b\beta\cos\varphi - c\alpha\sin\varphi}{\Phi},$$

und wo $\varepsilon = 1$, oder $= 0$, je nachdem die Projection des angezogenen Punktes auf die Ebene der Scheibe in die Scheibe selbst oder ausserhalb fällt. Die Formel 6) gilt für jeden Werth von p zwischen 1 incl. und 3 incl.; 7) gilt für jedes ganze n von $n = 1$ incl.; 8) für jedes ganze n von $n = 0$ incl.

Liegt der angezogene Punkt in der Ebene der Scheibe*), und zwar im Innern eines Ringes, so wird $\sigma = 0$, und die Formel 7) würde für V_{2n+3} die Form $\infty - \infty$ geben. Für diesen Fall benutzen wir 4) und 15″) in der Mehlerschen Abhandlung. Diese Formel stellt nämlich T_{2n+4} für eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Schale dar in Bezug auf einen Punkt des inneren hohlen Raumes. Indem wir darin die eine Axe des Ellipsoides unendlich werden lassen, erhalten wir T_{2n+4} für einen Punkt im Innern eines hohlen elliptischen Cylinders, dessen Querschnitt von zwei ähnlichen concentrischen Ellipsen begrenzt wird. Daraus ergiebt sich dann vermöge 4) das Potential V_{2n+3} eines von zwei ähnlichen concentrischen Ellipsen begrenzten Ringes für einen Punkt der leeren Ringfläche. Sind die Axen der inneren Ellipse $m\alpha$, $m\beta$, so wird

$$9)\quad V_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1}M}{2(n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\frac{K^{-n}-H^{-n}}{n\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}\right]_{(s=0)}.$$

Hierin ist

$$K = 1 - \frac{b^2}{\alpha^2+s} - \frac{c^2}{\beta^2+s}$$
$$H = m^2 - \frac{b^2}{\alpha^2+s} - \frac{c^2}{\beta^2+s}$$

gesetzt worden. Diese Formel gilt für jede ganze Zahl n von $n = 1$ incl.

*) Liegt er in der Scheibe selbst, so wird V_p für $p \geqq 3$ unendlich.

Aus 6), 7), 8), 9) erkennt man folgende Sätze:

Das Potential einer elliptischen Scheibe oder Ringes lässt sich für gerade Werthe von p durch ganze elliptische Integrale darstellen.

Für $p=1$, und $p=3$ ist es aus logarithmischen und rein algebraischen Ausdrücken zusammengesetzt.

Für $p=5, 7, 9\ldots$ ist es eine rein algebraische Function, und zwar ist dieselbe rational oder von den Wurzeln einer (oder zweier) cubischen Gleichung abhängig, jenachdem der angezogene Punkt innerhalb der leeren Ringfläche, oder ausserhalb der Scheibe oder des Ringes liegt.

2. Specielle Fälle.

Ich werde im Folgenden $x=0$ setzen, d. h. den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Scheibe legen; dadurch geht k über in a^2.

Ein Ellipsoid, dessen Halbaxen α', β', γ' resp.

$$\sqrt{\alpha^2+\sigma},\ \sqrt{\beta^2+\sigma},\ \sqrt{\sigma}$$

sind, wo σ jede beliebige positive Grösse bedeuten kann, während α, β die Halbaxen der Scheibe sind, dessen Mittelpunkt im Mittelpunkt der Scheibe liegt, und von dessen Hauptschnitten derjenige, dessen Halbaxen α', β' sind, in der Ebene der Scheibe liegt, während gleichzeitig die beiden erwähnten Halbaxen in die Richtung der Halbaxen α, β der Scheibe fallen, werde ich ein confocales Ellipsoid nennen. Der erwähnte Hauptschnitt ist nämlich confocal mit der Scheibe. Die Gleichung eines confocalen Ellipsoides heisst, wenn wir die Coordinaten irgend eines Punktes seiner Oberfläche durch ξ, η, ζ bezeichnen

$$\sigma(\sigma+\alpha^2)(\sigma+\beta^2)-\xi^2(\sigma+\alpha^2)(\sigma+\beta^2)-\eta^2\sigma(\sigma+\alpha^2)-\zeta^2\sigma(\sigma+\beta^2)=0.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der cubischen Gleichung 5) zeigt, dass alle Punkte, für welche die in den Potentialformeln der Scheibe vorkommende Grösse σ dieselbe ist, auf der Oberfläche eines confocalen Ellipsoides liegen.

Die beiden Fälle $p=1$ und $p=3$ bieten ein besonderes Interesse dar, wegen der einfachen Resultate, die sich ergeben. Ich mache im Voraus aufmerksam auf die Analogie zwischen der Anziehung einer elliptischen Scheibe oder Ringes für $p=1$, 3 und eines Ellipsoides oder einer ellipsoidischen Schale für p resp. $=2$, 4.

a) Der Fall $p=1$.

Aus 6) ergiebt sich

$$V_1=\frac{M}{2}\int_{\sigma}^{\infty}\frac{1-\frac{a^2}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}\,ds.$$

Durch Differenziation von V_1 nach a, b, c erhalten wir folgende Ausdrücke für die Componenten:

$$10)\qquad X_1 = -Ma\int\limits_\sigma^\infty \frac{ds}{s\Delta} = -\frac{Ma}{\alpha\beta}\log\frac{1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma}(\alpha\beta+\Delta_1)}{1+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$Y_1 = -Mb\int\limits_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\alpha^2)\Delta} = -\frac{2Mb}{\beta^2-\alpha^2}\left(\sqrt{\frac{\sigma+\beta^2}{\sigma+\alpha^2}}-1\right)$$

$$Z_1 = -Mc\int\limits_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\beta^2)\Delta} = -\frac{2Mc}{\alpha^2-\beta^2}\left(\sqrt{\frac{\sigma+\alpha^2}{\sigma+\beta^2}}-1\right)$$

$$\Delta = \sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)},\quad \Delta_1 = \sqrt{(\alpha^2+\sigma)(\beta^2+\sigma)}.$$

Die in den 3 Componenten vorkommenden Integrale hängen nur von σ ab, ändern sich also nicht auf einem confocalen Ellipsoide.

Legt man durch ein confocales Ellipsoid Ebenen parallel der YZ-, XZ-, XY-Ebene, so sind resp. X_1, Y_1, Z_1 für alle Schnittpunkte dieser Ebenen und des confocalen Ellipsoides constant.

Ist $a=0$, d. h. liegt der angezogene Punkt in der Ebene der Scheibe, so wird für äussere Punkte

$$Y_1 = -\frac{2M}{\alpha'(\alpha'+\beta')}b$$

$$Z_1 = -\frac{2M}{\beta'(\alpha'+\beta')}c$$

und die Gesammtanziehung

$$R_1 = -\frac{2M}{\alpha'+\beta'}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich folgende Sätze:

Alle äusseren Punkte, die auf einer mit der Scheibe confocalen Ellipse liegen, werden gleich stark angezogen. — Zwei confocale Scheiben ziehen denselben äusseren Punkt nach derselben Richtung mit einer Intensität, die ihren Massen proportional ist. (Mac Laurin's Lehrsatz.)

Liegt der Punkt in der Scheibe selbst, so wird $\sigma=0$, und man hat

$$Y_1 = -\frac{2M}{\alpha(\alpha+\beta)}b$$

$$Z_1 = -\frac{2M}{\beta(\alpha+\beta)}c$$

$$R_1 = -\frac{2M}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\sqrt{b^2\beta^2+c^2\alpha^2}.$$

Hieraus folgt:

Ein von zwei ähnlichen Ellipsen begrenzter Ring zieht einen in der leeren Ringfläche liegenden Punkt gar nicht an. — Die Componenten sind proportional der Entfernung des Punktes von der entsprechenden Hauptaxe. — Alle inneren Punkte, die auf einer der Scheibenbegrenzung ähnlichen Ellipse liegen, werden gleich stark angezogen. — Alle Punkte, die auf demselben radius vector liegen, werden nach derselben Richtung hin angezogen.

Ist die Scheibe kreisförmig, so wird für äussere Punkte

$$R_1 = -\frac{M}{\varrho},$$

wo ϱ die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt der Scheibe bedeutet. Eine Kreisscheibe zieht also einen in ihrer Ebene liegenden äusseren Punkt so an, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkt concentrirt. Dasselbe gilt bekanntlich von einer nach dem Naturgesetz anziehenden Kugel.

Die Anziehung einer Kreisscheibe auf einen inneren Punkt wird

$$R_1 = -\pi\,\delta\,dx\,\varrho,$$

d. h. die Anziehung einer Kreisscheibe auf einen inneren Punkt ist proportional seiner Entfernung vom Centrum. Die Anziehung einer Kugel von der Dichtigkeit δ' auf innere Punkte ist $-\frac{4}{3}\pi\,\delta'\varrho$.

Daraus folgt:

Enthält eine Kugel in jedem Cubikfuss $\frac{3}{4}$ der Masse, die auf jedem Quadratfuss der Scheibe liegt, so zieht sie einen innern Punkt eben so stark nach dem Naturgesetz an, wie eine concentrische Kreisscheibe, deren Elementaranziehung der Entfernung umgekehrt proportional ist.

b) Der Fall $p = 3$.

Aus 6) oder aus 10) vermöge III. folgt:

$$V_3 = \frac{M}{2}\int_\sigma^\infty \frac{ds}{s\,\Delta}.$$

Das Potential hängt nur von σ ab, d. h. es ändert sich nicht auf einem confocalen Ellipsoide.

Um die Componenten zu erhalten, müssen wir $\frac{\partial\sigma}{\partial a}, \frac{\partial\sigma}{\partial b}, \frac{\partial\sigma}{\partial c}$ bilden.

Aus 5) folgt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial a} = \frac{2a}{\sigma}\,\frac{1}{\frac{a^2}{\sigma^2} + \frac{b^2}{(\alpha^2+\sigma)^2} + \frac{c^2}{(\beta^2+\sigma)^2}} = \frac{2a}{\gamma'^2}L^2.$$

L bezeichnet das Loth, welches man vom Mittelpunkt auf die durch

(a, b, c) an das confocale Ellipsoid gelegte Tangentialebene herablässt. Aehnlich erhält man

$$\frac{\partial\sigma}{\partial b} = \frac{2b}{\alpha'^2} L^2, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial c} = \frac{2c}{\beta'^2} L^2.$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhält man aus dem für V_3 aufgestellten Integralausdruck

$$11)\quad \begin{cases} X_3 = -\dfrac{M}{\alpha'\beta'\gamma'^2}\,\dfrac{a L^2}{\gamma'^2} \\ Y_3 = -\dfrac{M}{\alpha'\beta'\gamma'^2}\,\dfrac{b L^2}{\alpha'^2} \\ Z_3 = -\dfrac{M}{\alpha'\beta'\gamma'^2}\,\dfrac{c L^2}{\beta'^2} \end{cases}$$

$$12)\quad R_3 = -\frac{ML}{\alpha'\beta'\gamma'^2}.$$

Nennen wir die Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den 3 Axen bildet, λ, μ, ν, so ist

$$\cos\lambda = \frac{a}{\gamma'^2} L, \quad \cos\mu = \frac{b}{\alpha'^2} L, \quad \cos\nu = \frac{c}{\beta'^2} L.$$

Hieraus ergiebt sich:

Die Gesammtanziehung ist für Punkte eines confocalen Ellipsoides direct proportional dem Loth, welches man vom Mittelpunkt auf die durch den angezogenen Punkt an das confocale Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällt hat. Die Richtung der Gesammtanziehung ist normal gegen das confocale Ellipsoid.

Dirichlet hat in seinen Vorlesungen über das Potential gezeigt, dass eine unendlich dünne von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Schale von der Masse M_1 einen äusseren Punkt nach dem Naturgesetz mit einer Kraft

$$13)\qquad R = -\frac{M_1 L}{\alpha'\beta'\gamma'}$$

anzieht, und dass die Richtung der Kraft normal gegen das durch den angezogenen Punkt gelegte, dem gegebenen confocale Ellipsoid ist. Vergleicht man 12) mit 13), so ergiebt sich folgender Satz:

Eine elliptische Scheibe mit den Halbaxen α, β, deren Anziehung dem Cubus der Entfernung umgekehrt proportional ist, zieht alle Punkte eines confocalen Ellipsoides eben so an, wie irgend eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte mit der Scheibe concentrische und confocale unendlich dünne Schale, die nach dem Naturgesetz anzieht, deren Masse gleich der Masse der Scheibe dividirt durch γ' ist, und deren Halbaxen folgende sind

$$\gamma_1, \ \sqrt{\alpha^2 + \gamma_1^2}, \ \sqrt{\beta^2 + \gamma_1^2},$$

wo γ_1 nur der Bedingung $\gamma_1 \leqq \gamma'$ unterworfen ist.

Liegt der angezogene Punkt im Inneren eines Ringes, so wird nach 6)

$$V_3 = \frac{\pi \delta \, dx}{2} \int_\sigma^\varrho \frac{ds}{s} = \frac{\pi \delta \, dx}{2} \log \frac{\varrho}{s},$$

wo σ und ϱ die unendlich kleinen positiven Wurzeln der beiden aus 5) resultirenden cubischen Gleichungen, worin k unendlich klein ist

$$1 - \frac{k}{s} - \frac{b^2}{\alpha^2 + s} - \frac{c^2}{\beta^2 + s} = 0$$

$$1 - \frac{k}{s} - \frac{b^2}{m^2\alpha^2 + s} - \frac{c^2}{m^2\beta^2 + s} = 0,$$

nämlich

$$\sigma = \frac{k}{1 - \frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{c^2}{\beta^2}}.$$

$$\varrho = \frac{k}{1 - \frac{b^2}{m^2\alpha^2} - \frac{c^2}{m^2\beta^2}}.$$

Setzt man diese Werthe für σ und ϱ, so wird

$$V_3 = \frac{\pi \delta \, dx}{2} \log \frac{1 - \frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{c^2}{\beta^2}}{1 - \frac{b^2}{m^2\alpha^2} - \frac{c^2}{m^2\beta^2}}.$$

Die hieraus fliessenden Werthe für Y_3, Z_3 sind rationale algebraische Functionen von α, β, b, c, m. Bildet man dieselben und daraus R_3, so erkennt man folgenden Satz:

Die Anziehung eines von zwei concentrischen ähnlichen Ellipsen begrenzten Ringes auf einen Punkt der leeren Ringfläche ist normal gegen die durch diesen Punkt gehende den gegebenen ähnliche Ellipse und umgekehrt proportional dem Lothe, welches vom Mittelpunkt auf die durch den angezogenen Punkt an die ähnliche Ellipse gezogene Tangente gefällt ist.

c) Der Fall $p = 5$.

Für V_5 erhält man den einfachsten Ausdruck aus 11) mit Benutzung von III., nämlich

$$V_5 = \frac{M L^2}{4 \alpha' \beta' \gamma'^4}.$$

Für Punkte eines confocalen Ellipsoides ist V_5 proportional dem Quadrate des schon mehrfach erwähnten Lothes.

d) Der Fall $p = 2$ (das Naturgesetz).

Für die Anziehung einer nach dem Naturgesetz anziehenden Scheibe erhält man aus (6) folgende Formeln

$$V_2 = \frac{2M}{\pi} \int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{s} - \frac{b^2}{\alpha^2 + s} - \frac{c^2}{\beta^2 + s}}}{\sqrt{s(s+\alpha^2)(s+\beta^2)}} ds,$$

$$X_2 = -\frac{2aM}{\pi} \int_\sigma^\infty \frac{ds}{s\sqrt{(s-\sigma)(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)}},$$

$$Y_2 = -\frac{2bM}{\pi} \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\alpha^2)\sqrt{(s-\sigma)(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)}},$$

$$Z_2 = -\frac{2cM}{\pi} \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\beta^2)\sqrt{(s-\sigma)(s-\sigma_1)(s-\sigma_2)}}.$$

Diese Integrale lassen sich leicht durch ganze elliptische Integrale erster und dritter Gattung ausdrücken. Es wird (vgl. diese Zeitschrift, 8. Jahrgang p. 348)

$$X_2 = \frac{8aM}{\pi(\sqrt{\sigma - \sigma_1} + \sqrt{\sigma - \sigma_2})(l - \sigma)} \left(K - \frac{2l}{l + \sigma} \Pi_1(n')\right),$$

$$Y_2 = \frac{8bM}{\pi(\sqrt{\sigma - \sigma_1} + \sqrt{\sigma - \sigma_2})(l - \sigma - \alpha^2)} \left(K - \frac{2l}{l + \sigma + \alpha^2} \Pi_1(n'')\right),$$

wo

$$l = \sqrt{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}, \qquad k = \frac{\sqrt{\sigma - \sigma_1} - \sqrt{\sigma - \sigma_2}}{\sqrt{\sigma - \sigma_1} + \sqrt{\sigma - \sigma_2}},$$

$$n' = \left(\frac{l - \sigma}{l + \sigma}\right)^2, \qquad n'' = \left(\frac{l - \sigma - \alpha^2}{l + \sigma + \alpha^2}\right)^2.$$

Für die Kreisscheibe geht das Integral dritter Gattung $\Pi_1(n'')$ in eines der zweiten Gattung über, wegen $n'' = k^2$, und es wird $\Pi_1(n'') = \frac{E}{k'^2}$. (Vgl. diese Zeitschrift, 8. Jahrgang p. 352.)

Aus (8) ergeben sich folgende Ausdrücke

$$V_2 = \delta dx \left\{ -2\pi\varepsilon a + \int_0^{2\pi} \frac{\alpha\beta - b\beta\cos\varphi - c\alpha\sin\varphi}{\Phi} \sqrt{a^2 + \Phi}\, d\varphi \right\},$$

und hieraus (vgl. die Zeitschrift 9. Jahrgang p. 278 und 279)

$$X_2 = -\frac{2M\varepsilon}{\alpha\beta} + \frac{Ma}{\alpha\beta\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha\beta - b\beta\cos\varphi - ca\sin\varphi}{\Phi\sqrt{a^2+\Phi}}\,d\varphi,$$

14) $$Y_2 = -\frac{M}{\alpha\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2+\Phi}},$$

$$Z_2 = -\frac{M}{\beta\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2+\Phi}}.$$

Ueber die Reduction dieser Integrale auf die Normalform vgl. Clebsch, Crelle's Journal Bd. 61, p. 187.

Ist die Scheibe kreisförmig und liegt der angezogene Punkt in der Ebene der Scheibe, so wird für innere und äussere Punkte die Gesammtanziehung nach (14)

$$Y_2 = -\frac{2M}{\alpha^2\pi}\left((1+q)\,E - \frac{1+q^2}{1+q}\,K\right).$$

Hierin bedeutet q den Quotienten $\frac{\alpha}{b}$, und K und E die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modulus

$$k = \frac{2\sqrt{q}}{1+q}.$$

Die letzte Formel enthält folgenden Satz: Eine Kreisscheibe übt nach dem Naturgesetz auf einen Punkt, der n Radien vom Mittelpunkt entfernt ist, eine n Mal so kleine Kraft aus, als auf einen Punkt, der um den $n$ten Theil des Radius vom Mittelpunkt entfernt ist.

Derselbe Satz gilt nach (II.) für einen unendlichen Kreiscylinder, dessen Elementaranziehung umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung erfolgt.

e) Für die Anziehung einer Kreisscheibe auf einen Punkt der Axe erhält man die für alle ganzen Werthe von p, mit Ausnahme von $p = 1$, gültige Formel (vgl. Crelle's Journal Bd. 65, Formel (9))

15) $$X_p = \frac{2\pi\delta\,dx}{p-1}(x-a)\left(\frac{1}{((x-a)^2)^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{1}{(\alpha^2+(x-a)^2)^{\frac{p-1}{2}}}\right).$$

Für $p = 1$ erhält man die entsprechende Formel aus (10)

16) $$X_1 = \pi\delta\,dx\,\log\left(1 + \frac{\alpha^2}{(x-a)^2}\right).$$

Scheiben von endlicher Dicke.

Man lasse einen beliebigen Bogen einer algebraischen Curve $n$ten Grades, deren Gleichung die Form hat

$$y^2 = a + bx + \ldots + kx^n,$$

um die Abscissenaxe rotiren. Den dadurch entstehenden Rotationskörper, der von zwei parallelen Kreisen und der von dem Bogen beschriebenen krummen Oberfläche begrenzt wird, nenne ich, nach Analogie der üblichen Bezeichnung „Kegelstumpf", einen Körperstumpf $n$ten Grades. Ist die rotirende Curve eine gerade Linie oder eine Curve zweiten Grades, so entsteht einer von den 6 bekannten Rotationskörpern zweiten Grades: Cylinder, Kegel, einfaches Hyperboloid, doppeltes Hyperboloid, Paraboloid, Ellipsoid. Für diese Körper hat das y folgende Werthe, denen ich zugleich die Werthe von drei später vorkommenden Grössen A, B, C beifüge.

	y^2	A	B	C
Cylinder	α^2	1	$-a$	$a^2+\alpha^2$
Kegel	$\operatorname{tg}\theta^2 x^2$	$\frac{1}{\cos\theta^2}$	$-a$	a^2
Einfaches Hyperboloid	$\alpha^2\left(1+\frac{x^2}{\gamma^2}\right)$	$1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$	$-a$	$a^2+\alpha^2$
Doppeltes Hyperboloid	$\alpha^2\left(\frac{x^2}{\gamma^2}-1\right)$	$1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$	$-a$	$a^2-\alpha^2$
Paraboloid	αx	1	$-a+\frac{\alpha}{2}$	a^2
Ellipsoid	$\alpha^2\left(1-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)$	$1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$	$-a$	$a^2+\alpha^2$

Es bedeutet α für den Cylinder den Radius, für das Paraboloid den Parameter, für das Ellipsoid, das einfache und doppelte Hyperboloid die rotirende Axe, während γ die Rotationsaxe ist; θ bedeutet für den Kegel die Neigung der Seitenlinie gegen die Axe. Die Abscissen der beiden Endpunkte des rotirenden Bogens werde ich durch h' und h'' bezeichnen, und zwar die grössere durch h''.

Um die Anziehung eines Körperstumpfes $n$ten Grades zu erhalten, zerlege man den ganzen Körperstumpf durch senkrecht gegen die Rotationsaxe geführte Ebenen in lauter unendlich dünne Kreisscheiben von der Dicke dx. Das Potential und die Componenten einer Elementarscheibe sind nach den früheren Formeln zu bestimmen, indem man y an die Stelle von α und β setzt. Integrirt man dann noch zwischen den Grenzen h' und h'' nach x, so erhält man das Potential und die Componenten des Körperstumpfes. Nennen wir dieselben V'_p, X'_p, Y'_p, so ist

$$V'_p = \int_{h'}^{h''} V_p(y), \text{ cet.}$$

Für eine beliebige Lage des angezogenen Punktes erhält man nur

für ungerade Werthe von p ein einfaches Resultat; für den speciellen Fall, dass der Punkt der Rotationsaxe angehört, erhält man für jedes ganze p einfache Formeln.

1. Anziehung eines Körperstumpfes $n$ten Grades auf einen beliebigen Punkt für ein ungerades p.

Setzt man in 5) $\alpha = \beta = y$, $k = (x-a)^2$, und, was man der Allgemeinheit unbeschadet thun darf, da die Scheibe kreisförmig ist, $c = 0$, so geht die Gleichung über in

$$s(s+y^2)^2 - (x-a)^2(s+y^2)^2 - b^2 s(s+y^2) = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\sigma_2 = -y^2$$

$$17)\quad \begin{matrix}\sigma\\ \sigma_1\end{matrix} = \frac{(x-a)^2 - y^2 - b^2 \pm \sqrt{((x-a)^2+y^2)^2 + b^2(b^2+2(x-a)^2-2y^2)}}{2}.$$

Aus 10), 11) und 7) erhält man

$$X_1' = -\pi\delta\int_{h'}^{h''}(x-a)\log\left(1+\frac{y^2}{\sigma}\right)dx,$$

$$Y_1' = -\pi\delta b\int_{h'}^{h''}\frac{y^2\,dx}{\sigma+y^2},$$

$$Y_3' = -\pi\delta b\int_{h'}^{h''}\frac{y^2\sigma\,dx}{(x-a)^2(\sigma+y^2)^2+b^2\sigma^2},$$

$$V'_{2n+3} = \frac{(-1)^n\pi\delta}{2(n+1)!}\int_{h'}^{h''}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}}\left[\frac{(\sigma+y^2)^{n-1}}{\sigma(\sigma-\sigma_1)^n}\right]y^2\,dx,$$

und aus 7) mit Benutzung von III)

$$X'_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}\delta\pi}{n!}\int_{h'}^{h''}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}}\left[\frac{(\sigma+y^2)^{n-1}}{\sigma(\sigma-\sigma_1)^n}\right]y^2(x-a)\,dx.$$

Die in den vorstehenden Formeln unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke sind rationale algebraische*) Functionen von x und der einen in σ und σ_1 vorkommenden Quadratwurzel. Mit Berücksichtigung von 17) lassen sich demnach folgende Sätze über die Anziehung eines Körperstumpfes für ein ungerades p aufstellen:

Die Anziehung eines Körperstumpfes $n$ten Grades ist durch Abel'sche Integrale darstellbar, in welchen die höchste

*) Der in X_1' unter dem Integralzeichen stehende Logarithmus kann durch theilweise Integration fortgeschafft werden.

Potenz der Veränderlichen unter der Quadratwurzel den Exponenten $2n$ hat.

Die Anziehung eines Körperstumpfes zweiten Grades ist durch elliptische Integrale darstellbar.

Die Anziehung eines Körperstumpfes zweiten Grades in der Richtung der Rotationsaxe in Bezug auf irgend einen der durch den Mittelpunkt des Rotationskörpers senkrecht zur Rotationsaxe gelegten Ebene lässt sich durch Elementarfunctionen ausdrücken.

Die Anziehung eines Kugelstumpfes ist für jede Lage des angezogenen Punktes durch Elementarfunctionen darstellbar.

Die Anziehung eines Körperstumpfes $n$ten Grades auf einen Punkt der Rotationsaxe ist durch Elementarfunctionen darstellbar.

Für ein gerades p hängt die Anziehung auf der Axe, wie aus 15) ersichtlich, von Abel'schen Integralen ab; dieselben gehen für ein Körperstumpf zweiten Grades gleichfalls in algebraische Functionen über.

2. Anziehung der Körperstumpfe zweiten Grades auf einen Punkt ihrer Axe für jedes ganze p.

Auf der Axe eines Körperstumpfes ist nach 15) und 16)

$$18)\quad \begin{cases} X_1' = \pi\delta \int\limits_{h'}^{h''} (x-a) \log \left(1 + \frac{y^2}{(x-a)^2}\right) dx, \\ X'_p = \frac{2\pi\delta}{p-1} \int\limits_{h'}^{h''} (x-a) \left(\frac{1}{((x-a)^2)^{\frac{p-1}{2}}} - \frac{1}{(y^2+(x-a)^2)^{\frac{p-1}{2}}}\right) dx. \end{cases}$$

Ich bezeichne die Entfernungen des angezogenen Punktes vom Rande der ersten und zweiten Basis durch ϱ', ϱ'', und vom Centrum derselben durch r', r'', und schreibe für die Differenz $kf(\varrho'', r'', h'') - kf(\varrho', r', h')$ der Kürze wegen $k\,[f(\varrho, r, h)]$. Führt man die Integrationen in 18) aus, so erhält man folgende Formeln für die Anziehung irgend eines Körperstumpfes zweiten Grades auf einen Punkt seiner Axe:

$$19)\quad X_1' = \pi\delta \left[r^2 \log\frac{\varrho}{r} + \left(a + \frac{B}{A}\right) h + \left(\frac{C - 2Ba}{A} - \frac{2B^2}{A^2} - a^2\right) \log \varrho \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{2B}{A}\left(\frac{B^2}{A} + Ba - C\right) - 2aC}{\sqrt{\pm P}}\, \varrho\right],$$

$$X_2' = 2\pi\delta \left[r - \frac{\varrho}{A} + \frac{\frac{B}{A} + a}{\sqrt{A}} \log\left(B + Ah + \varrho\sqrt{A}\right)\right].$$

Liegt der angezogene Punkt auf der kleineren Axe eines Ellipsoides, so ist

$$X_2' = 2\pi\delta\left[r - \frac{\varrho}{A} + \frac{\frac{B}{A} + a}{\sqrt{-A}} \arccos \frac{B + Ah}{\sqrt{-P}}\right].$$

$$20)\qquad X_3' = \pi\delta\left[\log r - \frac{\log\varrho}{A} + \frac{a + \frac{B}{A}}{\sqrt{\pm P}}\,Q\right].$$

Für $p > 3$ ist

$$21)\qquad X_p' = -\frac{2\pi\delta}{(p-1)(p-3)}\left[\frac{1}{r^{p-3}} - \frac{1}{A\varrho^{p-3}}\right.$$

$$-\frac{\left(a + \frac{B}{A}\right)(B + Ah)}{P}\left\{\frac{1}{\varrho^{p-3}} + \frac{p-4}{p-5}\left(\frac{A}{P}\right)\frac{1}{\varrho^{p-5}} + \frac{(p-4)(p-6)}{(p-5)(p-7)}\left(\frac{A}{P}\right)^2\frac{1}{\varrho^{p-7}} + \dots\right\}$$

$$\left. - \sin^2\frac{p\pi}{2}\cdot\frac{3.5\dots(p-4)}{2.4\dots(p-5)}\left(a + \frac{B}{A}\right)\frac{A^{\frac{p-3}{2}}}{(\pm P)^{\frac{p-2}{2}}}\,Q\right].$$

In den vorstehenden Formeln ist

$$P = AC - B^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} Q \text{ entweder } \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Ah + B}{\sqrt{P}} \\ \text{oder } \dfrac{\varepsilon}{2} \log \dfrac{Ah + B - \sqrt{-P}}{Ah + B + \sqrt{-P}} \end{array}\right\} \text{jenachdem } AC \gtrless B^2,$$

wo $\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ in 21), und $\varepsilon = 1$ in 19) und 20).

In 21) ist die Reihe in der Klammer so weit fortzusetzen, bis man entweder auf $\frac{1}{\varrho^2}$ oder auf $\frac{1}{\varrho}$ gekommen ist. Das letzte Glied, welches Q enthält, ist nur da, wenn p ungerade ist. Für ein gerades p (> 2) ist also X'_p eine rein algebraische, rationale Function von den Constanten des Körpers und von den Entfernungen des angezogenen Punktes von den Mittelpunkten und Rändern der beiden Grundflächen. Für ein ungerades p enthält X'_p ausser algebraischen Ausdrücken, noch entweder einen arc tg oder einen Logarithmus; und zwar beim Kegel und einfachen Hyperboloid immer einen arc tg; beim Ellipsoid, wenn der angezogene Punkt auf der kleineren Axe liegt, immer einen Logarithmus, hingegen wenn der angezogene Punkt auf der grösseren Axe liegt, bald einen arc tg, bald einen Logarithmus, jenachdem der angezogene Punkt vom Mittelpunkt aus gerechnet vor oder hinter dem Brennpunkt liegt; beim Paraboloid und dop-

pelten Hyperboloid ist es umgekehrt wie beim Ellipsoid, dessen Rotationsaxe die grössere ist. (Beim Paraboloid muss es nur statt „Mittelpunkt" heissen „Scheitelpunkt.") Während also im Allgemeinen die Formeln für die Anziehung eines Körperstumpfes zweiten Grades für ein gerades p viel complicirter sind als für ein ungerades, nehmen sie auf der Axe für ein gerades p einen einfacheren Charakter an wie für ein ungerades.

Ist der Brennpunkt der angezogene Punkt ($AC = B^2$), so verschwindet auch für ungerade p (> 3) das Transcendente. Es wird für diesen Fall beim Paraboloid $\left(a = \frac{\alpha}{4}, \quad p > 3\right)$

$$X'_p = -\frac{2\pi\delta}{p-1}\left[\frac{1}{(p-3)r^{p-3}} - \frac{1}{(p-3)\varrho^{p-3}} + \frac{\alpha}{2(p-2)\varrho^{p-2}}\right],$$

und beim Ellipsoid und doppelten Hyperboloid

$(a = e, \quad p > 3)$

$$X'_p = -\frac{2\pi\delta}{p-1}\left[\frac{1}{(p-3)r^{p-3}} - \frac{\gamma^2}{(p-3)e^2\varrho^{p-3}} - \frac{\varepsilon\gamma(\gamma^2-e^2)}{(p-2)e^2\varrho^{p-2}}\right].$$

Die Grösse ε hat den Werth ± 1, und ist so zu bestimmen, dass $\varepsilon\left(\frac{e}{\gamma}h - \gamma\right)$ positiv wird.

Für die Anziehung eines Kugelstumpfes auf einen Punkt seiner Axe erhält man die für alle ganzen Werthe von p, mit Ausnahme von 1, 3, 5, gültige Formel

$$X'_p = -\frac{2\pi\delta}{p-1}\left[\frac{1}{(p-3)r^{p-3}} + \frac{\alpha^2-a^2}{2(p-3)a^2\varrho^{p-3}} - \frac{1}{2(p-5)a^2\varrho^{p-5}}\right]$$

und daraus für die Anziehung einer Vollkugel

$$X'_p = -\frac{\pi\delta}{(p-1)a^2}\left[\frac{\alpha^2+a^2}{(p-3)r^{p-3}} - \frac{1}{(p-5)r^{p-5}}\right].$$

Besonders einfach gestaltet sich X'_p beim Kegel und beim einfachen Hyperboloid für den Fall, dass sich die genannten Körper zu beiden Seiten ins Unendliche erstrecken. Für $p = 1$ und $p = 2$ ist $\lim X' = \infty$. Für $p = 3$ erhält man aus 20) für das einfache Hyperboloid

$$\lim X'_3 = \frac{\delta\pi^2 \sin\theta^2 \cos\theta a}{\sqrt{a^2\sin\theta^2 + \alpha^2}},$$

wenn θ den Winkel bezeichnet, den die Seitenlinie des Berührungskegels mit der Axe bildet. Für den Kegel wird

$$\lim X'_3 = \tfrac{1}{2}\delta\pi^2 \sin 2\theta.$$

Aus dieser Formel erkennt man folgende Sätze:

Die Anziehung eines unendlichen Kegels, dessen Elementaranziehung umgekehrt proportional dem Cubus der

Entfernung ist, auf einen Punkt seiner Axe ist unabhängig von der Lage des Punktes auf der Axe. Sie ist am grössten, wenn der Winkel an der Spitze des Axenschnittes ein rechter ist. Sie ist gleich gross für zwei Kegel, für welche die Winkel an der Spitze des Axenschnittes Supplemente sind. Demnach wird eine Schale, die von zwei unendlichen Kegelmänteln begrenzt wird, welche dieselbe Spitze und dieselbe Axe haben, auf einen Punkt der Axe gar keine Wirkung ausüben, wenn die Winkel an der Spitze der Axenschnitte der beiden Mäntel Supplemente sind.

Ist p ungerade, > 3, so erhält man aus 21) für das einfache Hyperboloid

$$\lim X'_p = \pi^2 \delta \frac{1.3.5\ldots(p-4)}{4.6.8\ldots(p-1)} \frac{a^2 \sin\theta^2 \cos\theta}{\sqrt{(a^2 \sin\theta^2 + \alpha^2)^{p-2}}}$$

und für den Kegel

$$\lim X'_p = \pi^2 \delta \frac{1.3.5\ldots(p-4)}{4.6.8\ldots(p-1)} \frac{\cos\theta}{\sin\theta^{p-4}} \frac{1}{a^{p-3}}.$$

Ist p gerade, > 2, so wird für das einfache Hyperboloid

$$\lim X'_p = 4\pi\delta \frac{2.4\ldots(p-4)}{3.5\ldots(p-1)} \frac{a \sin\theta^2 \cos\theta}{\sqrt{(a^2 \sin\theta^2 + \alpha^2)^{p-2}}}$$

und für den Kegel

$$\lim X'_p = 4\pi\delta \frac{2.4\ldots(p-4)}{3.5\ldots(p-1)} \frac{\cos\theta}{\sin\theta^{p-4}} \frac{1}{a^{p-3}}.$$

Die Anziehung eines unendlichen Kegels auf einen Punkt seiner Axe ist also der $(p-3)$ten Potenz der Entfernung des angezogenen Punktes von der Spitze des Kegels umgekehrt proportional. Sie wächst, während der Winkel an der Spitze des Axenschnittes abnimmt, über alle Grenzen hinaus.

Ein bemerkenswerthes Resultat bietet noch die Anziehung eines vollen Rotationsellipsoides auf einen innern auf der Axe liegenden Punkt für $p = 4$ dar. Man erhält für dieselbe aus 21) die Formel

$$X'_4 = -\tfrac{4}{3}\pi\delta \frac{a}{\gamma^2 - a^2}.$$

Die Anziehung ist also unabhängig von der rotirenden Axe. Eine elliptische Schale, begrenzt von zwei vollständigen concentrischen Ellipsoiden, die dieselbe Rotationsaxe, aber beliebige rotirende Axen haben, zieht einen inneren auf ihrer Axe gelegenen Punkt gar nicht an, wenn die Elementaranziehung der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

XXXIII. Ueber umkehrbare und nicht umkehrbare Vorgänge in ihrer Beziehung auf die Wärmetheorie.

Im zweiten diesjährigen Hefte dieser Zeitschrift, S. 152, hat Herr Bauschinger auf einige Bemerkungen, welche ich im ersten Hefte, S. 31, über einen seiner früheren Aufsätze gemacht hatte, geantwortet. Er sagt dabei, dass in Bezug auf den Inhalt meiner Bemerkungen seine Erwartungen getäuscht seien, indem er geglaubt habe, einer Aeusserung von mir über seine nähere Bestimmung von „umkehrbar“ und „nicht umkehrbar“ entgegensehen zu dürfen, weil hierin unsere Ansichten auseinander zu gehen scheinen.

Ich habe in der That in den Aufsätzen von Bauschinger, nicht nur in Beziehung auf den von ihm erwähnten Punkt, sondern auch in anderen Beziehungen Stellen gefunden, mit denen ich nicht übereinstimme; aber ich bin absichtlich nicht darauf eingegangen, weil ich es nicht für nöthig halte, jeden von meinen Ansichten abweichenden Ausspruch, welchen ich in Aufsätzen über die mechanische Wärmetheorie finde, zum Gegenstande einer Discussion zu machen. Wenn es sich um eine Sache handelt, die ich schon hinlänglich bestimmt in meinen Abhandlungen erörtert zu haben glaube, so überlasse ich es gern den Lesern, zu entscheiden, wessen Ansicht die richtige ist. Da aber Herr Bauschinger in seiner neuen Note jenen Punkt abermals mit besonderem Nachdrucke hervorhebt, und zwar in der Weise, dass er nicht blos von einer zwischen uns obwaltenden Meinungsdifferenz spricht, sondern mit einem eigenthümlichen Tone der Sicherheit einfach meine Ansichten und Entwickelungen für falsch erklärt*), so fürchte ich, dass ein Stillschweigen von meiner Seite in dem Sinne ausgelegt werden könnte, als ob ich seine Einwürfe als richtig zugestände. Ich sehe mich daher genöthigt, einige Erläuterungen über den zur Sprache gebrachten Gegenstand zu geben.

*) Nachdem Hr. Bauschinger bei Besprechung meiner Dampfmaschinentheorie sich über meine Behandlung eines nicht umkehrbaren Processes geäussert hat, fährt er auf S. 156 fort: „Ausser dem erwähnten begeht aber Herr Clausius bei der Untersuchung des in Rede stehenden Vorganges noch einige Versehen, die sich jedoch bei Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Wärme und Arbeit theils unter sich, theils gegen jenes aufheben, so dass die von Clausius erhaltene Formel XIII), welche die Beschaffenheit des, nach der Admission im Cylinder enthaltenen Dampfes finden lässt, doch richtig bleibt.“ Ich meine, schon der Umstand, dass eine ziemlich weitläufige Entwickelung, in welcher mehrere Versehen enthalten sein sollen, doch schliesslich ein richtiges Resultat gegeben hat, hätte Hrn. Bauschinger in seinem Urtheile etwas vorsichtiger machen, und auf den Gedanken bringen sollen, dass die vermeintlichen Versehen doch nur scheinbar seien und darauf beruhen, dass er meine Behandlungsweise des Gegenstandes nicht richtig verstanden habe.



Es giebt verschiedene Vorgänge, welche nicht unter denselben Umständen, unter denen sie stattgefunden haben, wieder rückgängig werden können, und welche ich daher nicht umkehrbar nenne. Einer ist der durch Leitung oder Strahlung bewirkte Wärmeübergang aus einem wärmeren in einen kälteren Körper, indem die Wärme nicht in gleicher Weise auch aus dem kälteren in den wärmeren Körper übergehen kann. Ein anderer ist die durch Reibung bewirkte Verwandlung von Arbeit in Wärme, denn es ist nicht möglich durch einen entsprechenden umgekehrten Process in gleicher Weise, ohne irgend eine andere als Compensation dienende Veränderung, Wärme in Arbeit zu verwandeln. Dass diese beiden Vorgänge als nicht umkehrbare zu betrachten seien, wird, so viel ich weiss, auch von Bauschinger nicht bestritten. Bei einem dritten Vorgange dagegen, welcher sich auf die Ausdehnung eines Gases bezieht, gehen unsere Ansichten aus einander, und diesen muss ich daher etwas eingehender besprechen.

In einem oben durch einen beweglichen Stempel abgeschlossenen Cylinder möge sich eine Quantität eines Gases befinden, und zwar, wie wir der Einfachheit wegen annehmen wollen, eines vollkommenen Gases. Wir wollen uns nun vorstellen, das Gas dehne sich aus und hebe dabei den Stempel; der letztere bewege sich aber nur so langsam, dass das darunter befindliche Gas hinlänglich nachfolgen könne, so dass der Druck stets in allen Theilen der Gasmasse gleich sei. Bei dieser Ausdehnung kann das Gas einen Widerstand überwinden, welcher in jedem Augenblicke seiner eigenen Expansivkraft gleich ist. Die im Gase enthaltene Wärme leistet dadurch eine äussere Arbeit, wozu Wärme verbraucht wird, so dass dem Gase, wenn es sich während der Ausdehnung nicht abkühlen soll, von aussen Wärme zugeführt werden muss.

Wenn nun der Stempel bis zu einer gewissen Höhe, z. B. bis zur doppelten Höhe gelangt ist, kann man ihn wieder hinabdrücken und dadurch das Gas in sein ursprüngliches Volumen bringen. Dabei hat man einen Druck anzuwenden, welcher in derselben Weise wächst, wie der vorher überwundene Druck abnahm; es wird also eine ebenso grosse äussere Arbeit verbraucht, wie vorher gewonnen wurde. Dadurch wird eine entsprechende Menge Wärme erzeugt, und es muss daher dem Gase, wenn es sich während der Zusammendrückung nicht erwärmen soll, ebenso viel Wärme entzogen werden, wie ihm bei der Ausdehnung zugeführt wurde. Der Zusammendrückungsprocess ist also in jeder Beziehung dem Ausdehnungsprocesse gleich, und die vorher beschriebene Ausdehnung hat somit in umkehrbarer Weise stattgefunden.

Neben jener Ausdehnungsart wollen wir nun eine zweite betrachten. Wir denken uns, der Stempel stehe schon von Anfang an in der doppelten Höhe, aber der unter dem Stempel befindliche Raum des Cylinders sei durch eine in der Mitte angebrachte Scheidewand in zwei Ab-

theilungen getheilt. In der unteren Abtheilung befinde sich das Gas und die obere sei leer. Wenn nun plötzlich in der Scheidewand eine Oeffnung gemacht wird, so wird ein Theil des Gases mit grosser Geschwindigkeit aus der unteren Abtheilung in die obere strömen, und wird dort, nachdem es verschiedene wirbelnde Bewegungen ausgeführt hat, endlich durch die Reibung der Gastheile unter sich und gegen die Wände zur Ruhe kommen.

Bei dieser zweiten Ausdehnung sind zwar das Anfangs- und Endvolumen des Gases ebenso gross, wie bei der zuerst beschriebenen, aber die Art des Ueberganges aus dem einen Volumen in das andere hat in ganz anderer Weise stattgefunden, als bei jener, und es ist nicht möglich, eine Zusammendrückung auszuführen, welche dieser zweiten Ausdehnungsart entspricht. Jede Zusammendrückung, welche man ausführen kann, unterscheidet sich von dieser Ausdehnung in folgenden zwei wesentlichen Punkten. 1) Bei der Ausdehnung ist nach aussen keine Arbeit abgegeben; die Zusammendrückung aber kann nicht stattfinden, ohne dass von aussen her Arbeit angewandt und verbraucht wird. 2) Nach der Ausdehnung enthält das Gas, wenn ihm von aussen keine Wärme mitgetheilt und entzogen wird, im Ganzen genommen ebenso viel Wärme, als vor derselben. Wenn auch das in der unteren Abtheilung zurückbleibende Gas sich abgekühlt hat, so hat dafür das in die obere Abtheilung geströmte Gas sich durch die Reibung, welche es zur Ruhe gebracht hat, um ebenso viel erwärmt, so dass, wenn nachträglich die Temperaturen der beiden Abtheilungen sich ausgleichen, wieder die ursprüngliche Temperatur entsteht. Zusammengedrückt kann dagegen das Gas nicht werden, ohne dass dabei durch die von aussen her angewandte Arbeit Wärme erzeugt wird. Das Gas muss also während der Zusammendrückung Wärme nach aussen abgeben, wenn seine Temperatur nicht steigen soll. Die zweite Art der Ausdehnung hat somit unter Umständen stattgefunden, welche bei einer Zusammendrückung nicht möglich sind, und sie muss daher als n i c h t u m k e h r b a r bezeichnet werden.

Wir wollen nun das Integral

$$\int \frac{dQ}{T}$$

betrachten. In diesem Integrale bedeutet dQ die unendlich kleinen Wärmemengen, welche ein veränderlicher Körper während seiner Veränderungen von aussen empfängt (oder, wenn dQ negativ ist, nach aussen abgiebt), und T ist die absolute Temperatur des Körpers im Momente der Wärmeaufnahme (oder Wärmeabgabe). Ich habe bewiesen, dass dieses Integral für jeden umkehrbaren Kreisprocess Null wird, dagegen für einen nicht umkehrbaren Kreisprocess einen angebbaren negativen Werth annimmt.

Wenden wir dieses auf den aus der Ausdehnung und der darauf folgenden Zusammendrückung unseres Gases bestehenden Kreisprocess an, und nehmen beispielsweise an, die Temperatur soll während des ganzen Processes constant erhalten werden, so ist leicht ersichtlich, wie der Satz sich dabei bestätigt.

Findet die Ausdehnung in der ersten Weise statt, so muss dabei das Gas, damit es sich nicht abkühlt, Wärme von aussen empfangen. Wenn dann das Gas wieder zusammengedrückt wird, so muss es, um sich nicht zu erwärmen, ebenso viel Wärme nach aussen abgeben. Das auf den ganzen Kreisprocess bezügliche Integral wird also Null. — Findet dagegen die Ausdehnung in der zweiten Weise statt, so wird dabei in dem Gase selbst ebenso viel Wärme erzeugt, wie verbraucht. Wenn daher auch der unteren Abtheilung des Cylinders Wärme zugeführt werden muss, um die Temperatur constant zu erhalten, so muss der oberen Abtheilung ebenso viel Wärme entzogen werden, und das Integral wird daher, soweit es sich auf die Ausdehnung allein bezieht, Null. Bei der Zusammendrückung dagegen muss, um die Temperatur des Gases constant zu erhalten, eine Wärmeentziehung stattfinden, welche nicht durch eine Wärmemittheilung wieder aufgehoben wird, und das auf den ganzen Kreisprocess bezügliche Integral nimmt somit einen angebbaren negativen Werth an.

Nach diesen Auseinandersetzungen, welche dazu dienen sollten, den Gegenstand, um den es sich handelt, zuerst in ein klares Licht zu stellen, wende ich mich zu den von Bauschinger erhobenen Einwendungen.

Indem Bauschinger von einem Vorgange spricht, welcher dem Ueberströmen des Gases ähnlich ist, nämlich von dem bei einer Dampfmaschine stattfindenden Ueberströmen des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder, wo ein geringerer Druck herrscht als im Kessel, sagt er, ich habe übersehen, dass beim Hinaustreiben des Dampfes aus dem Kessel Arbeit geleistet wird, die zuerst als lebendige Potenz und dann als Wärme von dem ausströmenden Dampfe aufgenommen wird. Die Wärmemenge, welche dadurch entsteht, dass im Cylinder, wo der Dampf in Ruhe kommt, die Strömungsbewegung des Dampfes sich in Wärme umsetzt, sei von mir bei der Bestimmung des Integrales $\int \frac{dQ}{T}$ nicht mit gerechnet, was seiner Ansicht nach hätte geschehen müssen, und aus diesem Grunde sei ich zu einem angebbaren Werthe für das Integral gelangt. Wenn man aber alle vorkommenden Wärmemengen in richtiger Weise mitrechne, werde das Integral für den Kreisprocess, in welcher Weise auch die Ausdehnung stattgefunden haben möge, immer gleich Null.

Wenn Herr Bauschinger den Gang der Betrachtungen, durch welche ich den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet habe, genau verfolgt hätte, so würde er sich leicht davon überzeugt



haben, dass das, was er für ein Versehen hält, im Princip begründet ist, und gerade einen Hauptpunkt der ganzen Entwickelungsart bildet. Aus jenen Betrachtungen ergiebt sich nämlich, dass man bei einem Kreisprocesse nicht nöthig hat, auf die im Innern des veränderlichen Körpers stattfindenden Vorgänge und die dabei verbrauchten oder erzeugten Wärmemengen Rücksicht zu nehmen, sondern nur diejenigen Wärmemengen, welche der Körper während des Kreisprocesses von aussen empfängt oder nach aussen abgiebt, bei Bildung des Integrales $\int \frac{dQ}{T}$ in Rechnung zu bringen hat.

Dabei ist zu bemerken, dass, wenn man bei einem Kreisprocesse alle von aussen aufgenommenen und nach aussen abgegebenen Wärmemengen in Rechnung bringt, man dadurch von selbst auch die innerlich zu Arbeit verbrauchten oder durch Arbeit erzeugten Wärmemengen mit berücksichtigt. Da nämlich der Körper am Ende des Kreisprocesses ebenso viel Wärme enthält wie zu Anfang, so müssen die während des Kreisprocesses in ihm erzeugten und verbrauchten Wärmemengen, so weit sie sich nicht gegenseitig aufheben, äusserlich kund werden, indem die erzeugte Wärme nach aussen abgegeben und die verbrauchte von aussen aufgenommen werden muss. Wenn man daher die innerlich erzeugten und verbrauchten Wärmemengen als solche noch besonders in die Formel aufnehmen wollte, so würde man sie doppelt rechnen.

Ich will dieses an dem oben betrachteten Kreisprocesse, welcher darin besteht, dass das Gas durch Ueberströmen aus der unteren, vollen Abtheilung des Cylinders in die obere, leere Abtheilung sich ausdehnt, und dann wieder zusammengedrückt wird, näher nachweisen.

Indem ein Theil des Gases aus der unteren Abtheilung in die obere strömt, wird zur Hervorbringung der Strömungsbewegung in der unteren Abtheilung Wärme verbraucht, und in der oberen Abtheilung wird Wärme erzeugt, indem die Strömungsbewegung sich dort in Wärme umsetzt. Man muss daher, wenn man die Temperatur constant erhalten will, wie schon oben gesagt wurde, der unteren Abtheilung Wärme von aussen zuführen und der oberen Abtheilung Wärme entziehen. Wenn nachher das Gas wieder zusammengedrückt wird, so wird dabei in ihm Wärme erzeugt, welche ihm ebenfalls entzogen werden muss. Wenn man also bei der Bildung des Integrales $\int \frac{dQ}{T}$ die Wärmemengen, welche das Gas von aussen empfängt oder nach aussen abgiebt, in Rechnung bringt, so kommen dadurch auch jene drei auf die inneren Vorgänge bezüglichen Wärmemengen, nämlich die verbrauchte und die beiden erzeugten, zur Geltung.

Wollte man, wie Bauschinger es verlangt, die Wärmemenge, welche dadurch entsteht, dass die Strömungsbewegung sich in der oberen Ab-

theilung in Wärme umsetzt, noch besonders als eine vom Gase aufgenommene Wärmemenge in Rechnung bringen, so würde diese Wärmemenge zweimal in dem Integrale vorkommen, einmal als aufgenommene und einmal als abgegebene Wärme, also einmal mit dem positiven und einmal mit dem negativen Vorzeichen. Consequenter Weise müsste man dann auch die in der unteren Abtheilung verbrauchte Wärme noch besonders als eine vom Gase abgegebene Wärmemenge und die bei der Zusammendrückung erzeugte Wärme als eine vom Gase aufgenommene Wärmemenge in Rechnung bringen. Dadurch würde man ein Integral erhalten, in welchem alle Wärmemengen zweimal mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkämen. Diesem Integrale könnte allerdings die Eigenschaft, gleich Null zu werden, wie auch die in dem Kreisprocesse vorkommende Ausdehnung des Gases vor sich gegangen sein möge, ohne Widerspruch zugeschrieben werden; aber ein solches Resultat würde keine weitere theoretische Bedeutung haben.

Ob Herr Bauschinger wirklich alle in dem veränderlichen Körper erzeugten und verbrauchten Wärmemengen als solche noch besonders in Rechnung bringen will, oder ob er nur einzelne derselben zu diesem Zwecke auswählen, und nach welchen Regeln er die Auswahl treffen will, brauche ich hier nicht zu untersuchen, sondern kann mich darauf beschränken, zu erklären, dass jedes Integral, in welchem noch andere Wärmemengen, als die von aussen empfangenen und nach aussen abgegebenen, vorkommen, von demjenigen, welches ich eingeführt habe, und auf welches sich meine Sätze beziehen, verschieden ist. Zugleich ist als selbstverständlich zu betrachten, dass man bei Beurtheilung der Rechnungen, durch welche ich den Werth des Integrals für specielle Fälle bestimmt habe, die Definition, welche ich von dem Integrale gegeben habe, zu Grunde legen muss und sie nicht durch eine andere, mir fremde Definition ersetzen darf.

Nachdem ich auf diese Weise den von Bauschinger erhobenen Haupteinwand, welcher von principieller Bedeutung ist, widerlegt habe, wird es nicht nöthig sein, auf den speciellen Fall, welchen er behandelt, nämlich das Ueberströmen des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder, hier näher einzugehen. Ich will nur noch bemerken, dass die übrigen Versehen, welche er mir noch zuschreibt, und welche darin bestehen sollen, dass ich gewisse Arbeitsgrössen vernachlässigt habe, ihre Erledigung in ganz ähnlicher Weise finden wie jener Einwand.

Es ist nämlich bei Bestimmung der während eines Kreisprocesses geleisteten oder verbrauchten Arbeit nicht nöthig, die im Innern des veränderlichen Körpers durch Kräfte, welche die Bestandtheile desselben auf einander ausüben, gethanen Arbeitsgrössen in Betracht zu ziehen, sondern man hat nur die nach aussen abgegebene oder von aussen empfangene Arbeit zu berücksichtigen, d. h. diejenige Arbeit, welche

darin besteht, dass fremde auf den Körper wirkende Kräfte (z. B. ein von der Oberfläche stattfindender äusserer Druck) von den vom Körper ausgeübten Gegenkräften überwunden werden, oder umgekehrt diese letzteren überwinden. Jene innerlich gethanen Arbeitsgrössen müssen sich in einem Kreisprocesse nothwendig gegenseitig aufheben. Auf diese Weise erklärt es sich, dass Bauschinger trotz mehrerer Fehler, die er gefunden zu haben glaubt und die ich dadurch begangen haben soll, dass ich innerlich gethane Arbeitsgrössen vernachlässigt habe, schliesslich findet, dass alle diese vermeintlichen Fehler sich wieder aufgehoben haben und das Resultat richtig ist.

Es sei mir gestattet, bei dieser Gelegenheit noch eine kleine Berichtigung eines auf einen anderen Gegenstand bezüglichen Citates hinzuzufügen.

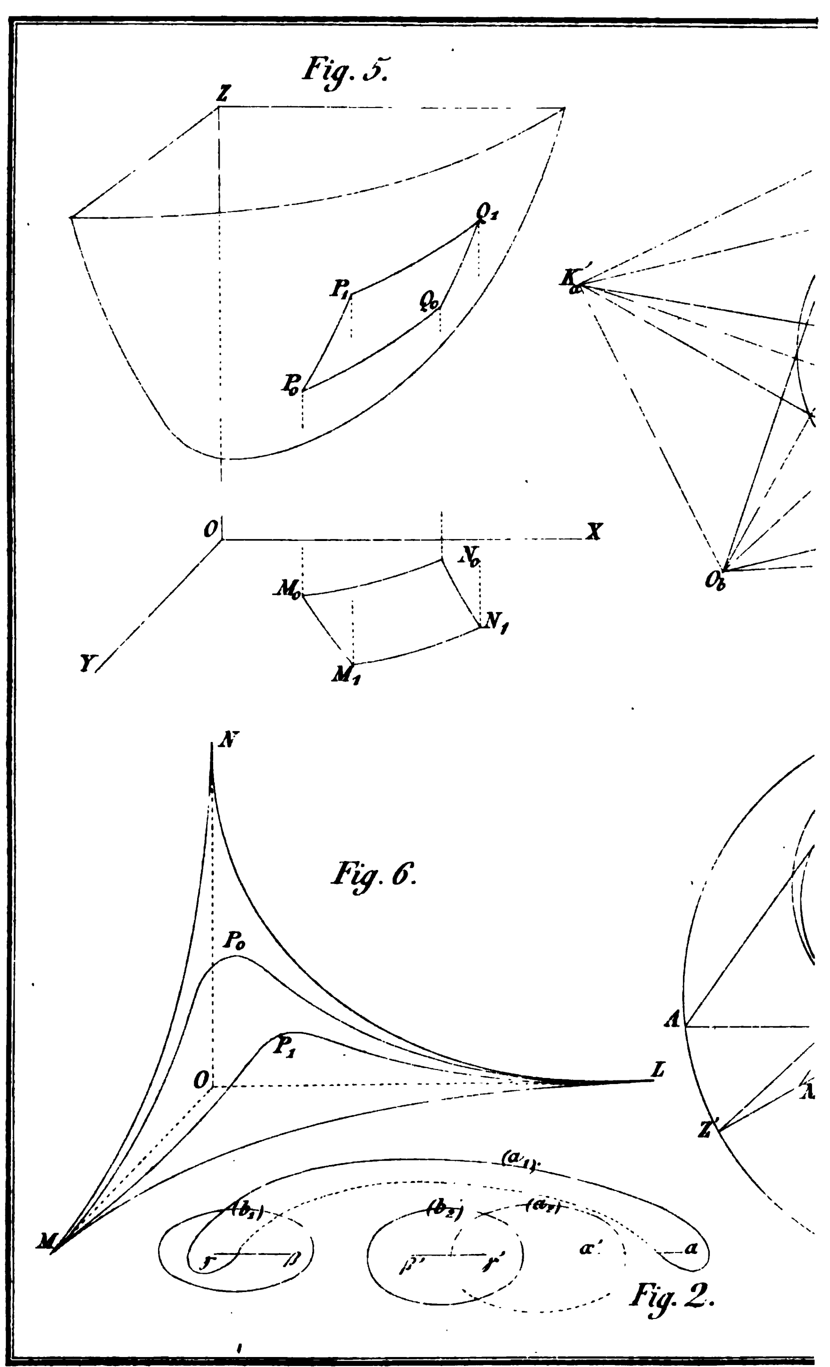
Am Ende des vorjährigen Bandes dieser Zeitschrift, S. 511, befindet sich ein Aufsatz von Loschmidt „über die Grösse der Luftmolecüle", welcher folgendermassen beginnt: „Die Wissenschaft verdankt der neueren Gastheorie bereits viele wichtige Aufschlüsse in den interessantesten Fragen. So unter Andern die Kenntniss der mittleren Geschwindigkeit der Gastheilchen, so die ihrer mittleren Weglänge. Maxwell hat in seiner Arbeit über den letzten Gegenstand eine Formel gefunden, welche eine merkwürdige Beziehung zwischen molecularem Wegvolumen und molecularem Raumvolumen festsetzt." In den Sitzungsberichten der Wiener Academie Bd. LII, wo dieselbe Untersuchung von Loschmidt noch ausführlicher mitgetheilt ist, wird der zuletzt angedeutete Satz, welchen Loschmidt Maxwell zuschreibt, ebenfalls erwähnt, und es heisst in Bezug auf die betreffende Gleichung: „Wir benutzen dazu eine Gleichung, welche von Maxwell aufgestellt wurde und von Clausius eine kleine Modification erfahren hat."

In diesen Stellen ist der Sachverhalt nicht richtig ausgedrückt. Der betreffende Satz ist zuerst von mir aufgestellt in meiner Abhandlung „über die mittlere Länge der Wege etc.", welche in Poggendorff's Annalen im Octoberhefte 1858 erschien, zu einer Zeit, wo Maxwell über diesen Gegenstand noch nichts geschrieben hatte. Im Januar 1860 ist dann im Phil. Mag. die Abhandlung von Maxwell erschienen, worin er meinen Satz dahin modificirt, dass er an die Stelle des Factors $\frac{4}{3}$ den Factor $\sqrt{2}$ setzt. In Folge dessen habe ich im Junihefte 1860 des Phil. Mag. eine kleine Note veröffentlicht (die einzige, welche Loschmidt citirt), in welcher ich die ursprüngliche Form meines Satzes aufrecht erhalten habe, worauf von Maxwell, so viel ich weiss, nichts entgegnet ist.

Mein Satz lautet in Worten, ausgesprochen, folgendermassen (s. Pogg. Ann. Bd. CV, S. 250): Die mittlere Weglänge eines Molecüls

verhält sich zum Radius der Wirkungssphären wie der von dem Gase im Ganzen eingenommene Raum zu dem Theile des Raumes, welcher von den Wirkungssphären der Molecüle wirklich ausgefüllt wird. Dabei ist zu bemerken, dass ich unter Wirkungssphäre eines Molecüls diejenige um den Schwerpunkt des Molecüls beschriebene Kugelfläche verstanden habe, bis zu welcher der Schwerpunkt eines anderen Molecüls sich ihm bei den stattfindenden Bewegungen nähern kann. Will man die Molecüle mit elastischen Kugeln vergleichen, welche sich so weit einander nähern können, bis ihre Oberflächen sich berühren, so ist der Radius einer solchen Kugel nur halb so gross als der Radius der Kugel, welche ich Wirkungssphäre nenne. Um den obigen Satz auf solche supponirte elastische Kugeln zu beziehen, muss man daher statt des Wortes „Radius" das Wort „Durchmesser" setzen.

Zürich, den 7. Juni 1866. R. Clausius.


Fig. 5.
Z
Q1
P1
Q0
P0
K'
O
X
N0
M0
N1
Y
M1
O0
N
Fig. 6.
P0
P1
O
L
A
Z'
M
Fig. 2.

XVII.

Ueber specielle vierfach periodische Functionen.

Von

Dr. G. Roch,

Professor an der Universität Halle.

(Hierzu Tafel IV, Figur 1 und 2.)

Es sind schon mehrfache Beispiele hyperelliptischer oder Abel'scher Integrale bekannt, welche sich durch rationale Transformationen auf die Form elliptischer Integrale bringen lassen.

Ich will im Folgenden eine Betrachtungsweise entwickeln, welche bei geeigneter Anwendung auch die allgemeinste Bedingung zu liefern vermag, unter welcher sich die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung auf elliptische bringen lassen. Im Verlaufe dieser Abhandlung will ich nur einige specielle Fälle betrachten, welche besonders geeignet sind, die Methode zu erläutern und welche schon erkennen lassen, zu welch zahlreichen neuen Beziehungen, namentlich zwischen elliptischen und hyperelliptischen ϑ-Functionen diese Betrachtungen führen können.

Die angeregte Frage hängt eng mit einer andern zusammen. Ist $F(s,z)=0$ eine gegebene algebraische Gleichung, welche durch rationale Substitutionen s_1, z_1 in die Form $F(s_1, z_1)$ umgeformt werden kann, so ist (siehe Riemann §§. 11 und 13) das p beider Gleichungen im Allgemeinen dasselbe; nicht aber immer. Hat man z. B. die Gleichung

$$1)\qquad s^2=(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)(z^2-\gamma^2),$$

so ist $p=2$; setzt man $z^2=\zeta$, so wird

$$s^2=(\zeta-\alpha^2)(\zeta-\beta^2)(\zeta-\gamma^2)$$

und hier ist $p=1$. Der ersten Gleichung entsprechen die beiden endlich bleibenden, wie s verzweigten Integrale:

$$w_1=\int\frac{dz}{s},\quad w_2=\int\frac{z\,dz}{s}.$$

Nur das Integral w_2 ist auch als Function von ζ betrachtet, wie s verzweigt, nämlich $w_2 = \frac{1}{2}\int \frac{d\zeta}{s}$; das Integral w_1 aber ist $w_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d\zeta}{s\sqrt{\zeta}}$. Sobald es möglich ist, durch rationale Substitutionen p auf 1 zu bringen, muss sich auch wenigstens eines der endlich bleibenden Integrale auf ein elliptisches reduciren lassen.

Ehe ich die Methode auseinandersetze, die uns zur Beantwortung der angeregten Fragen führen soll, will ich das eben erwähnte Beispiel näher untersuchen. Die Grösse ζ muss sich offenbar auf zweifache Weise als doppelt periodische Function, sowie andererseits auch als vierfach periodische Function betrachten lassen. Dies ergiebt sich auch durch Betrachtung der Argumente u_1, u_2 und der Constanten a_{11}, a_{12}, a_{22} der hyperelliptischen ϑ-Function

2) $$\vartheta(u_1, u_2) = \Sigma\Sigma e^{m^2 a_{11} + 2mn a_{12} + n^2 a_{22} + 2m u_1 + 2n u_2}.$$

Bezeichnen wir mit α', β', γ', α, β, γ die sechs Verzweigungspunkte von s (in unserm Beispiele ist $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$), legen wir die Querschnitte, sowie die Fig. 1, Taf. IV anzeigt; sind A'_1, A''_1, B'_1, B''_1 die Periodicitätsmoduln von w_1; $A'_2 \ldots B''_2$ die von w_2 resp. an (a_1), (a_2), (b_1), (b_2), dann ist in unserm Falle:

$$A''_1 = -A'_1; \quad A''_2 = A'_2; \quad B''_1 = -B'_1; \quad B''_2 = B'_2.$$

Um diese Gleichungen zu erhalten, muss man berücksichtigen, dass s in (a_1) und (a_2) gleiche Werthe, in (b_1), (b_2) aber entgegengesetzte Werthe durchläuft. Die Argumente von $\vartheta(u_1, u_2)$ sind

$$u_1 = a_1 w_1 + b_1 w_2; \quad u_2 = a_2 w_1 + b_2 w_2;$$

die a, b bestimmen sich durch die Moduln der u an (a_1) und (a_2) zu

$$a_1 = -a_2 = \frac{\pi i}{2A'_1}; \quad b_1 = b_2 = \frac{\pi i}{2A'_2},$$

ferner sind:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{B'_1}{A'_1} + \frac{B'_2}{A'_2}\right); \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{B'_1}{A'_1} + \frac{B'_2}{A'_2}\right).$$

Daraus ergiebt sich, dass $u_1 + u_2$ an (a_1), (a_2), sowie an (b_1), (b_2) gleich grosse Periodicitätsmoduln hat; $u_1 - u_2$ hat ähnlicher Weise an (a_1) und (a_2), sowie an (b_1) und (b_2) entgegengesetzte Periodicitätsmoduln. Aus diesen Eigenschaften ergiebt sich die Möglichkeit der Darstellung von ζ durch elliptische ϑ-Funtionen. Ehe ich hierzu übergehe, will ich die Charakteristiken bestimmen.

In jedem der 6 Verzweigungspunkte, z. B. in α, haben die Integrale u_1, u_2 bei geeigneter Bestimmung der additiven Constanten die Werthe:

3) $$u_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_1 \pi i + \varepsilon_1 a_{11} + \varepsilon_2 a_{12}); \quad u_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon'_2 \pi i + \varepsilon_1 a_{21} + \varepsilon_2 a_{22}),$$

wobei ε, ε' die Werthe 0 oder 1 haben können, so dass

$$(\varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 \varepsilon'_2) \equiv 1 \qquad (\text{Mod. } 2).$$

Den Complex $\begin{pmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2 \\ \varepsilon'_1, & \varepsilon'_2\end{pmatrix}$ oder kürzer (ε) nennen wir Charakteristik von α

und wir sagen, dass jeder der Verzweigungspunkte eine ungerade Charakteristik besitzt; ist (η) die Charakteristik eines anderen Verzweigungspunktes, z. B. β, so ist auch $(\eta_1 \eta'_1 + \eta_2 \eta'_2) \equiv 1$ (Mod. 2); es giebt nun 6 ungerade Charakteristiken, die sich auf die 6 Verzweigungspunkte vertheilen. Die Charakteristik $(\varepsilon + \eta)$ oder $(\varepsilon - \eta)$, d. h. der Complex

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \pm \eta_1, & \varepsilon_2 \pm \eta_2 \\ \varepsilon'_1 \pm \eta'_1, & \varepsilon'_2 \pm \eta'_2 \end{pmatrix}$$

hängt mit Eigenschaften von $\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$ oder $\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$ zusammen; diese Grössen sind algebraische, nicht wie s verzweigte Functionen von z, die sich aber als eindeutige Functionen des Ortes in der Fläche T darstellen lassen; um dies zu bewirken, muss man der Wurzel zu beiden Seiten der Querschnitte theils gleiche, theils entgegengesetzte Werthe geben; die Factoren ± 1 an den 4 Querschnitten (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) sind

$$e^{(\varepsilon_1+\eta_1)\pi i},\ e^{(\varepsilon_2+\eta_2)\pi i},\ e^{(\varepsilon'_1+\eta'_1)\pi i},\ e^{(\varepsilon'_2+\eta'_2)\pi i}$$

und $(\varepsilon + \eta)$ oder $(\varepsilon - \eta)$ heisst die Charakteristik der Grösse $\sqrt{z-\alpha . z-\beta}$ oder $\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$.

Diese letzteren Charakteristiken lassen sich sehr leicht durch Betrachtung der Fig. 1 bestimmen. Da (a_2), (b_2) um keinen der Punkte α, β herumgehen, so bleibt $\sqrt{z-\alpha . z-\beta}$ nach stetiger Fortsetzung durch diese Linien ungeändert, oder da (a_2), (b_2) gegenseitig von positiver und zu negativer Seite, oder umgekehrt, führen, so hat diese Wurzel zu beiden Seiten der Querschnitte (b_2), (a_2) gleiche Werthe; dagegen laufen (b_1) und (a_1) resp. um β und α, so dass nach Durchlaufung jeder dieser Linien die Wurzel entgegengesetzte Werthe erlangt, daher hat dieselbe zu beiden Seiten von (a_1), (b_1) entgegengesetzte Werthe und die Charakteristik ist $\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$. Ebenso finden sich die Charakteristiken von

$$\sqrt{(z-\alpha')(z-\alpha)},\ \sqrt{(z-\beta')(z-\alpha)},\ \sqrt{(z-\gamma')(z-\alpha)},\ \sqrt{(z-\beta)(z-\alpha)},\ \sqrt{(z-\gamma)(z-\alpha)}$$

resp. zu:

$$\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgen sofort die Charakteristiken der einzelnen Verzweigungspunkte.

Durch Combination zweier derselben erhält man $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Charakteristiken, d. h. alle 16 möglichen mit Ausnahme $\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$; sind (ε), (η), (ζ) drei verschiedene ungerade Charakteristiken, so muss $(\varepsilon + \eta + \zeta)$ eine gerade Charakteristik sein; wäre $(\varepsilon + \eta + \zeta)$ ungerade gleich (δ), so wäre

$$(\varepsilon + \eta + \zeta + \delta) = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix};$$

wären aber (ε), (η), (ζ), (δ) resp. die Charakteristiken von Verzweigungspunkten $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, so müsste dann $\sqrt{z-\alpha . z-\beta . z-\alpha' . z-\beta'}$ rational sein, da es zu beiden Seiten aller Querschnitte gleich gross sein müsste.

Die Anzahl von Combinationen zu je drei beträgt $\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$, d. h. jede der 10 geraden Charakteristiken wird zweimal erhalten; unter den 5 eben angegebenen Charakteristiken sind zwei ungerade, die zu den Combinationen $\gamma'\alpha$, $\beta\alpha$ gehören; diese müssen auch als Charakteristiken einzelner Verzweigungspunkte vorkommen und zwar folgt aus den angestellten Betrachtungen, dass die Charakteristik von $\sqrt{z-\gamma' . z-\alpha}$ gleich der von β, die von $\sqrt{z-\beta . z-\alpha}$ gleich der Charakteristik von γ' sein muss, oder in leicht verständlicher symbolischer Bezeichnung

$$(\alpha+\beta+\gamma')=\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}.$$

Ebenso wäre auch $(\alpha'+\beta'+\gamma)=\begin{pmatrix}0\,0\\0\,0\end{pmatrix}$.

Hieraus ergiebt sich folgende Vertheilung der Charakteristiken

$$4)\qquad \begin{matrix}(\alpha') & (\beta') & (\gamma') & (\alpha) & (\beta) & (\gamma)\\ \begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\,0\\1\,1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\,0\\1\,0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\,1\\0\,1\end{pmatrix}\end{matrix}.$$

Wir betrachten nun das Integral u_1+u_2, welches an (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) die Periodicitätsmoduln

$$\pi i,\quad \pi i,\quad a_{11}+a_{12},\quad a_{12}+a_{22}=a_{11}+a_{12}$$

besitzt und untersuchen

$$5)\qquad \vartheta(u_1+u_2)=\Sigma e^{n^2(a_{11}+a_{12})+2n(u_1+u_2)}.$$

$lg\,\vartheta$ hat, von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ abgesehen, zu beiden Seiten der (a) gleiche Werthe, dagegen ist an (b_1), (b_2) übereinstimmend:

$$\underset{+}{lg\,\vartheta}=\underset{-}{lg\,\vartheta}-2(u_1+u_2+Const.).$$

Das Integral $\int d\,lg\,\vartheta$, durch die ganze Begrenzung von T' ausgedehnt, liefert daher $2.2\pi i$, d. h. die Function $\vartheta(u_1+u_2$ verschwindet in 2 Punkten der Fläche T (vergl. Riemann §. 22).

Untersuchen wir nun:

$$6)\qquad \vartheta(u_1-u_2)=\Sigma e^{n^2(a_{11}-a_{12})+2n(u_1-u_2)}.$$

Zu beiden Seiten der (a) ist $lg\,\vartheta$ gleich gross; dagegen ist an (b_1), (b_2) resp.

$$\underset{+}{lg\,\vartheta}=\underset{-}{lg\,\vartheta}-2(u_1-u_2)+Const.;\quad \underset{+}{lg\,\vartheta}=\underset{-}{lg\,\vartheta}+2(u_1-u_2).$$

Das Integral u_1-u_2 hat an (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) die Moduln

$$\pi i,\quad -\pi i,\quad a_{11}-a_{12},\quad -(a_{11}-a_{12})$$

und dies giebt als Betrag von $\int d\,lg\,\vartheta$ wieder $2.2\pi i$; also ist auch $\vartheta(u_1-u_2)$ in zwei Punkten der Fläche T gleich Null. Wir schreiben:

7) $$\begin{cases} u_1 + u_2 \equiv u_1 + u_2 + m\pi i + n(a_{11} + a_{12}) \\ u_1 - u_2 \equiv u_1 - u_2 + m\pi i + n(a_{11} - a_{12}) \end{cases},$$

m und n ganze Zahlen.

Dann sind die Werthe dieser Integrale in den Verzweigungspunkten:

	α, α';	β, β';	γ, γ'
$u_1 + u_2 \equiv$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{1}{2}(a_{11} + a_{12})$	$\frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{12})$
$u_1 - u_2 \equiv$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$	$\frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$

Da $\vartheta(v) = \Sigma e^{n^2 a + 2nv}$ verschwindet, wenn $v \equiv \frac{\pi i}{2} + \frac{a}{2}$, so verschwinden $\vartheta(u_1 + u_2)$ und $\vartheta(u_1 - u_2)$ in γ und γ'; ferner $\vartheta\left(u_1 + u_2 + \frac{\pi i}{2}\right)$ und $\vartheta\left(u_1 + u_2 + \frac{\pi i}{2}\right)$ in β und β'; ferner:

$$\vartheta\left(u_1 + u_2 + \frac{a_{11} + a_{12}}{2}\right) \text{ und } \vartheta\left(u_1 - u_2 + \frac{a_{11} - a_{12}}{2}\right)$$

in α und α'.

Ebenso verschwinden $\vartheta(u_1 + u_2 - c)$ und $\vartheta(u_1 - u_2 - c)$ in je zwei Punkten, in denen resp.

$$u_1 + u_2 \equiv c + \frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{12})$$
$$u_1 - u_2 \equiv c + \frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$$

Da c beliebig ist, so heisst dies: $u_1 + u_2$ sowohl, als $u_1 - u_2$ werden jedem gegebenen Werthe in zwei Punkten der Fläche T congruent. Die Quotienten $\sqrt{\frac{z-\alpha . z-\alpha'}{z-\gamma . z-\gamma'}}$, sowie $\sqrt{\frac{z-\beta . z-\beta'}{z-\gamma . z-\gamma'}}$ lassen sich hiernach leicht durch elliptische ϑ-Functionen, sowie nach den von **Riemann** entwickelten Principien durch hyperelliptische ϑ-Functionen ausdrücken. In unserm speciellen Falle ist $\alpha' = -\alpha$ etc. und man muss haben:

8) $$\begin{cases} \sqrt{\frac{z^2 - \alpha^2}{z^2 - \gamma^2}} = A \frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1, u_2)}{\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}(u_1, u_2)}; \\ \sqrt{\frac{z^2 - \beta^2}{z^2 - \gamma^2}} = B \frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(u_1, u_2)}{\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}(u_1, u_2)}; \end{cases}$$

andererseits muss sein:

$$9)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{z^2-\alpha^2}{z^2-\gamma^2}} = A_1 \dfrac{\vartheta[u_1+u_2+\frac{1}{2}(a_{11}+a_{12})]}{\vartheta(u_1+u_2)} e^{u_1+u_2} \\ \qquad\qquad = A_2 \dfrac{\vartheta[u_1-u_2+\frac{1}{2}(a_{11}+a_{12})]}{\vartheta(u_1-u_2)} e^{u_1-u_2} \\ \sqrt{\dfrac{z^2-\beta^2}{z^2-\gamma^2}} = B_1 \dfrac{\vartheta\left(u_1+u_2+\frac{\pi i}{2}\right)}{\vartheta(u_1+u_2)} = B_2 \dfrac{\vartheta\left(u_1-u_2+\frac{\pi i}{2}\right)}{\vartheta(u_1-u_2)}. \end{cases}$$

Die ϑ Functionen in 8) und 9) sind durch die Gleichungen 2), 5), 6) erklärt.

Die Richtigkeit der Gleichungen 9) kann man auch noch prüfen, indem man die Factoren vergleicht, welche die Quadratwurzeln einerseits und die ϑ-Functionen andererseits an den Querschnitten erlangen müssen.

Auch die Quotienten

$$10a)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta\left(u_1+u_2+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}+a_{12}}{2}\right)}{\vartheta(u_1+u_2)} e^{u_1+u_2}, \\ \dfrac{\vartheta\left(u_1-u_2+\frac{\pi i}{2}+\frac{a_{11}-a_{12}}{2}\right)}{\vartheta(u_1+u_2)} e^{u_1-u_2} \end{cases}$$

müssen Quadratwurzeln rationaler Functionen von s und z sein. Die Charakteristik dieser Quotienten ist $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, also gleich der von $\sqrt{z^2-\gamma^2}$; mithin müssen beide Quotienten die Formen haben:

$$10b)\qquad C\frac{z-k}{\sqrt{z^2-\gamma^2}},\qquad C_1\frac{z-k'}{\sqrt{z^2-\gamma^2}}.$$

Man könnte dies auch leicht finden durch Betrachtung von:

$$u_1+u_2=\frac{\pi i}{A_2'}w_2;\quad u_1-u_2=\frac{\pi i}{A_1'}w_1$$

als Function von ζ.

An die Gleichungen 8) und 9) knüpfen sich aber noch andere Bemerkungen. Da nämlich u_1+u_2, sowie u_1-u_2 jedem Werthe in zwei Punkten congruent werden, so müssen auch $\frac{z^2-\alpha^2}{z^2-\gamma^2}$ und $\frac{z^2-\beta^2}{z^2-\gamma^2}$ in je zwei solchen Punkten gleich gross sein. Setzt man z. B. β, β' ein für z im ersten dieser Werthe, so giebt dies gleiche Werthe wegen $\beta'=-\beta$; setzt man α' und α für z in den zweiten Ausdruck, so erhält man auch Gleiches; diese Betrachtungen lassen sich auch bei allgemeiner Lage α', β', γ', α, β, γ der Verzweigungspunkte anstellen und geben dann die Bedingung, welche nöthig ist, damit sich die Integrale ähnlich wie im betrachteten Beispiele verhalten. Man kann dieselben Betrachtungen auf die Ausdrücke 10a), 10b) anwenden und daraus k und k' bestimmen. Ich will dies jedoch hier nicht durchführen, da wir zu demselben Gleichungssysteme bei dem nächsten Beispiele gelangen werden.

Ehe ich zu diesem übergehe, will ich auf eine andere Beziehung zwischen elliptischen und hyperelliptischen ϑ-Functionen aufmerksam machen, die man durch Vergleichung der Ausdrücke von Integralen zweiter Gattung erhält.

Der Ausdruck $lg\,\vartheta(u_1+u_2)$ ist in γ und γ' logarithmisch unendlich und der Differentialquotient $\dfrac{\vartheta'(u_1+u_2)}{\vartheta(u_1+u_2)}$ ist daher ein Integral zweiter Gattung, welches in γ und γ' unendlich erster Ordnung ist; nach den bekannten Eigenschaften von $lg\,\vartheta$ hat dieses Integral die Periodicitätsmoduln 0, 0, -2, -2 an (a_1), (a_2), (b_1), (b_2). In ähnlicher Weise ist $\dfrac{\vartheta'(u_1-u_2)}{\vartheta(u_1-u_2)}$ ein Integral zweiter Gattung, welches auch in γ und γ' unendlich erster Ordnung ist und die Periodicitätsmoduln 0, 0, -2, $+2$ besitzt.

Der Ausdruck $\vartheta[u_1-u_1(\gamma)-u_1(\gamma'),\, u_2-u_2(\gamma)-u_2(\gamma')]=\vartheta(v_1,v_2)$ ist in γ und γ' Null und $lg\,\vartheta(v_1,v_2)$ unterscheidet sich zu beiden Seiten der 4 Querschnitte (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) um 0, 0, $-2(u_1+Const.)$, $-2(u_2+Const.)$. Folglich ist, wenn

$$\frac{\partial\vartheta(v_1,v_2)}{\partial v_1}=\vartheta'_1(v_1,v_2),\quad \frac{\partial\vartheta(v_1,v_2)}{\partial v_2}=\vartheta'_2(v_1,v_2)$$

bezeichnet wird,

$$\frac{\vartheta'_1(v_1,v_2)}{\vartheta(v_1,v_2)}$$

ein Integral zweiter Gattung mit den Moduln 0, 0, -2, 0 und $\dfrac{\vartheta'_2(v_1,v_2)}{\vartheta(v_1,v_2)}$ ein solches mit den Moduln 0, 0, 0, -2.

Integrale zweiter Gattung, die in zwei Punkten unendlich erster Ordnung werden, enthalten nach Riemann ausser der additiven noch 4 Constante (für $p=2$); um diese zu bestimmen, genügt es, die 4 Periodicitätsmoduln zu kennen; daraus folgt:

$$11\,a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\vartheta'(u_1+u_2)}{\vartheta(u_1+u_2)}&=\frac{\vartheta'_1(v_1,v_2)+\vartheta'_2(v_1,v_2)}{\vartheta(v_1,v_2)}\\ \frac{\vartheta'(u_1-u_2)}{\vartheta(u_1-u_2)}&=\frac{\vartheta'_1(v_1,v_2)-\vartheta'_2(v_1,v_2)}{\vartheta(v_1,v_2)}; \end{aligned}\right.$$

ähnliche Gleichungen liefert die Betrachtung der Integrale zweiter Gattung, welche resp. in β, β' und α, α' unendlich werden. Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$\frac{\partial\, lg\,\vartheta(v_1,v_2)}{\partial v_1}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial\, lg[\vartheta(u_1+u_2)\,\vartheta(u_1-u_2)]}{\partial u_1}$$
$$\frac{\partial\, lg\,\vartheta(v_1,v_2)}{\partial v_2}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial\, lg[\vartheta(u_1+u_2)\,\vartheta(u_1-u_2)]}{\partial u_2},$$

mithin, da $u_1=v_1+Const.$, $u_2=v_2+Const.$,

$$11\,b)\quad \vartheta(v_1,v_2)=Const.\sqrt{[\vartheta(u_1+u_2)\,\vartheta(u_1-u_2)},$$

wo links ein hyperelliptisches, rechts zwei elliptische ϑ-Functionen stehen.

Gleichungen noch anderer Art kann man erhalten, indem man die Werthe elliptischer und hyperelliptischer ϑ-Functionen für specielle Werthe der u_1, u_2 z. B. für Werthe Null mit einander vergleicht. Ich will dies hier nicht weiter verfolgen, sondern zu Betrachtungen allgemeiner Art übergehen, welche direct unsere Aufgabe betreffen.

Offenbar ist der bis jetzt behandelte Fall, in welchem sich vierfach periodische Functionen durch doppelt periodische ersetzen liessen, nicht der allgemeinste.

Eine solche Darstellung ist vielmehr stets möglich, sobald ein Integral w existirt, dessen 4 Periodicitätsmoduln sich linear mit ganzzahligen Coefficienten durch πi und a ausdrücken lassen. Die Discussion dieser Bedingung verspare ich auf eine andere Gelegenheit; auch unter den weniger allgemeinen Voraussetzungen dieses Aufsatzes lässt sich die Mannichfaltigkeit der Beziehungen zwischen elliptischen und hyperelliptischen ϑ-Functionen erkennen.

Sobald ein Integral der angegebenen Art existirt, lassen sich gewisse algebraische Functionen sowohl als vierfach periodische, als auch als doppelt periodische darstellen; in allen solchen Fällen kann man daher auch die unendlichen Producte, die trigonometrischen Reihen, überhaupt alle die Darstellungen auch für mehrfach periodische Functionen entwickeln, welche in der Theorie der elliptischen Functionen bekannt sind.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nehmen wir die a_{11}, a_{12}, a_{22} als reell an, so dass $m_1 u_1 + m_2 u_2$ das Integral ist, welches an (a_1), (a_2) die Periodicitätsmoduln $m_1\,\pi i$, $m_2\,\pi i$ besitzt. Dann muss sein:

$$\frac{m_1 a_{11} + m_2 a_{12}}{m_1 a_{12} + m_2 a_{22}} = \frac{n_1}{n_2},$$

oder es muss zwischen den a_{11}, a_{12}, a_{22} eine Gleichung mit rationalen Coefficienten bestehen, welche $\frac{m_2}{m_1} = m$, $-\frac{n_2}{n_1} = n$ gesetzt, die Form hat:

$$a_{11} + (m+n)\,a_{12} + mn\,a_{22} = 0.$$

Sobald die 3 Grössen $a_{11} \dots a_{22}$ ein gemeinschaftliches Maass besitzen, kann man m_1 und m_2 immer beliebig annehmen und danach unendlich viele Gleichungen letzterer Art entwickeln. Nehmen wir aber an, dass eine einzige Gleichung von der Form bestände:

$$12)\qquad m_{11} a_{11} + m_{12} a_{12} + m_{22} a_{22} = 0,$$

wo m_{11}, m_{12}, m_{22} ganze Zahlen bezeichnen, so müssen m und n die Wurzeln der quadratischen Gleichung sein, die aus

$$m + n = \frac{m_{12}}{m_{11}};\quad mn = \frac{m_{22}}{m_{11}}$$

hervorgeht:



$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{m_2}{m_1} = m = \dfrac{m_{12} \pm \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}}{2m_{11}} \\ \text{oder} \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{m_{12} \mp \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}}{2m_{22}}, \\ -\dfrac{n_1}{n_2} = n = \dfrac{m_{12} \mp \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}}{2m_{11}} \\ \text{oder} \quad -\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{m_{12} \pm \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}}{2m_{22}} \end{cases}.$$

Es ist mithin nöthig, dass $m^2_{12} - m_{11}m_{22}$ ein vollständiges positives Quadrat sei. Im bisher behandelten Beispiele ist $a_{11} - a_{22} = 0$, also $m_{12} = 0$, $m_{11} = m_{22} = 1$.

Haben die Grössen a_{11}, a_{12}, a_{22} lauter rationale Verhältnisse, so lassen sich unendlich viele Darstellungen der hyperelliptischen Functionen durch elliptische angeben; dies ausgeschlossen kann man aus 13) die Werthe der m_1, m_2, n_1, n_2 herausnehmen; die Vorzeichen müssen dann so bestimmt werden, dass die Anzahl $m_1n_1 + m_2n_2$ der Nullpunkte positiv ist. Diese Anzahl darf auch nicht 0 sein; letzteres wäre der Fall, wenn $m^2_{12} - 4m_{11}m_{22} = 0$ wäre; es muss also immer zwei verschiedene Werthsysteme m_1, m_2, sowie n_1, n_2 geben, sobald eines vorhanden ist.

Es ist nicht nöthig, für m_1, m_2, n_1, n_2 die kleinsten aus 13) hervorgehenden Werthe zu nehmen; man kann z. B. die Zähler und Nenner selbst beibehalten und (bis auf das Vorzeichen) annehmen:

$$m_1 = n_2 = 2m_{11}; \quad m_2 = m_{12} \pm \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}$$
$$-n_1 = m_{12} \mp \sqrt{m^2_{12} - 4m_{11}m_{22}}.$$

Dann unterscheiden sich die beiden Auflösungen für m_2 und für n_1 um gerade Zahlen.

Die Werthe des Integrals $m_1u_1 + m_2u_2$ in den Verzweigungspunkten haben die Form, welche Auflösungen man auch für $m_1 \ldots n_2$ nehmen mag:

$$\frac{m_1\varepsilon'_1 + m_2\varepsilon'_2}{2}\pi i + \varepsilon_1 \frac{m_1a_{11} + m_2a_{12}}{2} + \varepsilon_2 \frac{m_1a_{12} + m_2a_{22}}{2},$$

oder mit Benutzung des lgq der elliptischen ϑ-Function:

$$\frac{m_1\varepsilon'_1 + m_2\varepsilon'_2}{2}\pi i + \frac{n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2}{2} lgq.$$

Nimmt man die Zähler und Nenner von 13) als Auflösungen, so unterscheiden sich die n von den m um gerade Zahlen, so dass man diese Werthe des Integrals congruent $\frac{1}{2}\left[(m_1\varepsilon'_1 + m_2\varepsilon'_2)\pi i + (m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2) lgq\right]$ setzen darf, als Moduln der Congruenz πi und lgq [vergl. 7)]. Die Werthe des $u = m_1u_1 + m_2u_2$ sind daher für beide Auflösungen in den Verzweigungspunkten von derselben Form.

Dies braucht nicht der Fall zu sein, wenn man für m_1, m_2, n_1, n_2 kleinere Werthe nimmt, als die Zähler und Nenner von 13).

Die Gleichung 12) kann man durch eine Gleichung zwischen den Con-

stanten der algebraischen Gleichung ersetzen; diese Gleichung kann man, wie aus dem schon betrachteten Beispiele, sowie aus dem Folgenden hervorgeht, erhalten, indem man die Ausdrücke der algebraischen Functionen durch elliptische ϑ-Functionen bildet und diese Werthe in den Punkten vergleicht, in denen die elliptischen Integrale u dieselben Werthe haben. Man kann also auf zweifachem Wege, durch Benutzung jedes der beiden u, hierzu gelangen; die Resultate aber müssen identisch sein, da immer die Existenz eines elliptischen Integrals auch die eines zweiten bedingt.

Betrachten wir jetzt einen speciellen Fall der Gleichung 12), welchen wir ohne jede Schwierigkeit bis zu Ende führen können. Um die zusammengehörigen Classen specieller algebraischer Gleichungen zu finden, werden wir am Besten von den Auflösungen von $m_1 n_1 + m_2 n_2 =$ einer gegebenen Zahl ausgehen und danach m_{11}, m_{12}, m_{22} bestimmen. Hierüber will ich bei anderer Gelegenheit Mittheilung machen. Nehmen wir jetzt an, a_{11} und a_{12} haben ein rationales Verhältniss, so dass

$$m_{11} a_{11} + m_{12} a_{12} = 0;$$

dann können wir einmal setzen:

$$14a)\quad \begin{cases} u = u_1;\ a_{11} = m_{12} a,\ a_{12} = -m_{11} a,\ lgq = a \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 = m_{12}, \\ \qquad \text{ferner das andere Mal:} \\ u = m_{11} u_1 + m_{12} u_2 = v;\ lgq' = m_{11} a_{12} + m_{12} a_{22} \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 = m_{12}. \end{cases}$$

Wir erhalten also jetzt zwei ϑ-Functionen:

$$14b)\qquad \vartheta(u_1) = \Sigma q^{n^2 + 2nu_1};\quad \vartheta(u) = \Sigma q'^{n^2 + 2nv},$$

welche in m_{12} Punkten verschwinden. Es sei m_{12} gerad, m_{11} ungerad, so sind die Werthe der Integrale in den Verzweigungspunkten:

	(α')	(β')	(γ')	(α)	(β)	(γ)
$u_1 \equiv$	$\frac{\pi i}{2} + \frac{lgq}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{lgq}{2}$	$\frac{\pi i + lgq}{2}$	$\frac{lgq}{2}$.
$v \equiv$	$\frac{\pi i}{2} + \frac{lgq'}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{lgq'}{2}$	$\frac{\pi i + lgq'}{2}$	$\frac{lgq'}{2}$

Ist $m_{12} = 2$, so kennen wir also alle Punkte, in denen die Functionen

$$\vartheta(u_1),\ \vartheta(v);\quad \vartheta\left(u_1 + \frac{\pi i}{2}\right),\ \vartheta\left(v + \frac{\pi i}{2}\right);\quad \vartheta\left(u_1 + \frac{lgq}{2}\right),\ \vartheta\left(v + \frac{lgq'}{2}\right)$$

verschwinden. Es ergeben sich so folgende Ausdrücke algebraischer Functionen durch die elliptischen ϑ-Functionen:

$$15)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{z-\alpha'.z-\beta}{z-\alpha.z-\gamma}} = A\dfrac{\vartheta(u_1)}{\vartheta\left(u_1 + \frac{\pi i}{2}\right)} = A'\dfrac{\vartheta(v)}{\vartheta\left(v + \frac{\pi i}{2}\right)}, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{z-\beta'.z-\gamma'}{z-\alpha.z-\gamma}} = B\dfrac{\vartheta\left(u_1 + \frac{lgq}{2}\right)e^{u_1}}{\vartheta\left(u_1 + \frac{\pi i}{2}\right)} = B'\dfrac{\vartheta\left(v + \frac{lgq'}{2}\right)e^{v}}{\vartheta\left(v + \frac{\pi i}{2}\right)}. \end{cases}$$

Ausserdem kann man die Quotienten

$$\frac{\vartheta\left(u_1+\frac{\pi i}{2}+\frac{lgq}{2}\right)e^{u_1}}{\vartheta\left(u_1+\frac{\pi i}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta\left(v+\frac{\pi i}{2}+\frac{lgq'}{2}\right)e^{v}}{\vartheta\left(v+\frac{\pi i}{2}\right)}$$

betrachten. Die Richtigkeit der Gleichungen 15) bestätigt sich durch Vergleichung der Factoren 1, welche die Quadratwurzeln einerseits und die ϑ-Functionen andererseits an den Querschnitten erlangen. Die Charakteristiken der beiden Wurzeln 15) sind resp. $\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}$.

Dies ergeben auch die ϑ-Ausdrücke, wenn man die Periodicitätsmoduln der u_1 und v berücksichtigt; dieselben sind nämlich:

	(a_1)	(a_2)	(b_1)	(b_2)
u_1	πi	0	$m_{12}lgq$	$-m_{11}lgq$
v	$m_{11}\pi i$	$m_{12}\pi i$	0	lgq'.

Die Charakteristik der beiden zuletzt erwähnten Quotienten ergiebt sich danach gleich $\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}$, d. h. gleich der Charakteristik von $\sqrt{(z-\alpha)(z-\gamma)}$. Danach müssen die algebraischen Ausdrücke dieser Quotienten resp. von der Form sein:

$$C\frac{z-k}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\gamma)}} \quad \text{und} \quad C'\frac{z-k'}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\gamma)}}.$$

Die Bedingungen zwischen den Verzweigungswerthen sind durch eine der beiden Gleichungen ausgedrückt:

$$16)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\beta'-\alpha).(\beta'-\beta)}{(\beta'-\alpha).(\beta'-\gamma)}=\dfrac{(\gamma'-\alpha').(\gamma'-\beta)}{(\gamma'-\alpha)\;.(\gamma'-\gamma)}, \\ \text{oder:} \\ \dfrac{(\alpha'-\beta).(\alpha'-\gamma')}{(\alpha'-\alpha).(\alpha'-\gamma)}=\dfrac{(\beta-\beta').(\beta-\gamma')}{(\beta-\alpha)\;.\;(\beta-\gamma)}. \end{array}\right.$$

Dies ist dasselbe Gleichungssystem, zu dem uns, wie leicht ersichtlich, schon das erste Beispiel führen musste. Die 6 Punkte $\alpha', \beta' \ldots \alpha$ bilden danach eine Involution und zwar waren früher α, α'; β, β'; γ, γ' resp. conjugirt; jetzt sind es α, γ; β', γ'; α', β.

Die Grössen k, k' sind jetzt die Wurzeln von einer der Gleichungen:

$$\frac{(\alpha'-k)^2}{(\alpha'-\alpha).(\alpha'-\gamma)}=\frac{(\beta-k)^2}{(\beta-\alpha)\;.\;(\beta-\gamma)},$$

oder:

$$\frac{(\beta'-k)^2}{(\beta'-\alpha).(\beta'-\gamma)}=\frac{(\gamma'-k)^2}{(\gamma'-\alpha).(\gamma'-\gamma)}.$$

Die vorigen Gleichungen wären erfüllt, z. B. wenn $\alpha'=-\beta$, $\beta'=-\gamma'$, $\alpha=-\gamma$ und dies würde der Querschnittslage von Taf. IV, Fig. 2 entsprechen. Ebenso könnte $\beta'=0$, $\gamma'=\infty$, $\alpha'\beta=\alpha\gamma$ sein. Wir wollen jetzt die conjugirten Werthe durch dieselben Buchstaben bezeichnen; es ist leicht zu

sehen, dass man durch Transformationen erster Ordnung eine algebraische Gleichung, wie

$$17)\qquad s^2 = (z-\alpha)(z-\alpha')(z-\beta)(z-\beta')(z-\gamma)(z-\gamma'),$$

in welcher $\alpha \dots \gamma'$ eine Involution bilden, auf die Form bringen kann:

$$s^2 = (x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2).$$

Setzen wir nämlich $x = \frac{A+Bz}{C+Dz}$, so lassen sich folgende 6 Gleichungen vereinigen:

$$a = \frac{A+B\alpha}{C+D\alpha}, \quad -a = \frac{A+B\alpha'}{C+D\alpha'},$$
$$b = \frac{A+B\beta}{C+D\beta}, \quad -b = \frac{A+B\beta'}{C+D\beta'},$$
$$c = \frac{A+B\gamma}{C+D\gamma}, \quad -c = \frac{A+B\gamma'}{C+D\gamma'},$$

sobald zwischen $\alpha, \alpha' \dots \gamma'$ die Gleichung besteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\alpha' & \alpha\alpha' \\ 1 & \beta+\beta' & \beta\beta' \\ 1 & \gamma+\gamma' & \gamma\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

und diese ist die Bedingung der Involution und mit 16) identisch, wenn die conjugirten Werthe mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind. Dann kann man $x^2 = \zeta$ setzen und so die Gleichung 17) auf eine Form bringen, in welcher $p=1$ ist.

In dem Falle der Involution ist auch das schon bekannte Beispiel enthalten, dass der Ausdruck vom 6. Grade unter dem Radical reciprok ist. Ist nämlich $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$, $\beta' = \frac{1}{\beta}$, $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$, so bilden die Punkte $\alpha \dots \gamma'$ eine Involution.

Besonderes Interesse erregen die noch specielleren Fälle, in denen die a_{11}, a_{12}, a_{22} ganze Vielfache derselben Grösse sind. Die hyperelliptischen ϑ-Functionen haben dann Exponenten mit zahlentheoretischer Bedeutung. Damit dies stattfindet, müssen zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten der algebraischen Gleichung bestehen, die man auf unendlich viele verschiedene Weisen entwickeln kann.

XVIII.

Ueber die Punkte des Dreiecks, deren Verbindungsstrecken vom Schwerpunkt gedrittelt werden.

Von

REUSCHLE,
Professor in Stuttgart.

(Hierzu Tafel IV, Figur 3 und 4.)

Die Urpaare solcher Punkte sind natürlich die Dreieckspitzen und die Mitten der Gegenseiten selbst. Dass man sie unter jenen ausgezeichneten Punkten in der Regel nicht mitzählt, hat darin seinen Grund, dass sie dem geometrischen Begriff des Dreieckschwerpunktes S selbst zu Grunde liegen, sofern man denselben als geometrischen Punkt mit dem Durchschnittspunkt der drei Geraden identificirt, welche die Dreieckspitzen mit den Seitenmitten verbinden. Sehen wir also davon ab, so besteht das altbekannte, längst in die geometrischen Schulbücher übergegangene Paar solcher Punkte aus dem Mittelpunkte K des dem Dreieck umschriebenen Kreises oder des „Umkreises" und aus dem Höhendurchschnitt H. Im Sommer 1864 theilte Harnischmacher im Grunert'schen Archiv ein zweites derartiges Punktepaar mit, bestehend aus dem Mittelpunkt O des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises oder des „Inkreises" und aus dem Durchschnittspunkt T der 3 Geraden, welche von den Dreieckspitzen nach den auf den Gegenseiten selbst liegenden Berührpunkten der äusseren Berührkreise oder der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, kurzweg der „Ankreise", gezogen werden. Ich habe aber nachgewiesen, dass dieses Punktepaar nicht neu ist, sondern mit noch 4 weiteren solchen Punktepaaren in den 1836 erschienenen „Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise" von Nagel sich findet, einer Schrift, welche überhaupt zu wenig bekannt geworden zu sein scheint. Deshalb erlaube ich mir, zwei zu einem Dreieck gehörige Punkte X, Y, welche mit dem Schwerpunkte S in Gerader liegen und zwar zu beiden Seiten desselben, so

dass $SY = 2.SX$, der Kürze wegen conjugirte Nagel'sche Punkte oder ein Nagel'sches Punktepaar zu nennen. Zu den 6 bisher bekannten specifischen Punktepaaren habe ich seitdem 4 neue hinzugefügt, von welchen in §. 3, sowie von den älteren in §. 2 gehandelt werden soll, nachdem ich erst das allgemeine Wesen conjugirter Nagel'scher Punkte auseinandergesetzt haben werde, zu dessen Wahrnehmung eine briefliche Mittheilung von Kommerell über einen speciellen Fall Anlass gegeben hat, den ich nachher anzuführen nicht ermangeln werde.

§. 1.
Das allgemeine Wesen der Nagel'schen Punktepaare.

Betrachtet man das Dreieck der Seitenmitten oder das dem Urdreieck ABC einbeschriebene Dreieck mit parallelen Seiten, welches ich kurzweg sein Mittendreieck $\mathfrak{abc}$ nennen will, so ist S der gemeinsame Schwerpunkt und zugleich der Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Dreiecke, welche die invers ähnliche Lage haben. Es gehen also die Verbindungsstrecken jeder 2 homologen Punkte P, $\mathfrak{p}$ dieser beiden Dreiecke durch den Schwerpunkt S und werden hier im gleichen Verhältniss getheilt, wie die Verbindungsstrecke $A\mathfrak{a}$ zweier homologen Spitzen, d. h. wie die Schwerlinie $A\mathfrak{a}$ des Urdreiecks, also im Verhältniss 2 : 1; auch liegen P und $\mathfrak{p}$ auf verschiedenen Seiten von S wegen der inversen Lage der Dreiecke, sind mithin conjugirte Nagel'sche Punkte. Ganz ebenso verhält es sich mit 2 homologen Punkten P, $\mathfrak{P}$ des Urdreiecks und desjenigen Dreiecks, dessen Mittendreieck das Urdreiek ist, oder des ihm umbeschriebenen Dreiecks mit parallelen Seiten, welches ich kurzweg sein „Aussendreieck" $\mathfrak{ABC}$ nennen will. Man hat also den Satz, welcher als Fundamentalsatz dieser Theorie zu betrachten ist:

> Jede zwei homologe Punkte P, $\mathfrak{p}$ eines Dreiecks und seines Mittendreiecks, sowie je zwei homologe Punkte P, $\mathfrak{P}$ desselben Dreiecks und seines Aussendreiecks sind conjugirte Nagel'sche Punkte;

und zwar ist $\mathfrak{p}$ halb so weit, $\mathfrak{P}$ aber doppelt so weit von S entfernt als P.

Die Converse dieses Satzes, welche alsbald indirect erhellt, lautet so:

> Construirt man zu irgend einem Dreieckpunkt X den halb so weit vom Schwerpunkt entfernten conjugirten Punkt Y, so sind X, Y homologe Punkte des Urdreiecks und seines Mittendreiecks; nimmt man aber den doppelt so weit von S entfernten Punkt Z, so sind X, Z homologe Punkte des Urdreiecks und seines Aussendreiecks.

Von diesem Fundamentalsatz und seiner Converse, soweit dieselben das Mittendreieck betreffen, sind die einzigen allgemeinen Sätze über die Nagel'schen Punkte, welche bisher aufgestellt worden sind (man vergl.

z. B. Jacobi bei Van-Swinden), einfache Corollare, nämlich folgender Satz mit seiner Converse: „Wenn man denjenigen von zwei conjugirten Punkten, welcher doppelt so weit vom Schwerpunkte entfernt ist, als der andere, mit den Dreieckspitzen, den andern mit den Seitenmitten verbindet, so sind diese Verbindungsstrecken einander parallel und ist das Scheitelstück der ersteren doppelt so gross als die andere." — (Ein besonderer Fall hiervon ist z. B. der Satz, dass die Mittellothe die Hälften von den Scheitelstücken der Höhenlothe sind.) — Und umgekehrt: „Wenn man einen beliebigen Dreieckpunkt mit den Dreieckspitzen oder mit den Seitenmitten verbindet und mit den Verbindungslinien Parallelen zieht, im ersten Fall durch die Seitenmitten, im andern durch die Dreieckspitzen, so erhält man den conjugirten Punkt, welcher im ersten Falle halb so weit, im andern doppelt so weit vom Schwerpunkt entfernt ist." Man sieht nämlich sogleich, dass jene Verbindungsstrecken nichts anderes sind, als homologe Strecken im Urdreieck und im Mittendreieck.

Es erhellt ferner sogleich, dass, wenn X, Y zwei conjugirte Nagel'sche Punkte sind, die Mitte M oder der Halbirungspunkt ihrer Verbindungsstrecke XY mit dem näheren (X) der beiden Punkte wiederum ein solches Paar bildet, in welchem M der dem Schwerpunkt nähere Punkt ist; ebenso dass derjenige Punkt, welcher die über X hinaus um sich selbst verlängerte Strecke XY begrenzt, kurzweg der „Verdoppelungspunkt" N mit dem entfernteren (Y) der beiden ursprünglichen Punkte ebenfalls ein Nagel'sches Punktepaar bildet, in welchem N der von S entferntere Punkt ist. Man kann daher in Verbindung mit der Converse des Fundamentalsatzes das Corollar hinzufügen:

> Sind X und Y zwei conjugirte Nagel'sche Punkte (X der nähere) eines Dreiecks ABC, so ist der Halbirungspunkt M von XY identisch mit dem zu X homologen Punkte $\mathfrak{x}$ des Mittendreiecks $\mathfrak{abc}$, zugleich X identisch mit $\mathfrak{y}$; der Verdoppelungspunkt von XY (über X hinaus) aber identisch mit dem zu Y homologen Punkt $\mathfrak{Y}$ des Aussendreiecks $\mathfrak{ABC}$, zugleich Y mit $\mathfrak{X}$.[1])

Man sieht hieraus, dass die 4 Punkte N, X, M, Y gleichartige Punkte sind, nämlich in verschiedenen Dreiecken. Dies soll nun noch auf seinen allgemeinsten Ausdruck gebracht werden. Auf der einen Seite ist klar, dass man mit Bildung von Halbirungs- und Verdoppelungspunkten in derselben Weise wie oben fortfahren und so auf jeder durch den Schwerpunkt gehenden Geraden eine unendliche Menge conjugirter Punkte bilden kann, deren Entfernungen, nach aussen fortschreitend, eine geometrische Progression mit dem Quotienten 2, nach innen fortschreitend, eine solche mit dem

1) Der erste dieser beiden Sätze ist die Verallgemeinerung der mir von Kommerell für einen speciellen Fall (§ 2, III) mitgetheilten Bemerkung.

Quotienten $\frac{1}{2}$ bilden. Auf der andern Seite kann man mit den Mittendreiecken und Aussendreiecken fortfahren und so eine unendliche Reihe von Dreiecken bilden, die einwärts nach dem Punkt S convergiren, welcher der Aehnlichkeitspunkt und gemeinsame Schwerpunkt aller dieser Dreiecke ist. Jene unendliche Reihe Nagel'scher Punkte besteht daher in nichts anderem, als in homologen Punkten der unendlichen Dreieckreihe. Und giebt man sämmtlichen Punkten eines dieser Dreiecke den Index n, also dem nächstvorhergehenden den Index $n-1$ u. s. w., dem nächstfolgenden den Index $n+1$ u. s. w., so stellt sich die Homogenität der Punkte N, X, M, Y durch folgende Gleichungen aufs evidenteste dar, indem man sich nämlich zur Bezeichnung der Identität zweier Punkte des Gleichheitszeichens bedient:

$$\begin{array}{r|r|r|r} X_n = M_{n+1} & M_n = Y_{n-2} & Y_n = N_{n-1} & N_n = X_{n+2} \\ = Y_{n-1} & = N_{n-3} & = X_{n+1} & = M_{n+3} \\ = N_{n-2} & = X_{n-1} & = M_{n+2} & = Y_{n+1}. \end{array}$$

Alsdann lässt sich der Fundamentalsatz und seine Converse im höchsten Grade von Allgemeinheit so aussprechen:

> Wenn man von einem Dreieck sein Mittendreieck, von diesem wieder das Mittendreieck u. s. w. bildet, desgleichen das Aussendreieck, von diesem wieder das Aussendreieck u. s. w.: so sind je zwei homologe Punkte zweier Nachbardreiecke der unendlichen Dreieckreihe conjugirte Nagel'sche Punkte. Und umgekehrt: jedes Nagel'sche Punktepaar eines Dreiecks ist ein Paar homologer Punkte in zwei Nachbardreiecken derselben Reihe. Ja man kann letzteres als Definition des Nagel'schen Punktepaares betrachten.

Vergleicht man aber homologe Punkte in nicht benachbarten Dreiecken unserer Dreieckreihe, $A_n\,B_n\,C_n$ und $A_m\,B_m\,C_m$, so ist das Verhältniss ihrer Entfernungen vom Schwerpunkt $2^{n-m} : 1$ und sie liegen auf einerlei oder entgegengesetzter Seite von S, je nachdem die Differenz $n-m$ gerade oder ungerade ist, je nachdem also die Lage der Dreiecke die directähnliche oder die inverse, zugleich S äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt ist.

Damit nun ein Nagel'sches Punktepaar der allgemeinen Theorie ein specifisches für das Urdreieck oder Gegenstand einer besonderen Betrachtung sei, muss zu der Bedeutung, welche dem conjugirten Punkt zufolge des Fundamentalsatzes zukommt, noch eine besondere Bedeutung für das Urdreieck selbst hinzukommen, oder es müssen beide Punkte specifische Punkte dieses Dreiecks sein. Gehen wir z. B. von der Umkreismitte K eines Dreiecks aus, so hat sein conjugirter, doppelt so weit von S entfernter Punkt H zunächst nach dem allgemeinen Satz die Bedeutung, die Umkreismitte des Aussendreiecks zu sein, was eben, weil Folge eines allgemeinen Satzes, nichts Specifisches ist; zum specifischen Punkt wird aber H dadurch gestempelt, dass er sich zugleich als Höhendurchschnitt erweist.

Der mit K conjugirte, aber halb so weit von S entfernte Punkt M oder die Mitte von KH hat nach dem allgemeinen Satz zunächst die Bedeutung, die Umkreismitte des Mittendreiecks zu sein; dieser Umkreis des Mittendreiecks hat aber eine Fülle von weiteren Eigenschaften als Kreis der 9 Punkte, als Berührkreis sämmtlicher 4 Berührkreise des Urdreiecks u. s. w.; dadurch ist M als der Mittelpunkt dieses zu den wichtigsten Kreisen des Dreiecks gehörigen „Mittenkreises"[2]) ein specifischer Dreieckpunkt.

Endlich ist noch als eine secundäre allgemeine Eigenschaft Nagel-scher Punktepaare zu erwähnen, dass jede zwei verschiedene, d. h. auf verschiedenen Geraden, oder, wie man diese Verbindungslinien passend nennen kann, „Schwerpunktshebeln", liegende Punktepaare ein Trapez bilden, von dessen Basen die eine das Doppelte der andern ist, deren Diagonalen im Durchschnitt S sich dritteln und dessen Schenkel in deren Durchschnitt sich verdoppeln. Ein solches Trapez hat unter anderem die Eigenschaft, dass die Quadratendifferenz der Diagonalen der dreifachen Quadratendifferenz der Schenkel gleich ist.

§. 2.

Eigenschaften der bisher bekannten specifischen Nagel'schen Punktepaare.

Deren sind es, wenn man einfach zählt, wie schon bemerkt, 6; wenn man aber zugleich wägt, nur 4 selbstständige, ja eigentlich, wie sich zeigen wird, nur 3 Original- oder Hauptpaare (ausser meinem neuen Punktepaar §. 3, mit demselben 4 Hauptpaare).

I. Erstes Hauptpaar K und H. Jeder dieser beiden Punkte, sowie die Mitte M von KH haben mehrfache Bedeutungen oder Eigenschaften. Von den weiteren

Eigenschaften des Punktes K,

d. h. der Umkreismitte (zugleich Durchschnittspunkt der Mittellothe), bildet die Mehrzahl eine unter sich eng zusammenhängende Gruppe, die sich auf die Mittelpunkte der 4 Berührungskreise des Dreiecks und auf die Umkreismitten der 4 „Centralendreiecke" beziehen, wie Nagel die Dreiecke genannt hat, deren Spitzen je drei jener erstgenannten 4 Punkte sind. Es sei O der Mittelpunkt des Inkreises, O_a, O_b, O_c die Mittelpunkte der zu den Seiten a, b, c des Urdreiecks ABC resp. gehörigen Ankreise, K' die Umkreismitte des Centralendreiecks $O_a\,O_b\,O_c$, K'_a von $O\,O_b\,O_c$ u. s. w.; man nenne ferner die 4 Dreiecke, deren Spitzen je 3 von den 4 Punkten K', K'_a, K'_b, K'_c sind, „Cocentralendreiecke"[3]), nämlich $K'_a\,K'_b\,K'_c$ das Cocentralendreieck von $O_a\,O_b\,O_c$, $K'\,K'_a\,K'_b$ von $O\,O_a\,O_b$ u. s. w.; endlich

2) So soll dieser Kreis fortan der Kürze wegen heissen und der Buchstabe M speciell seinen Mittelpunkt bezeichnen.

3) Wie ich in meinem Artikel über den Beltramischen Satz, der eben auch zu den sofort zu nennenden Eigenschaften des Punktes K gehört, im Grunert'schen Archiv (Sommer 1865) gethan habe.

nenne man ein „Parallelogramm-Vieleck" ein solches convexes Vieleck von gerader Seitenzahl, in welchem je zwei Gegenseiten gleich und parallel, sowie je zwei Gegenwinkel gleich sind, und wo die Diagonalen solcher gleichen Winkel in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Polygons, sich schneiden, in welchem sodann überhaupt alle durch ihn gehenden und im Umfang des Polygons begrenzten Strecken halbirt werden, und insbesondere sage man „Rhombusvieleck", wenn alle Seiten gleich sind und die Gegenwinkel von den Hauptdiagonalen halbirt werden. Nach diesen Prämissen besteht die angekündigte Gruppe von Eigenschaften des Punktes K in folgenden Sätzen. Der Punkt K ist

1. der Mittelpunkt des gemeinschaftlichen Mittenkreises (dessen Halbmesser gleich dem Umkreisdurchmesser des Urdreiecks) der acht Dreiecke, d. h. der vier Centralen- und der vier Cocentralendreiecke;
2. der innere Aehnlichkeitspunkt der vier Paare sich entsprechender[4]) Centralen- und Cocentralendreiecke, die paarweise einander congruent und von invers ähnlicher Lage sind und überdies in der Reciprocität stehen, dass die Umkreismitte des einen der Höhendurchschnitt des anderen ist;
3. die gemeinschaftliche Mitte der vier Verbindungsstrecken je eines O und des entsprechenden K', was ein Nagel'scher Satz ist;
4. da man statt dessen auch sagen kann, Schwerpunkt je eines O und des entsprechenden K', so kann man beifügen: also auch Schwerpunkt (d. h. Mittelpunkt der Entfernungen, oder Punkt der mittleren Entfernungen) aller acht Punkte, sowie von je sechs Punkten, worunter drei O und die entsprechenden K', endlich von je vier Punkten, worunter zwei O und die entsprechenden K';
5. Mittel- und Schwerpunkt der sechs Parallelogramme, welche je zwei O und die entsprechenden K' zu Spitzen haben;
6. Mittel- und Schwerpunkt des Rhombussechsecks, dessen Spitzen die sechs Punkte O_a, K'_b, O_c, K'_a, O_b, K'_c sind;
7. Schwerpunkt (oder Entfernungscentrum) der vier Punkte O, O_a, O_b, O_c, was der Beltrami'sche Satz ist;
8. Schwerpunkt (im gleichen Sinn) der vier Punkte K', K'_a, K'_b, K'_c.

Es wäre zu weitläufig, alles das ausführlich und detaillirt zu beweisen; vieles wird unmittelbar aus der beigegebenen Figur (3) erhellen, so namentlich die zwei ersten Sätze, soweit sie den Punkt K selbst betreffen. Der

4) Diese haben an den ihre Spitzen bezeichnenden Buchstaben die gleichen Indices.

dritte beweist sich sehr einfach aus der bekannten Beziehung zwischen dem Urdreieck und den Centralendreiecken, wonach jenes das Dreieck der Höhenfusspunkte in jedem von diesen ist (nicht nur im „grossen" Centralendreieck $O_a O_b O_c$). Sind daher H', H'_a, H'_b, H'_c die Höhendurchschnitte in den vier Centralendreiecken, so sind diese resp. identisch mit den Punkten O, O_a, O_b, O_c, ferner ist vermöge Nr. 1 selbst K identisch mit M', M'_a, M'_b, M'_c, sofern die letzteren die Mittelpunkte der Mittenkreise für dieselben vier Dreiecke bezeichnen. Aber $\overline{H'M'K'}$, sowie $\overline{H'_a M'_a K'_a}$ u. s. w. sind gerade Linien, deren Mitten M', M'_a u. s. w., also auch $\overline{OKK'}$, $\overline{O_a K K'_a}$ u.s.w. Von diesem Nagel'schen Satz ist alsdann Nr. 4 eine unmittelbare Folgerung und hiervon wieder Nr. 5 und 6, sofern in jedem Polygon mit einem Mittelpunkt (in dem oben hervorgehobenen Sinn), also nicht nur in den erwähnten Parallelogrammen (wie $O_a O_b K'_a K'_b$, $OO_c K' K'_c$ u. s. w.), sondern auch in dem Rhombussechseck, der Schwerpunkt der Polygonfläche sowie der Schwerpunkt der Polygonspitzen mit dem Mittelpunkt der Figur zusammenfallen[5]). Es handelt sich daher nur noch darum, dass jene Vierecke Parallelogramme und dass das Sechseck $O_a K'_b O_c K'_a O_b K'_c$ ein Rhombussechseck sei, was aber wieder der Figur überlassen bleiben kann. Dagegen mag noch die weitere Eigenschaft dieses merkwürdigen Sechsecks erwähnt werden, dass seine sechs Seiten (resp. deren Verlängerungen) die sechs Verlängerungen der Seiten des Urdreiecks in den Berührpunkten der Ankreise treffen.

Was endlich die beiden letzten Sätze betrifft, so ist vermöge Nr. 4 jeder von beiden die unmittelbare Folge des andern. In meinem oben erwähnten kleinen Artikel im Grunert'schen Archiv habe ich den Beltrami'schen Satz auf obigen Nr. 3 gegründet, aber mittelst statischer Betrachtungen. Folgendes ist nun ein rein geometrischer Beweis mit zum Theil gleichen Prämissen. Der Schwerpunkt (d. h. Entfernungsmittelpunkt, *centre des moyennes distances*) der 4 Punkte O, O_a, O_b, O_c ist bekanntlich der Durchschnittspunkt der drei Geraden, welche die Seitenmitten eines jeden der drei Paare coordinirter Seiten des vollständigen Vierecks $O O_a O_b O_c$ verbinden. Jedes solche Paar aber besteht aus einer äusseren (wie $O_a O_b$) und einer inneren Centrale (wie OO_c), jene ist zugleich die Seite, diese das Scheitelstück der zugehörigen Höhe in dem Centralendreieck $O_a O_b O_c$. Aber die Mitten dieser beiden Linien sind bekanntlich diametrale Punkte des Mittenkreises (oder des Kreises der neun Punkte) und der Mittenkreis jedes Centralendreiecks ist der Umkreis des Urdreiecks. Also ist K identisch mit jenem Durchschnittspunkt oder mit dem (geometrischen) Schwerpunkt der Punkte O, O_a, O_b, O_c. Man kann übrigens diesen Beweis buchstäblich auf die vier

5) Unter den mittelpunktlosen Figuren hat bekanntlich nur das Dreieck (und im Raum ebenso das Tetraeder) die Eigenschaft, dass beide Schwerpunkte, derjenige der Figur und derjenige der Eckpunkte, zusammenfallen.

Punkte K', K'_a, K'_b, K'_c übertragen, da der Umkreis K auch der Mittenkreis des Cocentralendreiecks $K'_aK'_bK'_c$ ist (vermöge Nr. 1), wodurch die Verwandtschaft meines Satzes über die vier Punkte K', K'_a, K'_b, K'_c mit dem Beltrami'schen über die vier Punkte O, O_a, O_b, O_c erst ins rechte Licht tritt, zugleich aber auch die Vollkommenheit dieses Beweises[6]).

Zwei andere Eigenschaften des Punktes K gehören in wesentlich andere Gebiete, worauf ich in einem anderen Zusammenhang zurückkommen werde, weshalb ich sie hier blos erwähne.

9. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige Dreiecke nach aussen, und um dieselben Kreise, so bilden deren Mittelpunkte bekanntlich ein gleichseitiges Dreieck; ein zweites gleichseitiges Dreieck entsteht auf dieselbe Weise, wenn die gleichseitigen Dreiecke über den Seiten des Urdreiecks nach innen beschrieben werden. Diese beiden gleichseitigen Dreiecke haben eine perspectivische Lage und ihr perspectivisches Centrum ist der Punkt K.

10. Bekanntlich giebt es für ein Dreieck zwei Systeme von je drei in Einem Punkt sich schneidenden Kreisen[7]), wovon jeder eine Dreieckseite zur Sehne und eine der Nachbarseiten zur Tangente hat. Der Punkt K ist der Mittelpunkt des Kreises, in Beziehung auf welchen je ein Mittelpunkt des einen Systems und derjenige des anderen, welcher die nämliche Dreieckseite zur Sehne hat, reciproke Punkte sind (in dem bekannten Sinn nämlich, dass die Rechtecke ihrer Entfernungen von K gleich dem Quadrat des Umkreishalbmessers sind).

Eigenschaften des Punktes M, d. h. des Mittelpunktes des Mittenkreises (Mitte von KH).

Da in dieser Grundeigenschaft schon enthalten ist, dass M die Umkreismitte zweier anderen Dreiecke ist, nämlich nicht nur des Mittendreiecks (§. 1), sondern auch des Dreiecks der Höhenfusspunkte, so bleibt nur noch eine Eigenschaft zu erwähnen, die dem Punkt M in der Theorie der Kreise zukommt, welche die Berührkreise des Dreiecks berühren, der ich einen eigenen Artikel widmen werde. Hiernach ist der Punkt M

1. der Potenzpunkt der drei dem Mittenkreis conjugirten

---

6) Wenn er bei wesentlicher Verschiedenheit auch wesentliche Berührungspunkte mit dem von Carl Schmidt im 1. Heft des 44. Bandes von Grunert's Archiv mitgetheilten Beweis des Beltrami'schen Satzes darbietet, so verwahre ich mich ausdrücklich gegen jede Abhängigkeit von letzterem.

7) Diese sechs Kreise nenne ich der Kürze wegen „Beikreise" des Dreiecks, indem ich im Geist der kurzen Benennungen: Umkreis, Inkreis, Ankreis fortfahre.



Kreise, welche wie der letztere je zwei Ankreise von aussen und den Inkreis von innen berühren;

2. zugleich der Durchschnittspunkt der Lothe, welche von den Potenzpunkten P_a, P_b, P_c des Inkreises und je zweier Ankreise (vgl. unter III) auf die entsprechenden Seiten des Fusspunktdreiecks der inneren Medianen (Halbirlinien der inneren Dreieckswinkel) gefällt werden.

Der enge Zusammenhang von Nr. 2 mit Nr. 1 erhellt sogleich, sofern die Verbindungslinien jener Medianenfusspunkte nichts anderes sind, als die inneren Aehnlichkeitslinien (-Axen, -Strahlen) des Inkreises und je zweier Ankreise.

Eigenschaften des Punktes H,
d. h. des Höhendurchschnitts.

Diese sind um so zahlreicher und die zwei letzten darunter, soviel ich weiss, neu, übrigens nahe gelegen; der Punkt H ist nämlich:

1. äusserer Aehnlichkeitspunkt von Umkreis und Mittenkreis;

2. Mittelpunkt des Inkreises vom Dreieck der Höhenfusspunkte, was die schon oben benutzte Eigenschaft ist;

3. Mittelpunkt des Polkreises, d. h. des Kreises, in Beziehung auf welchen die Dreieckspitzen die Pole der Dreieckseiten und diese (wie natürlich) die Polaren der Dreieckspitzen sind;

4. Potenzpunkt der drei um die Dreieckseiten beschriebenen Kreise;

5. desgleichen der drei um die Dreieckhöhen beschriebenen Kreise.

Die zwei ersten sind ganz bekannte Sätze; der dritte ist von Grunert (Archiv, Theil 41) ausführlich aus den allgemeinen Gleichungen der Polaren bewiesen worden, nebst Herleitung des Halbmessers $\mathfrak{r}$ des Polkreises

$$\mathfrak{r}^2 = \pm 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

wo α, β, γ die Dreieckswinkel, R der Umkreishalbmesser und + oder — zu nehmen, je nachdem das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig ist. Beides aber lässt sich höchst einfach aus den Grundbegriffen von Pol und Polare und von reciproken Punkten herleiten. Denn da die Polare rechtwinklig zur Verbindungslinie des Pols und des Kreismittelpunktes ist, so liegt letzterer auf jeder Höhe des Dreiecks, ist also der Höhendurchschnitt. Alsdann ist nach der Grundrelation reciproker Punkte[8]) der Halbmesser des Polkreises die mittlere Proportionale zwischen Scheitelstück und Fussstück der Höhe, also, da jenes dem Doppelten des zur selbi-

---

8) Dabei ist noch zu bemerken, dass im spitzwinkligen Dreieck die reciproken Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, im stumpfwinkligen aber, wo H ausserhalb liegt, auf einerlei Seite zu nehmen sind, während sie im rechtwinkligen, wo $\mathfrak{r} = o$, zusammenfallen.

gen Seite gehörigen Mittelloths gleich ist, indem h_a und p_a Höhe und Mittelloth der Seite a,

$$r^2 = 2p_a (h_a \mp 2p_a), \text{ und } p_a = \pm R \cos\alpha,$$

je nachdem α spitz oder stumpf, also, da $h_a = 2R \sin\beta \sin\gamma$,

$$r^2 = \pm 4R^2 \cos\alpha [\sin\beta \sin\gamma + \cos(\beta+\gamma)] = \pm 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Zugleich hat man den Satz, dass das Rechteck aus Scheitelstück und Fussstück jeder Höhe constant ist. Hieraus folgt sodann für Nr. 5, dass die in jedem der drei Kreise durch H senkrecht zu den Durchmessern (d. h. Höhen) gezogenen Sehnen gleich sind, die Gleichheit dieser Sehnen charakterisirt aber den Punkt H als innerhalb der Kreise liegenden Potenzpunkt. Für Nr. 4 endlich hat man blos die Bemerkung nöthig, dass je zwei dieser Kreise das eine Mal in einer Dreieckspitze, das andere Mal im Fusspunkt der zugehörigen Höhe sich schneiden, dass also die Dreieckhöhen die Gemeinsehnen in den drei Paaren von Kreisen sind.

II. Zweites Hauptpaar O und T. Diese beiden Punkte sind schon im Eingang definirt worden und von T ist ausser dieser seiner Grundbedeutung und der dem allgemeinen Satz (§. 1) entsprechenden, wonach T Inkreismitte des Aussendreiecks ist (was eben keine „specifische" Bedeutung ist), keine sonstige Eigenschaft bekannt. Wohl aber findet diess bei O und bei der Mitte P von OT statt.

Eigenschaften des Punktes O,
d. h. der Inkreismitte (zugleich Durchschnitt der innern Medianen).

Der Punkt O ist ausserdem:

1. Höhendurchschnitt im grossen Centralendreieck $O_a O_b O_c$, was der bekannte, oben gebrauchte Satz ist;

2. Potenzpunkt der drei Kreise, welche den Inkreis und resp. je zwei Ankreise rechtwinklig durchschneiden (deren Mittelpunkte die schon erwähnten Potenzpunkte P_a, P_b, P_c sind, vgl. III); denn da der Inkreis zu jedem der drei Systeme von Kreisen gehört, so schneidet er seinerseits die drei erwähnten Kreise rechtwinklig;

3. Potenzpunkt der drei Kreise, welche ihre Mittelpunkte in den Dreieckspitzen haben und sich gegenseitig berühren[9]). — Denn ihre Berührpunkte liegen nothwendig auf den Dreieckseiten, und da sie überdiess auf je zwei an einer Spitze zusammenstossenden Seiten gleichweit von der Spitze entfernt liegen, so sind sie identisch mit den Punkten, in welchen der Inkreis die Seiten berührt, also schneiden sich ihre paarweisen Gemeintangenten im Punkt O, der somit ihr Potenzpunkt ist. Ist s der halbe Umfang des Dreiecks, so sind ihre Halbmesser $s-a$, $s-b$, $s-c$, und sie entsprechen den Ankreisen in der Art, dass das Rechteck aus dem Halbmesser eines derselben und aus dem Halbmesser

9) Diese Kreise habe ich der Kürze wegen die „Zukreise" des Dreiecks genannt.

des zum nämlichen Dreieckswinkel gehörigen Ankreises constant ist, gleich dem Inhalt des Dreiecks, was aus der bekannten Relation

$$(s-a)\,r_a = (s-b)\,r_b = (s-c)\,r_c = sr = \varDelta$$

folgt.

Eigenschaften des Punktes P, Mitte von OT.

Der Punkt P ist, ausserdem dass er die Inkreismitte des Mittendreiecks ist, zugleich Durchschnittspunkt der mit den inneren Medianen durch die Seitenmitten parallel gezogenen Geraden, was noch keine specifischen Eigenschaften sind (§. 1):

1. Schwerpunkt des Dreieckumfangs, was bekanntlich mit jener Eigenschaft eng zusammenhängt[10]);

2. Potenzpunkt der drei Ankreise und damit zugleich

3. Durchschnitts- und Potenzpunkt der drei die Ankreise ungleichartig („durchschlingend") berührenden Kreise, deren conjugirte die Dreieckseiten sind;

4. Innerer Aehnlichkeitspunkt des Mittenkreises und des ihm conjugirten „Aussenkreises" welcher die Ankreise „umschliessend" berührt;

5. Durchschnittspunkt der von den Mitten der Geraden, welche die Dreieckspitzen mit den Mittelpunkten der zugehörigen Ankreise verbinden, auf die Dreieckseiten gefällten Lothe.

Der zweite dieser Sätze ist ein Satz von Kommerell und beweist sich durch die Bemerkung, dass die Potenzlinie zweier ausserhalb einander liegender Kreise (wie je zwei Ankreise) das von der Mitte ihrer gemeinschaftlichen Tangente auf die Centrale gefällte Loth ist. Bei zwei Ankreisen ist aber jene Mitte die Mitte einer Dreieckseite und dieses Loth einer inneren Mediane parallel, also ist der Potenzpunkt der drei Ankreise der Durchschnittspunkt der drei mit den inneren Medianen durch die Seitenmitten parallel gezogenen Geraden, d. h. der Punkt P. Die übrigen sind Consequenzen von Nr. 2 vermöge der Theorie der conjugirten Berührkreise von drei gegebenen, worauf ich in einem besonderen Artikel zurückkomme.

III. Die drei Nebenpaare des Hauptpaars O, T. Bekanntlich steht fast jedem Satz über den Inkreis ein analoger über jeden der drei Ankreise, sowie jedem Satz über die drei Ankreise ein analoger über jedes der drei Systeme von Kreisen zur Seite, welche aus dem Inkreis und je zwei Ankreisen bestehen. So stehen hier dem Nagel'schen Punktepaar O, T die drei Punktepaare O_a, T_a; O_b, T_b; O_c, T_c zur Seite, wo O_a, O_b, O_c wie bisher die Mittelpunkte der Ankreise, T_a, T_b, T_c aber ebenfalls wie T Durchschnittspunkte je dreier nach den Berührpunkten der Dreieckseiten

10) Woraus dann nach §. 1 folgt, dass O Umfangsschwerpunkt für das Aussendreieck ist.

gehender Scheiteltransversalen sind, und zwar z. B. T_a Durchschnittspunkt der von A nach dem inneren Berührpunkt (Berührpunkt des Inkreises) der Gegenseite a gezogenen Transversale mit den beiden von B und C nach den auf den Verlängerungen der Gegenseiten b, c liegenden äusseren Berührpunkten (Berührpunkten der Ankreise O_b, O_c) gezogenen Transversalen. Der Ankreismittelpunkt ist jedesmals der dem Schwerpunkt nähere, der Transversalendurchschnitt der vor ihm doppelt so weit entfernte Punkt.

Alsdann sind ferner die Mitten der Strecken $O_a T_a$, $O_b T_b$, $O_c T_c$, d. h. die schon mehrerwähnten Punkte P_a, P_b, P_c, die Potenzpunkte des Inkreises und je zweier Ankreise, z. B. P_a Potenzpunkt der Kreise O, O_b, O_c. Zugleich sind sie Durchschnittspunkte derjenigen drei Berührkreise von Inkreis und je zwei Ankreisen, deren conjugirte die Dreieckseiten sind, sowie die äusseren Aehnlichkeitspunkte des Mittenkreises und der ihm in der Berührung von Inkreis und je zwei Ankreisen conjugirten Kreise, endlich die Durchschnittspunkte der von den Mitten derjenigen drei Strecken auf die Dreieckseiten gefällten Lothe, wovon die ersten zwei Dreieckspitzen mit den Mittelpunkten der zugehörigen Ankreise, die dritte aber die dritte Spitze mit dem Mittelpunkt dés Inkreises verbindet. Ebenso ist auch, gleichwie O Potenzpunkt der drei Potenzkreise P_a, P_b, P_c ist, O_a der Potenzpunkt der drei Kreise, welche, aus P, P_b, P_c mit den betreffenden Potenzhalbmessern beschrieben, resp. die Kreise O_a, O_b, O_c; O, O_a, O_c; O, O_a, O_b rechtwinklig durchschneiden, weil nämlich der in jedem dieser drei Systeme vorkommende Kreis O_a auch seinerseits die Kreise P, P_b, P_c orthogonal durchschneidet; desgleichen natürlich O_b von P, P_a, P_c und O_c von P, P_a, P_b.

Aus dieser vollkommenen Analogie erhellt die logische Berechtigung, diese Punktepaare nicht als selbstständige oder fundamentale Paare zu betrachten; überdies dürften sie höchstens als eines gelten, da die zwei übrigen nur auf Permutation der Dreieckseiten beruhen.

IV. Drittes Hauptpaar Q, U. In diesem noch nicht definirten Paar ist Q der Punkt, in welchem sich die von den Mittelpunkten der Ankreise nach den Mitten der Dreieckseiten gezogenen Geraden schneiden, U ein Transversalendurchschnitt nach Art der T, nämlich der Scheiteltransversalen nach den inneren Berührpunkten der drei Seiten. Von diesen beiden Punkten sind weitere Eigenschaften nicht bekannt, so wenig als von der Mitte der Verbindungsstrecke QU, abgesehen nämlich von der aus §. 1 sich ergebenden Bedeutung[11]).

V. Der Schwerpunkt S selbst, d. h. zunächst der Durch-

11) Dies ist auch der Fall, wo Kommerell zur Anbahnung der allgemeinen Theorie eingegriffen hat, indem er die Frage nach der Bedeutung der Mitte von QU damit beantwortete, sie sei derjenige Punkt, welcher im Mittendreieck dieselbe Bedeutung habe, wie Q im Urdreieck, und dieser sei dann seinerseits das U des Mittendreiecks.

schnittspunkt der seitenhalbirenden Scheiteltransversalen, vereinigt hiermit folgende Bedeutungen. S ist

1. Aehnlichkeitspunkt des Dreiecks und seiner sämmtlichen Mitten- und Aussendreiecke;

2. Innerer Aehnlichkeitspunkt von Mittenkreis und Umkreis;

3. Schwerpunkt des Dreiecks, und zwar sowohl der Fläche, als der drei Eckpunkte (deren Entfernungscentrum);

4. Schwerpunkt der ganzen Dreieckreihe in Nr. 1, was in Verbindung mit Nr. 1 Grundlage der ganzen Theorie ist;

5. Schwerpunkt der beiden perspectivischen gleichseitigen Dreiecke, die schon bei den Eigenschaften von K vorgekommen sind.

§. 3.

Vier neue Nagel'sche Punktepaare.

Viertes Hauptpaar: Z, V mit drei Nebenpaaren.

Es sei Z der Berührpunkt von Mittenkreis und Inkreis, z dessen diametraler Punkt im Mittenkreis, die übrigen Punkte behalten ihre bisherigen Bedeutungen: so schneiden sich die drei Geraden ZS, Hz und KT auf der Peripherie des Umkreises in einem Punkt V, der dem Punkt Z conjugirt ist, so dass $SV = 2 . SZ$.

Einen Theil dieses Satzes hatte ich zuerst analytisch bewiesen, indem ich mittelst der Coordinatenwerthe zeigte, dass der conjugirte Punkt von Z, der von S doppelt so weit entfernt ist, auf der Peripherie des Umkreises liegt; allein es lassen sich die drei Behauptungen, aus denen der Satz besteht, wie folgt, höchst einfach und rein geometrisch mittelst der Theorie der Nagel'schen Punkte nachweisen (Tafel IV, Figur 4).

Es sei V zunächst der in der Verlängerung von KT über T hinaus liegende Punkt des Umkreises und R dessen Halbmesser, so ist $KV = R = Zz$; ferner sei VH und Vz gezogen. Da M, K und O, T Nagel'sche Punkte sind, so ist $MOTK$ ein Trapez, wo $MO // KT$, also auch $Zz // KV$, also $ZKVz$ ein Parallelogramm, wo $KZ \# Vz$. Da HK und Zz in M sich halbiren, so ist auch $HZKz$ ein Parallelogramm und $KZ \# Hz$, also auch $Vz \# Hz$, folglich HzV eine Gerade und $HV = 2 . KZ$. Somit ist $ZKVH$ ein Trapez, wo die eine Basis (HV) das Doppelte der anderen (KZ) ist, folglich dritteln sich dessen Diagonalen HK und ZV in ihrem Durchschnittspunkte; da aber HK bereits in S gedrittelt ist, so ist S der Diagonalendurchschnitt, mithin geht ZV durch S und ist $SV = 2 . SZ$.

Auch dieses vierte Hauptpaar (Z, V) hat drei Nebenpaare, die wie bei dem zweiten (O, T) dadurch entstehen, dass an die Stelle des Inkreises jeder der drei Ankreise tritt. Ist also z. B. Z_a der Berührpunkt des Mittenkreises und des Ankreises O_a, z_a dessen diametraler Punkt im Mittenkreis: so schneiden sich die drei Geraden $Z_a S$, $H z_a$ und $K T_a$

auf der Peripherie des Umkreises in einem Punkt V_a, welcher der conjungirte Punkt von Z_a ist, so dass $SV_a = 2 . SZ_a$. Gleicherweise sind Z_b, V_b und Z_c, V_c Nagel'sche Punktepaare und man kann obigen Beweis buchstäblich übertragen, wenn man den Buchstaben Z, z, V, T, O einen der Indices a, b, c giebt, während K, M und H unverändert bleiben.

Verlängert man SZ über Z hinaus zur zweiten Begegnung der Peripherie des Umkreises in Z', so ist dies der Punkt, in welchem der Umkreis von demjenigen Kreis (sein Mittelpunkt heisse M') innerlich berührt wird, welcher den Inkreis und Mittenkreis in deren Berührpunkt Z von aussen berührt. Denn S ist innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und K, Z innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und O und Z' äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise K und M', folglich ist $\overline{SZZ'}$ eine Gerade. Ausser diesem Kreis M' haben Umkreis, Mittenkreis und Inkreis noch einen zweiten Berührkreis M'', der die beiden letzteren innerlich in Z, den Umkreis ebenfalls von innen in einem Punkt Z'' berührt, der mit H und Z in Gerader liegt. Denn H ist äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und K, Z desgleichen für die Kreise M und O und Z'' desgleichen für die Kreise K und M'', also ist $\overline{HZZ''}$ eine Gerade. Von diesen beiden Kreisen, deren Mittelpunkte M', M'' mit Z, O, M in Gerader liegen, und zwar in der Folge $M'ZOMM''$ (Tafel IV, Figur 4), ist jeder sich selbst conjugirt, worauf ich in einem anderen Zusammenhang zurückkommen werde.

Der Berührpunkt Z gehört überhaupt unter die ausgezeichneten Punkte des Dreiecks, was sich besonders auch an seinen Entfernungen von den Seiten und Spitzen des Dreiecks, sowie von anderen ausgezeichneten Punkten zeigt. Ich werde zwar die Entfernungen der Nagel'schen Punkte und anderer in einem besonderen Artikel behandeln, der sich ebenso in Formeln bewegt, wie der vorliegende in rein geometrischen Anschauungen, kann mich jedoch nicht enthalten, sogleich hier einige Sätze mitzutheilen, die ich über die Entfernungen des Punktes Z gefunden habe, um diesen von mir unter die ausgezeichneten Punkte des Dreiecks eingeführten Punkt noch weiter zu charakterisiren. In jedem Dreieck liegt der Punkt Z so, dass

1. die Summe seiner Abstände von den Dreieckseiten zum Ueberschuss der Summe der drei Ankreishalbmesser über die Summe der drei Höhen sich verhält, wie der Inkreishalbmesser zum Ueberschuss des Umkreishalbmessers über den Inkreisdurchmesser, oder, was dasselbe ist, zur doppelten Entfernung der Punkte O und M;

2. die Quadratensumme seiner Abstände von den Dreieckspitzen das Quadrat seines Abstandes vom Schwerpunkt um drei Viertheile der Quadratensumme der Seiten, oder, was dasselbe ist, um die Quadratensumme der drei Schwerlinien (d. h. der Verbindungsstrecken der Spitzen und der Seitenmitten) übertrifft;

3. die Quadratensumme seiner Abstände von vier Punkten, nämlich von den Dreieckspitzen und dem Höhendurchschnitt, gleich ist dem Quadrat des Umkreisdurchmessers.

Im rechtwinkligen Dreieck insbesondere verhält sich

1. der Abstand des Punktes Z von der Hypotenuse zum Halbmesser des Inkreises, wie der Ueberschuss der Hypotenuse über die doppelte ihr zugehörige Höhe zum Ueberschuss der Hypotenuse über den doppelten Inkreisdurchmesser (oder zu $4.OM$);
2. das Quadrat seines Abstandes von der Spitze des rechten Winkels zum Quadrat des Inkreishalbmessers, wie die Hypotenuse zu ihrem Ueberschuss über den doppelten Inkreisdurchmesser; — so dass also diese beiden Proportionen einerlei viertes Glied haben ($4.OM$).

Im gleichschenkligen Dreieck liegt Z natürlich in der Mitte der Basis, Z'' in der Spitze, Z' diametral von Z'' und identisch mit V.

§. 4.

Besondere Lagen der Schwerpunktshebel oder der Verbindungslinien Nagel'scher Punkte.

Es wird hier nur von den fundamentalen Paaren die Rede sein, deren Punkte in Beziehung auf die Seiten oder Winkel des Dreiecks symmetrisch sind, während Punkte wie O_a, T_a, Z_a, V_a u. s. w. zu einzelnen Seiten oder Winkeln gehören.

Es ist klar, dass, wenn irgend eine solche Verbindungslinie zu einer Dreieckseite rechtwinklig ist, das Dreieck gleichschenklig ist, wobei die betreffende Seite die Basis ist, denn es fällt dann eine Schwerlinie mit einer Höhe zusammen. Im gleichschenkligen Dreieck sind alsdann sämmtliche Entfernungen der betreffenden Nagel'schen Punkte von einander rational darstellbar, weil sie sich auf Ordinatendifferenzen reduciren.

Ebenso ist klar, dass wenn irgend eine Verbindungslinie Nagel'scher Punkte einer Dreieckseite (die dann Hauptseite oder Basis heissen soll) parallel ist, von ihr alle Geraden gedrittelt werden, die nach der Hauptseite von deren Gegenspitze gezogen werden. Auch ist dann stets die der Dreieckseite parallele Entfernung der betreffenden Nagel'schen Punkte rational ausdrückbar, weil gleich der Differenz ihrer Abscissen auf der Dreieckseite. Verfolgt man dies aber bei den einzelnen Hebeln weiter, so ergeben sich merkwürdige Dreieckgattungen und Relationen.

I. Es sei $\overline{KSH}$ einer Dreieckseite parallel, welches nur diejenige sein kann, welche der Grösse nach zwischen den beiden anderen

steht[12]). Diese sei AB oder c, also γ jedenfalls spitz; alsdann ist $p_c = \frac{1}{3} h_c$, mithin, da $p_c = R \cos\gamma$ und $h_c = 2R \sin\alpha \sin\beta$,

$$\cos\gamma = \tfrac{2}{3} \sin\alpha \sin\beta = 2 \cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2} \cos(\alpha - \beta),$$

wodurch das Dreieck als wesentlich spitzwinklig bezeichnet ist; seine grösste Seite sei a, die kleinste b. Sind alsdann c_a, c_b die resp. den Seiten a und b anliegenden durch die Höhe h_c auf c gebildeten Abschnitte, also $c_a = a \cos\beta$, $c_b = b \cos\alpha$, so ist die Hebellänge

$$KH = \tfrac{1}{2} c - c_b = R \sin\gamma - 2R \sin\beta \cos\alpha = R \sin(\alpha - \beta),$$

welcher Werth von KH übrigens auch daraus erhellt, dass diesfalls das Dreieck KCH rechtwinklig und allgemein Winkel $KCH = \gamma - 2(90 - \alpha) = \alpha - \beta$ ist. Multiplicirt man die Winkelrelation $\cos\gamma = 2 \cos\alpha \cos\beta$ beiderseits mit R^2, so erhält man, vermöge der bekannten Werthe der Mittellothe $p_a = R \cos\alpha$ u. s. w.,

$$R p_c = 2 p_a p_b \text{ oder } \tfrac{1}{2} R : p_a = p_b : p_c,$$

und setzt man im Werth des Polkreishalbmessers, der im spitzwinkligen Dreieck nach Obigem

$$\mathfrak{r}^2 = 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

ist,

$$2 \cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma$$

ein, so erhält man

$$\mathfrak{r}^2 = 2R^2 \cos^2\gamma, \quad \text{mithin } \mathfrak{r} = p_c \sqrt{2}.$$

Multiplicirt man aber die Winkelrelation $\cos\gamma = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$ beiderseits mit $2 \sin\gamma = 2 \sin(\alpha + \beta)$, so erhält man

$$\sin 2\gamma = \tfrac{1}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta),$$

es ist also der Sinus vom Doppelten des mittleren Winkels das arithmetische Mittel der Sinusse von den Doppelten der zwei anderen Winkel, woraus, da 2α, 2β, 2γ die Winkel an K sind, welche die von K nach A, B, C gezogenen Radien mit einander bilden, also $\frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$, $\frac{1}{2} R^2 \sin 2\beta$, $\frac{1}{2} R^2 \sin 2\gamma$ die Inhalte der drei Dreiecke, in welche ABC durch jene Radien getheilt wird, noch folgt, dass von den drei Theildreiecken um den Punkt K das der Basis c angehörige das arithmetische Mittel der beiden andern ist.

Zwei merkwürdige Species dieser Dreiecksgattung sind

1. dasjenige, dessen kleinster Winkel $\beta = 45$ ist; in diesem ist $\tang\beta = 1$, $\tang\gamma = 2$, $\tang\alpha = 3$, und da aus letzterem Werth $\sin\alpha = 3 \cos\alpha$ folgt, so ist
   $\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha - \cos\alpha) \cos 45 = 2 \cos\alpha \cos 45 = \cos\gamma$,
   folglich
   $$HK = R \cos\gamma = p_c = \tfrac{1}{3} h_c.$$

---

12) Denn K liegt der grössten Seite am nächsten, der kleinsten am entferntesten, H gerade umgekehrt, oder am nächsten dem grössten Winkel, am entferntesten dem kleinsten.

2. Dasjenige, wo die Differenz des grössten und kleinsten Winkels $\alpha - \beta = 45$ ist; dann ist

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\gamma,$$

mithin

$$HK = 2R\cos\gamma = 2p_c = \tfrac{2}{3}h_c.$$

II. Es sei $\overline{OST}$ einer Dreieckseite parallel, z. B. $// AB$. Dann ist, wenn der Halbmesser des Inkreises, zugleich Abstand des Punktes O von der Seite AB, mit r bezeichnet wird,

$$r = \tfrac{1}{3}h_c$$

aber

$$r = 4R\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

und wie oben

$$h_c = 2R\sin\alpha\sin\beta = 8R\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta,$$

mithin die Winkelrelation

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{2}{3}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Multiplicirt man in

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta$$

beiderseits mit $4R\cos\frac{1}{2}\gamma$, so erhält man in Folge von

$$s - c = 4R\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

wo s der halbe Umfang, $c = 2(s - c)$, folglich $3c = 2s$ und $c = \frac{1}{2}(a + b)$, also ist die Basis oder diejenige Seite, welcher TO parallel ist, das arithmetische Mittel der beiden anderen Seiten, oder die Dreieckseiten stehen in arithmetischer Progression[13]).

Multiplicirt man aber in

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{2}{3}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

beiderseits mit $4R\sin\frac{1}{2}\gamma$, so ist vermöge der bekannten Formeln

$$r_c - r = 4R\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma, \quad r_c = 4R\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

wo r_c der Halbmesser des zur Mittelseite c gehörigen Ankreises ist,

$$r_c - r = \tfrac{2}{3}r_c,$$

mithin

$$r_c = 3r = h_c,$$

d. h. in unserem Dreieck ist die zur Mittelseite gehörige Höhe dem zur selbigen Seite gehörigen Ankreishalbmesser gleich. Durch die Winkelrelation wird alsdann der Werth von r

$$r = 2R\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = R(1 - \cos\gamma) = R - p_c,$$

also $p_c = R - r$, woraus, wegen $p_a + p_b + p_c = R + r$, folgt:

$$p_a + p_b = 2r, \text{ und } p_c - r = R - 2r.$$

---

13) Da diese Dreieckgattung eine Fülle von Eigenschaften darbietet, wovon hier nur die naheliegendsten und für das Thema unsers Artikels wichtigsten erwähnt werden, Eigenschaften, die dieses Dreieck den rechtwinkligen und gleichschenkligen ebenbürtig machen, so habe ich ihm auch einen eigenen Namen gegeben, nämlich mittelseitiges Dreieck.

Aber in dem Trapez Nagel'scher Punkte $KTMO$ ist $KT \parallel MO$ und $= 2MO = R - 2r$, folglich $KT = p_c - r$, mithin, da p_c und r die Abstände der Punkte K und T von der Mittelseite c sind, KT rechtwinklig zu derselben, sowie MO, auf welcher auch der Berührpunkt Z liegt. Es ist daher in dem rechtwinkligen Dreieck OTK, sofern $\overline{OK}^2 = R(R-2r)$ und $KT = R - 2r$ ist, $\overline{OT}^2 = R(R-2r) - (R-2r)^2 = 2r(R-2r)$. Da ferner die Punkte K und T einerlei Abscisse $\frac{1}{2}c$ auf AB haben, und da $s-a$ die Abscisse von O ist, so hat man, sofern wieder $a > b$ angenommen wird, da dann O näher an A liegt, als T,

$$TO = \tfrac{1}{2}c - (s-a) = a - c$$

weil $s = \frac{3}{2}c$ ist, oder, wenn man $a - c = c - b = d$ setzt,

$$TO = d = \sqrt{2r(R-2r)},$$

also ist in dem mittelseitigen Dreieck, wo $TO \parallel AB$, die Hebellänge TO gleich der constanten Seitendifferenz[14]), diese ist selbst die mittlere Proportionale zwischen dem Inkreisdurchmesser und dem Ueberschuss des Umkreishalbmessers über jenen, und es liegen die zwei Punkte K und T, sowie die drei Punkte M, O, Z in zur Mittelseite rechtwinkligen Geraden.

Soll das mittelseitige Dreieck rechtwinklig sein, so hat man, $a = c + d$, $b = c - d$ setzend,

$$(c+d)^2 = c^2 + (c-d)^2,$$

woraus

$$c = 4d, \text{ mithin } b = 3d, \; a = 5d,$$

das rechtwinklig mittelseitige Dreieck ist mithin das einfachste rationale rechtwinklige Dreieck, in welchem sich die Seiten wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten. Ist $d < \frac{1}{4}c$, so ist das mittelseitige Dreieck spitzwinklig, stumpfwinklig dagegen, wenn $d > \frac{1}{4}c$ ist.

III. Zwischen den in I und II betrachteten Dreieckgattungen besteht folgende Relation. Giebt man den Buchstaben im Dreieck der Höhenfusspunkte, welche denen des Urdreiecks entsprechen, einfache, und ebenso denen des Dreiecks der Ankreismittelpunkte doppelte Accente, so kann man den Doppelsatz aussprechen: das Höhenfussdreieck $A'B'C'$ eines solchen Dreiecks ABC, wo $KH \parallel AB$, ist ein mittelseitiges, wo $O'T' \parallel A'B'$ und das grosse Centralendreieck $A''B''C''$ (oder $O_aO_bO_c$) eines mittelseitigen Dreiecks, wo $OT \parallel AB$, ist ein Dreieck, in welchem $K''H'' \parallel A''B''$. Da das Centralendreieck dieselbe Beziehung zum Urdreieck hat, wie dieses zum Höhenfussdreieck, so folgt der eine dieser Sätze aus dem andern. Da fer-

14) Der einfachste Fall ist wiederum $d = 1$ und dies findet in dem einfachsten rationalen spitzwinkligen Dreieck statt, dessen Seiten 13, 14, 15 sind, in welchem sodann $h_c = r_c = 12$, $r = 4$, $R = 8\frac{1}{8}$, $p_c = 4\frac{1}{8}$ u. s. w.

ner die Winkel des Höhenfussdreiecks bei A', B', C', resp. die Supplemente der doppelten Dreieckwinkel bei A, B, C sind, d. h.

$$\alpha' = 180 - 2\alpha, \quad \beta' = 180 - 2\beta, \quad \gamma' = 180 - 2\gamma,$$

also

$$\alpha = 90 - \alpha', \quad \beta = 90 - \beta', \quad \gamma = 90\,\gamma',$$

so geht die Winkelrelation

$$\cos\gamma = 2\cos\alpha\cos\gamma,$$

welche das Dreieck ABC als ein solches charakterisirt, wo $KH // AB$, durch Substitution jener Werthe in die Winkelrelation

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma' = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha'\sin\tfrac{1}{2}\beta'$$

über, welche das Dreieck $A'B'C'$ als ein solches zu erkennen giebt, wo $O'T' // A'B'$, oder als ein mittelseitiges.

IV. Es sei $\overline{QU}$ einer Dreieckseite parallel, z. B. $QU // AB$. *Dann ist der zur Basis c gehörige Ankreishalbmesser das arithmetische Mittel der beiden anderen.*

Dies folgt wiederum daraus, dass die Ordinate von U (oder Q) dem dritten Theil der Höhe h_c gleichgesetzt wird, allein die analytische Coordinatenrechnung, die sich in den vorhergehenden Fällen durch einfache planimetrische Betrachtungen (in Verbindung mit einigen der bekanntesten trigonometrischen Dreieckrelationen) ersetzen liess, ist hier nicht zu umgehen. Deshalb breche ich hier ab, zumal da, ausser der angeführten Relation, für diesen Fall noch keine weiteren *einfachen* Ergebnisse sich herausgestellt haben, so wenig als in dem vierten Fall, wo der Hebel $\overline{ZSV}$ einer Dreieckseite parallel ist. Allein das Thema von den besonderen Lagen der Schwerpunktshebel durfte, obgleich wir uns dabei meistens in Rechnung zu ergehen hatten, nicht umgangen werden, wenn wir uns in diesem Artikel eine vollständige Uebersicht von der Theorie der Nagel'schen Punkte vorhalten wollten. Was hinsichtlich der Entfernungen dieser Punkte und hinsichtlich der Lagen ihrer Verbindungslinien noch übrig ist, werde ich in dem nächsten Artikel nachtragen, da es in diesem die formelle Einheit stören würde.

XIX.

Grundzüge eines Kreislinien-Coordinaten-Systems.

Von

Georg v. Gyurkovich,

Lieutenant im k. k. 46. österr. Linien-Infanterie-Regimente.

---

1. Ist bezüglich eines orthogonalen Parallel-Coordinaten-Systems

$$1)\qquad K_1 = (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - r_1^2 = 0$$

die Mittelpunkts-Gleichung eines Kreises, in der (α_1, β_1) die Coordinaten des Mittelpunktes und r_1 die Länge des Halbmessers darstellt, so stellt, wenn (X, Y) die Coordinaten irgend eines Punktes der Kreis-Ebene sind, der Ausdruck

$$2)\qquad (X-\alpha_1)^2 + (Y-\beta_1)^2 - r_1^2$$

das Quadrat der Länge der von (X, Y) an den Kreis K_1 gelegten Tangente dar.

Ist ferner

$$3)\qquad K_2 = (x-\alpha_2)^2 + (y-\beta_2)^2 - r_2^2 = 0$$

die Gleichung eines zweiten Kreises und λ ein willkürlicher Parameter, so ist

$$4)\qquad K_3 = K_1 - \lambda K_2 = 0$$

offenbar die Gleichung eines durch die Schnittpunkte von K_1 und K_2 gehenden Kreises, der also mit ihnen die Gerade

$$5)\qquad K_1 - K_2 = 0$$

als Chordale gemein hat. Die Gleichung 4) unter der Form $\frac{K_1}{K_2} = \lambda$ geschrieben, giebt, mit Bezug auf die Deutung des Ausdrucks 2), als geometrische Interpretation den Satz:

> „Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen das Verhältniss der von ihm an zwei Kreise gelegten Tangenten constant ist, ist wieder ein Kreis, der durch die Schnittpunkte der zwei gegebenen Kreise geht (mit ihnen die Chordale gemein hat)."

Diese allgemeinen allbekannten Hauptsätze mussten der Deutlichkeit halber den nachfolgenden Entwickelungen vorausgeschickt werden.

2. Legt man das orthogonale Coordinaten-System so, dass die Centrale von K_1 und K_2 zur Abscissen-Axe und der Mittelpunkt von K_1 zum Ursprunge, also $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ wird, so hat man als Gleichungen der Kreise 1) und 2)

$$6) \qquad K_1 = x^2 + y^2 - r_1^2 = 0,$$

$$7) \qquad K_2 = (x - \alpha_2)^2 + y^2 - r_2^2 = 0$$

und hiernach als jene von 4) nach entsprechenden Umformungen

$$8) \quad K_3 = \left(x - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\alpha_2\right)^2 + y^2 + \frac{(\lambda - 1)(r_1^2 - \lambda r_2^2) - \lambda \alpha_2^2}{(\lambda - 1)^2} = 0.$$

Bezeichnet man mit (α_3, β_3) die Mittelpunkts-Coordinaten und mit r_3 die Länge des Halbmessers von K_3, so hat man aus der letzten Gleichung

$$9) \qquad \left(\alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\alpha_2, \; \beta_3 = 0\right), \; r_3^2 = \frac{\lambda \alpha_2^2 + (\lambda - 1)(\lambda r_2^2 - r_1^2)}{(\lambda - 1)^2}.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun einige nicht unwichtige Folgerungen ziehen: sind nämlich C_1, C_2, C_3 die auf einer Geraden liegenden Mittelpunkte der drei Kreise K_1, K_2, K_3 und es sei von C_1 gegen C_2 die positive Richtung der Centralen $C_1 C_2$, so liegt der Mittelpunkt C_3 zufolge $\alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\alpha_2$

a) für alle positiven Werthe von $\lambda > 1$ auf der positiven Seite der Centralen ausserhalb des Segments $C_1 C_2$; hingegen für die positiven $\lambda < 1$ auf der negativen Seite der Centralen;

b) für alle negativen Werthe von λ stets innerhalb der Punkte C_1 und C_2.

Man sieht hiernach, dass nur für positive Werthe von λ eine Deutung der Gleichung 4) bezüglich 2) möglich ist.

Aus der Gleichung $\alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\alpha_2$ folgt

$$10) \qquad \frac{C_1 C_3}{C_2 C_3} = \lambda,$$

d. h. λ ist der Modulus der Theilung von C_3 bezüglich C_1 und C_2 (Theilungs-Verhältniss).

3. Wir wollen nun auf einen Zusammenhang aufmerksam machen, der sich nämlich zwischen den Gleichungen der Kreise und ihrer Mittelpunkte kund giebt.

Bezeichnet man die Länge der Entfernung des Punktes C_3 von den beiden Punkten C_1 und C_2 allgemein mit C_1 und C_2 und sind hiernach $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Punkte C_1 und C_2, so stellt sich offenbar die Gleichung von C_3 wegen 10) unter der Form

$$11) \qquad C_3 = C_1 - \lambda C_2 = 0$$

dar.

Bezeichnen wir nun die beiden Punkte C_1 und C_2 mit dem Namen „Fundamental-Punkte“ und analog die aus ihnen beschriebenen Kreise K_1 und K_2 mit den Namen „Fundamental-Kreise“, so hat man folgenden Lehrsatz:

„Ist $C_3 = C_1 - \lambda C_2 = 0$ die Gleichung eines Punktes bezüglich zweier Fundamental-Punkte $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$; sind ferner $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die Gleichungen der aus C_1 und C_2 beschriebenen Fundamental-Kreise, so ist die Gleichung des aus C_3 beschriebenen Kreises K_3, der mit K_1 und K_2 die Chordale gemein hat, bezüglich jener Fundamental-Kreise $K_1 - \lambda K_2 = 0$."

Hiernach lässt sich auch der Kreis K_3 aus seiner Gleichung $K_2 = K_1 - \lambda K_2 = 0$ einfach construiren, indem zuerst sein Mittelpunkt $C_3 = C_1 - \lambda C_2 = 0$ gesucht und aus diesem ein Kreis beschrieben wird, der mit K_1 und K_2 die Chordale gemein hat, welch letzteres keiner Schwierigkeit unterliegt.

4. Sind $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die beiden Fundamental-Kreise und K_3 ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Gleichungsform $C_1 - \lambda C_2 = 0$ hat, ohne dass er aber mit den beiden Kreisen K_1 und K_2 die Chordale gemein hat, so lässt sich die Gleichung von K_3 doch durch jene von K_1 und K_2 mit Zuhilfenahme einer Constanten A ausdrücken. Man hat nämlich alsdann als Gleichung von K_3

12) $$K_3 = K_1 - \lambda K_2 - A = 0,$$

denn es ist offenbar K_3 concentrisch mit dem Kreise $K_1 - \lambda K_2 = 0$ und ihre Gleichungen können sich hiernach nur durch eine Constante unterscheiden.

Ist r der Radius von $K_1 - \lambda K_2 = 0$ und um d kleiner als jener von K_3 12), so erhält man als Werth der Constante

13) $$A = d^2 + 2dr.$$

Welchen Satz giebt die geometrische Interpretation [bezüglich 2)] der Gleichung 12)?

Wir haben also schliesslich den Satz:

„Liegt der Mittelpunkt eines Kreises K_3 auf der Centralen der beiden Kreise K_1 und K_2, so kann die Gleichung von K_3 stets durch jene von K_1 und K_2 ausgedrückt werden und zwar ohne oder mit Zuhilfenahme einer Constanten, je nachdem die drei Kreise die Chordale gemein haben oder nicht."

1. Aufgabe. Die drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ und $K_1 - A = 0$ sind gegeben, die drei Kreise $K_1 + A = 0$, $K - A = 0$ und $K + A = 0$ zu construiren.

2. Aufgabe. Die Punkte zu bestimmen, in denen ein Kreis mit dem Mittelpunkte $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ und dem Halbmesser r die Strecke $C_1, C_2 = c$ schneidet.

3. Aufgabe. Die Punkte zu bestimmen, in denen der Kreis $\lambda K + \mu K_2 = 0$ die Centrale $C_1, C_2 = c$ der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, deren Halbmesser r_1 und r_2 sind, schneidet.

4. Aufgabe. Die Gleichungen der aus den zwei Aehnlichkeitspunkten der zwei Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ (deren Halbmesser r_1 und r_2 sind) beschriebenen Kreise zu finden, wenn diese letzteren mit K_1 und K_2 die Chordale gemein haben sollen.

Auflösung. Der aus dem inneren Aehnlichkeitspunkte beschriebene Kreis ist $r_1 K_2 - r_2 K_1 = 0$, der aus dem äusseren beschriebene $r_1 K_2 + r_2 K_1 = 0$.

5. Aufgabe. Die Mittelpunkte der Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_1 - \lambda K_2 = 0$ und $K_1 + \lambda K_2 = 0$ bilden eine harmonische Punktreihe.

5. Nehmen wir nun drei feste Kreise

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0$$

an, die wir ebenfalls Fundamental-Kreise nennen wollen, und untersuchen wir die durch die Gleichung

$$K_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0 \tag{14}$$

dargestellte Linie, wobei λ, μ, ν willkürliche Parameter sind.

Man überzeugt sich durch Ausführung dieser Gleichung in orthogonalen Parallel-Coordinaten, dass diese Linie ein Kreis ist, der vermöge seiner Gleichung mit nachfolgenden drei Systemen von je zwei Kreisen die Chordalen gemein hat:

$$\left\{\begin{array}{ll} K_1 = 0, & \mu K_2 + \nu K_3 = 0; \\ K_2 = 0, & \lambda K_1 + \nu K_3 = 0; \\ K_3 = 0, & \lambda K_1 + \mu K_2 = 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

Die Construction der Kreise

$$K' = \mu K_2 + \nu K_3 = 0, \quad K'' = \lambda K_1 + \nu K_3 = 0, \quad K''' = \lambda K_1 + \mu K_2 = 0$$

unterliegt nach Artikel 3) keiner Schwierigkeit, indem ihre Mittelpunkte

$$C' = \mu C_2 + \nu C_3 = 0, \quad C'' = \lambda C_1 + \nu C_3 = 0, \quad C''' = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0 \tag{16}$$

leicht construirt werden können, vorausgesetzt, dass wir die Mittelpunkte C_1, C_2, C_3 der drei Fundamental-Kreise als Fundamental-Punkte eines Dreipunkt-Coordinaten-Systems annehmen.

Nach den Principien der Theorie des Dreipunkt-Coordinaten-Systems schneiden sich aber die drei Geraden C_1C', C_2C'', C_3C''' in einem Punkte C_4, welcher offenbar der Mittelpunkt des Kreises K_4 ist.

Seine Gleichung bezüglich der drei Fundamental-Punkte

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0 \tag{16}$$

ist nach

$$\lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0. \tag{17}$$

Angenommen, dass sich die drei Fundamental-Kreise in sechs reellen Punkten schneiden, so erhalten wir nach 15) den Satz:

„Die Schnittpunkte der Kreise K_1 und K', K_2 und K'', K_3 und K''' liegen wieder auf einem Kreise“, oder mit andern Worten:

> Wählt man auf den drei Dreieckseiten C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 eines Dreiecks $C_1C_2C_3$ drei Punkte C''', C', C'' dergestalt, dass sich die Geraden C_1C', C_2C'', C_3C''' in einem Punkte C_4 schneiden und beschreibt man aus jedem

dieser Punkte C', C'', C''' als Mittelpunkten drei Kreise K', K'', K''', welche mit je zwei Fundamental-Kreisen durch dieselben zwei Punkte gehen, so liegen die Schnittpunkte eines jeden der so beschriebenen Kreise mit dem dritten Fundamental-Kreise auf einem aus C_4 als Mittelpunkt beschriebenen Kreise K_4.

6. Die in 15) durch ihre Gleichungen dargestellten Kreise haben bemerkenswerthe Chordaleigenschaften.

Die auf die Form $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ gebrachte Gleichung 14) ist jedenfalls

$$\frac{\lambda K_1+\mu K_2+\nu K_3}{\lambda+\mu+\nu}=0,$$

die Gleichung der Chordalen von K_4 und K_1 ist hiernach

$$K_1-\frac{\lambda K_1+\mu K_2+\nu K_3}{\lambda+\mu+\nu}=\mu\,(K_1-K_2)+\nu\,(K_1-K_3)=0,$$

d. h. diese Gerade geht durch den Durchschnitt der beiden Chordalen $K_1-K_2=0$ und $K_1-K_3=0$, also durch das Chordal-Centrum O der drei Kreise K_1, K_2 und K_3.

Analog lässt sich auch nachweisen, dass jedes System dreier Kreise, das aus den Kreisen K_1, K_2, K_3, K_4, K', K'', K''', zusammengesetzt ist, den Punkt O als Chordal-Centrum besitzt, wovon man sich auch mittelst eines einfachen geometrischen Beweises überzeugen kann.

7. Der Kreis 14) K_4 kann also als ein solcher charakterisirt werden, der mit den drei Fundamental-Kreisen das Chordal-Centrum gemein hat, wonach umgekehrt der Satz ausgesprochen werden kann:

„Die Gleichung eines Kreises K_4, der mit drei Kreisen K_1, K_2, K_3 das Chordal-Centrum gemein hat, lässt sich bezüglich dieser stets auf die Form $K_4 = \lambda K_1+\mu K_2+\nu K_3=0$ 14) bringen.

Unter Anwendung dieser Gleichung ergiebt sich auch in orthogonalen Parallel-Coordinaten

$$18)\quad\left\{\begin{array}{l}\left(x-\dfrac{\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2+\nu\alpha_3}{\lambda+\mu+\nu}\right)^2+\left(y-\dfrac{\lambda\beta_1+\mu\beta_2+\nu\beta_3}{\lambda+\mu+\nu}\right)^2-r_4^2=0,\\ \text{wobei}\\ r_4^2=\dfrac{1}{(\lambda+\mu+\nu)^2}\left\{\begin{array}{l}(\lambda+\mu+\nu)\,(\lambda r_1^2+\mu r_2^2+\nu r_3^2)-\lambda\,(\mu+\nu)\,[\alpha_1^2+\beta_1^2]\\ -\mu\,(\nu+\lambda)\,[\alpha_2^2+\beta_2^2]-\nu\,(\lambda+\mu)\,[\alpha_3^2+\beta_3^2]\\ +2\,[\lambda\mu\,(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+\lambda\nu\,(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3)\\ +\mu\nu\,(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)]\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

als die Gleichung eines Kreises, der mit den drei Kreisen

$$\left[x-\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{matrix}\right\}\right]^2+\left[y-\left\{\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{matrix}\right\}\right]^2-\left\{\begin{matrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{matrix}\right\}^2=0$$

das Chordal-Centrum gemein hat.

8. Wäre ein Kreis K_4 gegeben, der als beliebig gelegen, mit drei gegebenen Kreisen K_1, K_2, K_3 das Chordal-Centrum gemein hat, so lässt sich seine Gleichung doch durch jene der drei gegebenen Fundamental-Kreise mit Zuhilfenahme einer Constanten A ausdrücken.

Es sei die Gleichung des Mittelpunktes C_4 von K_4 bezogen auf die Mittelpunkte C_1, C_2, C_3 der drei Kreise

$$C_4 = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0$$

und es sei der diesem Mittelpunkte entsprechende Kreis K'_4, der mit K_1, K_2, K_3 das Chordal-Centrum gemein hat, so ist seine Gleichung

$$K'_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 = 0,$$

die sich offenbar von der Gleichung von

$$K_4 = \lambda K_1 + \mu K_2 + \nu K_3 - A = 0 \tag{19}$$

nur um eine Constante A unterscheiden kann.

Die Bedeutung der Constanten ist analog jener aus 13). Wir haben also schliesslich den Satz:

„Die Gleichung eines Kreises K_4 lässt sich bezüglich dreier (Fundamental-) Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ stets durch ihre Gleichungen ausdrücken und zwar ohne oder mit Zuhilfenahme einer Constanten, jenachdem K_4 mit den drei (Fundamental-) Kreisen das Chordal-Centrum gemein hat oder nicht."

9. 1. Lehrsatz. Der geometrische Ort des Mittelpunktes C_4 eines Kreises K_4, der mit drei festen Kreisen, K_1, K_2, K_3 (deren Mittelpunkte C_1, C_2, C_3 sind) deren Chordal-Centrum als solches gemein hat, und

a) einen der drei Kreise, z. B. K_1 stets in einem festen Punkte a_1 schneidet, ist eine durch C_1 gehende und auf $a_1 O$ senkrechte Gerade;

b) zwei der festen Kreise, z. B. S_1 und S_2 in allen seinen Lagen dergestalt in zwei Punkten a_1 und a_2 schneidet, dass der Winkel $a_1 O a_2$ stets constant bleibt, ist ein durch die Mittelpunkte C_1 und C_2 gehender Kreis.

2. Lehrsatz. Wenn von vier Kreisen K_1, K_2, K_3, K_4 sich K_1 und K_2 in zwei Punkten, ebenso K_3 und K_4 in zwei anderen schneiden, die jedoch alle vier auf derselben Geraden liegen, so haben alle vier Kreise das Chordal-Centrum gemein.

10. Untersuchen wir nun die Bedingung, unter der ein Kreis von der Gleichung

$$K_4 = \lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3 = 0$$

durch zwei feste Punkte geht.

Es seien diese beiden Punkte durch die beiden Kreise

$$K_5 = \lambda_2 K_1 + \mu_2 K_2 + \nu_2 K_3 = 0 \quad \text{und} \quad K_6 = \lambda_3 K_1 + \mu_3 K_2 + \nu_3 K_3 = 0$$

fixirt. Wenn nun die Chordale von K_4 und K_5 mit jener von K_4 und K_6 identisch wird, so geht offenbar K_4 durch zwei feste Punkte.

Die Chordale von K_4 und K_5 ist:

$$\frac{\lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3}{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1} - \frac{\lambda_2 K_1 + \mu_2 K_2 + \nu_2 K_3}{\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2} = 0,$$

oder auch unter der Form

$$(K_1 - K_2) + (K_1 - K_3)\frac{\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2} + (K_2 - K_3)\frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2} = 0;$$

als jene von K_4 und K_6 findet man analog

$$(K_1 - K_2) + (K_1 - K_3)\frac{\lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 \nu_1}{\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3} + (K_2 - K_3)\frac{\mu_1 \nu_3 - \mu_3 \nu_1}{\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3} = 0.$$

Sollen nun diese beiden Geraden identisch werden, so muss sein

$$\frac{\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 \nu_1}{\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3} \quad \text{und} \quad \frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2} = \frac{\mu_1 \nu_3 - \mu_3 \nu_1}{\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Bedingungs-Gleichung

$$\frac{\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1}{\lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 \nu_1} = \frac{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1}{\mu_1 \nu_3 - \mu_3 \nu_1},$$

aus welcher man nach einfacher Reduction als schliessliche Bedingungs-Gleichung erhält

20) $$\lambda_1 (\mu_2 \nu_3 - \mu_3 \nu_2) + \mu_1 (\nu_2 \lambda_3 - \nu_3 \lambda_2) + \nu_1 (\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3) = 0.$$

Bedenkt man, dass die Mittelpunkte der drei Kreise K_4, K_5 und K_6

$$\lambda_1 C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 = 0, \quad \lambda_2 C_1 + \mu_2 C_2 + \nu_2 C_3 = 0, \quad \lambda_3 C_1 + \mu_3 C_2 + \nu_3 C_3 = 0$$

sind, so drückt, wie bekannt, die Gleichung 20) die Bedingung aus, unter der diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Bedenkt man ferner, dass die Kreise K_5 und K_6 als fest angenommen wurden, dass also die Coefficienten von λ_1, μ_1 und ν_1 in 20) constante Grössen sind, die wir der Reihe nach mit a, b, c bezeichnen wollen, so ist die allgemeine Bedingungs-Gleichung, dass ein Kreis $K_4 = \lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3 = 0$ durch zwei feste Punkte geht,

21) $$a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 = 0.$$

Wenn aber ein Kreis durch zwei feste Punkte geht, so ist der Ort des Mittelpunktes eine Gerade und wir sehen beim Uebergange zu den Dreipunkt-Coordinaten in 21) die Bedingung, dass sich ein Punkt $\lambda_1 C_1 + \mu_1 C_2 + \nu_1 C_3 = 0$ auf einer Geraden bewegt.

11. Untersuchen wir nun die Bedingung, unter der ein Kreis

$$K_4 = \lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3 = 0$$

in eine Gerade degenerirt.

Nachdem wir uns jede Gerade als eine Chordale zweier Kreise vorstellen können, so denken wir uns, K_4 sei mit der Chordale von $K_5 = \lambda_2 K_1 + \mu_2 K_2 + \nu_2 K_3 = 0$ und $K_6 = \lambda_3 K_1 + \mu_3 K_1 + \nu_3 K_3 = 0$ identisch. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich aber als Chordale dieser Kreise, wie in Art. 10, aber in anderer Form geschrieben

$$[\lambda_2(\mu_3 + \nu_3) - \lambda_3(\mu_2 + \nu_2)] K_1 + [\mu_2(\nu_3 + \lambda_3) - \mu_3(\nu_2 + \lambda_2)] K_2$$
$$+ [\nu_2(\lambda_3 + \mu_3) - \nu_3(\lambda_2 + \mu_2)] K_3 = 0.$$

Soll diese Gleichung aber mit jener von K_4 identisch sein, so muss

$$\frac{\mu_2(\nu_3+\lambda_3)-\mu_3(\nu_2+\lambda_2)}{\lambda_2(\mu_3+\nu_3)-\lambda_3(\mu_2+\nu_2)}=\frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

$$\frac{\nu_2(\lambda_3+\mu_3)-\nu_3(\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_2(\mu_3+\nu_3)-\lambda_3(\mu_2+\nu_2)}=\frac{\nu_1}{\lambda_1}$$

sein. Addirt man nun diese beiden Gleichungen und auf jeder Seite noch die Einheit hinzu, so erhält man schliesslich

$$22)\qquad \lambda_1+\mu_1+\nu_1=0$$

als die Bedingung, dass die Gleichung

$$K_4=\lambda_1 K_1+\mu_1 K_2+\nu_1 K_3=0$$

eine Gerade darstellt. Diese Gerade geht natürlich (da auch übrigens die Bedingungs-Gleichung 21) erfüllt wird) durch das Chordal-Centrum der drei Kreise K_1, K_2 und K_3.

Bedenkt man, dass $C_4=\lambda_1 C_1+\mu_1 C_2+\nu_1 C_3=0$ der Mittelpunkt von K_4 ist, so wird bekanntlich durch die Bedingungs-Gleichung 22) ausgedrückt, dass dieser Punkt im Unendlichen liegt, wonach sich also die Gerade als ein Kreis mit dem Mittelpunkte im Unendlichen darstellen lässt.

12. 1. **Lehrsatz.** Sind in der Gleichung $K_4=\lambda_1 K_1+\mu_1 K_2+\nu_1 K_3=0$ die Grössen λ und μ constant und nur ν variabel, so gehen alle diese Kreise durch zwei feste Punkte, ihre Mittelpunkte bewegen sich auf einer durch C_3 gehenden Geraden.

2. **Lehrsatz.** Sind in der Gleichung $\lambda K_1+\mu K_2+\nu K_3=0$ die Coefficienten von K_1 und K_2 gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet, so schneidet der durch diese Gleichung dargestellte Kreis den Fundamental-Kreis K_3 auf der Chordalen von K_1 und K_2 (Umkehrung des zweiten Satzes Art. 9).

3. **Lehrsatz.** Wenn verschiedene Kreise durch dieselben zwei festen Punkte gehen, so geht ihre Chordale mit einem festen Kreise durch einen festen Punkt.

4. **Lehrsatz.** Haben mehrere Kreise mit drei Fundamental-Kreisen das Chordal-Centrum als solches gemein und liegen die Mittelpunkte der ersteren Kreise auf einer Geraden, so haben sie auch unter einander eine und dieselbe Gerade als Chordale gemein (s. Art. 10).

5. **Lehrsatz.** Führt man von den Punkten eines Kreises K_4 Tangenten an drei feste Kreise K_1, K_2, und K_3 und ist die Summe der mit gewissen Constanten multiplicirten Tangenten-Längen gleich Null, so haben die vier Kreise das Chordal-Centrum gemein; was nicht der Fall, wenn diese Summe gleich einer Constanten ist.

6. **Lehrsatz.** Sind K_1, K_2, K_3 drei gegebene Kreise von den Radien r_1, r_2, r_3 und sind der Reihe nach C'_1, C'_2 und C'_3 deren äussere und C''_1, C''_2, C''_3 deren innere Aehnlichkeitspunkte und beschreibt man aus diesen sechs Punkten sechs Kreise K'_1, K'_2, K'_3, K''_1, K''_2, K''_3, wovon jeder

mit zwei der gegebenen Kreise die Chordale gemein hat, so haben auch je drei Kreise der nachfolgenden Systeme

$$(K'_1 K'_2 K''_3),\quad (K'_2 K'_3 K''_1),\quad (K'_3 K'_1 K''_2)$$

je eine Gerade als Chordale gemein.

13. Die Lösungen der bisher gegebenen Aufgaben und Lehrsätze wurden wegen deren Einfachheit weder angesetzt noch durchgeführt. Nachstehend wollen wir nun die Beweisführung eines Lehrsatzes geben, die zugleich zeigen soll, wie bei etwas complicirteren Fällen die bisherigen Entwickelungen anzuwenden sind.

„Beschreibt man über die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks als Durchmesser drei Kreise, so haben letztere eine und dieselbe Gerade als Chordale gemein."

Wir müssen bemerken, dass es durchaus nicht nothwendig ist, die Fundamental-Kreise im Vorhinein anzunehmen und dann die Gleichungen der durch den Lehrsatz gegebenen Kreise zu suchen. Im Gegentheile, man kann diese Fundamental-Kreise aus dem Vorhandensein anderer schon gegebener Kreise construiren, denen man bezüglich der noch zu construirenden Fundamental-Kreise gewisse vielleicht schon vorausgesetzte einfache Gleichungsformen ertheilen will. Dieses Verfahren ist correspondirend jenem beim Parallel-Coordinaten-Systeme, wo man erst nach Verzeichnung der zur Lösung einer gegebenen Aufgabe nothwendigen Objecte das Coordinaten-System zweckentsprechend wählt.

Es sei nun $ABCD$ (EF) das vollständige Viereck, mit dem über seine Diagonalen AC, BD, EF als Durchmesser der Reihe nach aus G, H und I beschriebenen Kreise K_4, K_5 und K_6.

Wählen wir nun A, B und D als Mittelpunkte der drei noch zu construirenden Fundamental-Kreise, und es seien die Gleichungen dieser Mittelpunkte der Reihe nach

$$C_1 = 0,\quad C_2 = 0,\quad C_3 = 0,$$

welche wir als Fundamental-Punkte eines Dreipunkt-Coordinaten-Systems wählen. Alsdann hat die Gleichung des Punktes C jedenfalls die Gleichungsform

$$\lambda_1 C_1 + \mu_1 C_2 + \nu_1 C_3 = 0.$$

Hiernach ergeben sich als Gleichungen der Diagonalen-Mittelpunkte

$$(G)\ C_1 + \frac{\lambda_1 C_1 + \mu_1 C_2 + \nu_1 C_3}{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1};\ (H)\ C_2 + C_3 = 0;\ (I)\ \frac{\lambda_1 C_1 + \mu_1 C_2}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\lambda_1 C_1 + \nu_1 C_3}{\lambda_1 + \nu_1} = 0.$$

Ist man nun im Stande, die Fundamental-Kreise K_1, K_2, K_3 so zu wählen, dass die Gleichungen der Kreise K_4, K_5, K_6 die nachstehenden Formen

$$23)\quad \begin{cases} K_4 = K_1 + \dfrac{\lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3}{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1}; \\ K_5 = K_2 + K_3 = 0; \\ K_6 = \dfrac{\lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2}{\lambda_1 + \mu_1} + \dfrac{\lambda_1 K_1 + \nu_1 K_3}{\lambda_1 + \nu_1} = 0 \end{cases}$$

erhalten, so ist auch zugleich der Beweis des obigen Satzes gegeben; denn die Gleichung von K_6 lässt sich auch dann auf die Form

$$\mu_1 \nu_1 (K_2 + K_3) + \lambda_1 (\lambda_1 + \mu_1 \nu_1) \left[K_1 + \frac{\lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3}{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1} \right] = 0$$

bringen, welche zugleich andeutet, dass K_6 mit K_4 und K_5 deren Chordale gemein hat. Dass nun dies möglich ist, bezeigt Nachfolgendes: Beschreibt man z. B. den Fundamental-Kreis $K_2 = 0$ mit beliebigem Halbmesser aus B, so ist auch hierdurch K_3 bestimmt, da er mit $K_2 = 0$ und $K_5 = K_2 + K_3 = 0$ die Chordale gemein hat. Nun ist auch K_1 bestimmt; denn setzt man in der Gleichung

$$K_4 = K_1 + \frac{\lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2 + \nu_1 K_3}{\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1} = 0; \quad K_1 = 0,$$

so erhält man

$$\mu_1 K_2 + \nu_1 K_3 = 0,$$

d. h. K_1 geht durch den Schnitt von K_4 und $\mu_1 K_2 + \nu_1 K_3 = 0$. Dieser leicht zu construirende Kreis hat seinen Mittelpunkt in $\mu_1 C_2 + \nu_1 C_3 = 0$ (dem Schnittpunkte K der beiden Diagonalen AC und BD) und hat mit K_2 und K_3 die Chordale gemein.

Nun sind die Fundamental-Kreise so gewählt, dass die drei Kreise K_4, K_5 und K_6 die gewünschten Gleichungsformen 23) erhalten, womit zugleich der Beweis des obigen Lehrsatzes hergestellt ist.

Ebenso besitzen auch die über $\left\{ \begin{matrix} DC,\ AB \text{ und } FK \\ AD,\ BC \text{ und } EK \end{matrix} \right\}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise dieselbe Gerade als Chordale gemein (also liegen auch ihre Mittelpunkte auf einer Geraden).

14. Nachdem Punkt und Gerade als Specialitäten des Kreises und zwar ersterer als Kreis mit dem Halbmesser gleich Null, letztere als Kreis, dessen Mittelpunkt im Unendlichen liegt, betrachtet werden können, so ist klar, dass sich aus dem bis jetzt entwickelten Kreislinien-Coordinaten-Systeme durch Specialisirung der Fundamental-Kreise in Punkt und Gerade auch andere Coordinaten-Systeme ergeben, wie auch die bis jetzt ausgesprochenen Lehrsätze hierdurch Veränderungen erleiden werden, welch' letztere wir aber wegen ihrer Weitläufigkeit — wenn auch manche nicht uninteressant sind — anzuführen unterlassen müssen.

Auch von den Coordinaten-Systemen wollen wir nur eins besonders hervorheben, das wegen seiner Einfachheit bemerkenswerth ist.

15. Lässt man in der Gleichung 1) $r_1 = 0$, d. h. K_1 zu einem Punkte werden, so bedeutet der Ausdruck 2) die Entfernung eines Punktes (X, Y) vom Punkte (α_1, β_1), dessen Gleichung des Unterschiedes halber mit $R_1 = 0$ bezeichnet sei. Lässt man ebenso in 3) $r_2 = 0$, d. h. K_2 zu einem Punkte von der Gleichung $R_2 = 0$ werden, so lautet offenbar die geometrische Interpretation der Gleichung

$$R_1 - \lambda R_2 = 0 \text{ bezüglich 2):}$$

„Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen das Verhältniss der Abstände von zwei festen Punkten ein constantes ist, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungs-Geraden der zwei festen Punkte liegt. Der Kreis und die beiden Punkte haben die (senkrechte Halbirungs-Gerade ihrer Entfernung als) Chordale gemein."

Beim Uebergange zum allgemeinen Coordinaten-Systeme von drei Fundamental-Kreisen erhalten wir, wenn diese ebenfalls in drei Punkte

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0$$

degeneriren, in

24) $$\lambda R_1 + \mu R_2 + \nu R_3 = 0$$

die Gleichung eines Kreises, der mit den drei Fundamental-Punkten das Chordal-Centrum (den Mittelpunkt des Fundamental-Dreiecks) gemein hat.

(Wie heisst der Lehrsatz 5 des Artikels 12 für dieses Coordinaten-System?)

Ebenso bezeichnet die der Bedingungs-Gleichung $\lambda + \mu + \nu = 0$ unterworfene Gleichung 24) eine durch den Dreiecks-Mittelpunkt gehende Gerade.

16. Die Anwendung dieses Coordinaten-Systems zum Beweise von Lehrsätzen wird deshalb seltener als beim allgemeinen Coordinaten-System stattfinden, weil im ersteren schon mit der Wahl der Fundamental-Punkte das Coordinaten-System vollkommen bestimmt ist, während man im letzteren noch dann nach Belieben über die Grösse der Halbmesser disponiren kann (s. Art. 13).

Die Bedingung, unter welcher die Kreise 14) und 24) nicht imaginär werden, liefert die Gleichung 18), indem man ausdrückt, dass der Ausdruck für r_4^2 reell, das heisst der Zähler dieses Werthes positiv bleiben muss.

Hiermit seien die „Grundzüge einer Theorie eines Kreislinien-Coordinaten-Systems" entworfen, womit eine Theorie nur begründet sein möge, deren weitere Ausführung ich aber bessern Kräften überlassen muss.



XX.

Ueber das Problem der Complanation.

Von

Dr. O. Schlömilch.

(Hierzu Tafel IV, Figur 5 und 6.)

In einer berühmten Abhandlung über die Reduction der Doppelintegrale (Crelle's Journal, Bd. X, S. 110) zeigte Jacobi, dass sich Legendre's Formel für die Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides sehr kurz herleiten lässt, wenn das Flächenelement nicht wie gewöhnlich durch rechtwinklige Coordinaten, sondern durch die beiden Winkel ausgedrückt wird, welche die Richtung der zu jenem Elemente gehörigen Normale bestimmen. Wie es scheint, hat man diese Transformation für einen speciellen, nur auf das Ellipsoid passenden Kunstgriff angesehen und deshalb nicht weiter benutzt; in der That aber besitzt dieselbe eine viel grössere Tragweite und führt, mit den gehörigen Modificationen angewendet, zu manchen eleganten Resultaten, die um so bemerkenswerther sein dürften, als es — abgesehen von Umdrehungsflächen und Cylindern — nur wenige Flächen giebt, deren Complanation durch einfache Formeln möglich ist.

Im Folgenden denken wir uns eine beliebige Fläche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen; ihre Gleichung sei

$$1) \qquad z = \varphi(x, y),$$

ferner bezeichne ϑ den Winkel, welchen die Horizontalprojection der durch den Punkt xyz gelegten Normale mit der x-Achse einschliesst, ω bedeute den Neigungswinkel der Normale gegen die Horizontalebene xy, endlich sei S der Flächeninhalt eines nachher zu bestimmenden Flächenstückes; es gelten dann die bekannten Formeln

$$2) \qquad \tan\vartheta = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}},$$

$$3) \qquad \cot^2\omega = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

4) $$S = \iint \frac{dx\,dy}{\sin\omega}.$$

Mittelst der Gleichungen 2) und 3) kann man x und y, folglich auch $dx\,dy$ durch ϑ und ω ausdrücken; die Formel 4) erhält dann die Gestalt

5) $$S = \iint \frac{f(\vartheta, \omega)}{\sin\omega}\, d\vartheta\, d\omega,$$

und dabei ist das Flächenelement $f(\vartheta, \omega) \csc\omega\, d\vartheta\, d\omega$ ein Viereck, dessen Ecken durch die Winkelpaare

$$\vartheta, \omega; \quad \vartheta, \omega + d\omega; \quad \vartheta + d\vartheta, \omega; \quad \vartheta + d\vartheta, \omega + d\omega$$

bestimmt sind.

Um ferner passende Integrationsgrenzen zu erhalten, schicken wir folgende Bemerkung voran. Von dem Punkte xyz ausgehend, kann man auf der Fläche noch unendlich viel weitere Punkte finden, deren Normalen denselben Neigungswinkel ω mit der Horizontalebene einschliessen; alle diese Punkte bilden in stetiger Folge eine auf der Fläche liegende krumme Linie, welche die Curve der isoklinen Normalen für den Neigungswinkel ω heissen mag. Die Gleichung ihrer Horizontalprojection ist No. 3) selbst, wenn darin ω als Constante angesehen wird. Zu dem Neigungswinkel $\omega + d\omega$ gehört eine zweite Curve isokliner Normalen, und wenn diese keine Durchschnitte mit der ersten bildet, so fassen beide Curven einen unendlich schmalen Flächenstreifen zwischen sich, der bandförmig auf der Fläche fortläuft. Wird nun in No. 5) die Integration nach ϑ zuerst ausgeführt zwischen den willkürlichen Grenzen ϑ_0 und ϑ_1, so ergiebt sich der Flächeninhalt desjenigen Theiles von jenem Streifen, dessen Endpunkte durch die vier Winkelpaare

$$\vartheta_0, \omega; \quad \vartheta_0, \omega + d\omega; \quad \vartheta_1, \omega; \quad \vartheta_1, \omega + d\omega$$

bestimmt sind. Die zweite Integration zwischen den Grenzen ω_0 und ω_1 liefert eine Summe von solchen Streifen, d. h. den Flächeninhalt eines Vierecks $P_0 Q_0 Q_1 P_1$ (Taf. IV, Fig. 5); in diesem sind $P_0 Q_0$ und $P_1 Q_1$ die zu den Winkeln ω_0 und ω_1 gehörenden Curven isokliner Normalen, und analog sind $P_0 P_1$ und $Q_0 Q_1$ zwei Curven der Art, dass ϑ längs $P_0 P_1$ den constanten Werth ϑ_0, dagegen längs $Q_0 Q_1$ den constanten Werth ϑ_1 behält. Die Horizontalprojection $M_0 M_1 N_1 N_0$ ist der Durchschnitt von vier ebenen Curven, und zwar ergeben sich die Gleichungen von $M_0 N_0$ und $M_1 N_1$ aus No. 3) für $\omega = \omega_0$ und ω_1, dagegen die Gleichungen von $M_0 M_1$ und $N_0 N_1$ aus No. 2) für $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$. Da sämmtliche Integrationsgrenzen absolute Constanten sind, so kann die Reihenfolge der Integrationen ohne Weiteres umgekehrt werden. Falls sich ϑ von 0 bis 2π ausdehnen lässt, erhält man aus No. 5) den Flächeninhalt einer von zwei Curven isokliner Normalen begrenzten Zone.

Wir geben zunächst ein einfaches Beispiel, hauptsächlich um zu zeigen, dass es vortheilhafter ist, die neuen Variabeln ϑ und ω nach einander statt gleichzeitig einzuführen.



a. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei

$$z = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a} + \frac{y^2}{2b}};$$

man hat dann folgende Werthe

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b},$$

$$6) \qquad tan\,\vartheta = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{a}{x}}, \quad y = b\sqrt{\frac{x}{a}}\,.\,tan\,\vartheta.$$

Wird nun zuerst statt y die neue Variabele ϑ eingeführt, so ergiebt sich

$$7) \qquad S = \frac{b}{\sqrt{a}}\int\!\!\int\frac{\sqrt{x}\,dx\,d\vartheta}{sin\,\omega\,cos^2\vartheta}.$$

Ferner ist nach No. 3)

$$8) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y^2}{a} = cot^2\,\omega$$

und zufolge des Werthes von y aus No. 6)

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\,tan^2\vartheta = cot^2\omega, \text{ oder } x = a\,cos^2\vartheta\,cot^2\omega;$$

substituirt man dies in No. 7) indem man ω als die neue für x eintretende Variabele betrachtet, so erhält man

$$S = -2ab\int\!\!\int\frac{cos\,\vartheta\,cos^2\omega}{sin^5\omega}\,d\vartheta\,d\omega.$$

Zwischen vier constanten Grenzen genommen ist dieses Doppelintegral nur ein Product zweier einfachen Integrale, nämlich

$$S = 2ab\,(sin\,\vartheta_1 - sin\,\vartheta_0)\int_{\omega_1}^{\omega_0}\frac{cos^2\omega}{sin^5\omega}\,d\omega,$$

wobei auch die noch übrige Integration mittelst der Substitution $cos\,\omega = u$ leicht ausgeführt werden kann. Die Horizontalprojection der quadrirten Fläche ist ein von vier Parabelbögen begrenztes Viereck; die Gleichungen dieser Parabeln lauten nach No. 6) und 8)

$$y = b\sqrt{\frac{x}{a}}\,tan\,\vartheta_0, \quad y = b\sqrt{\frac{x}{a}}\,tan\,\vartheta_1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b} = cot^2\omega_0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y^2}{b} = cot^2\omega_1;$$

die beiden letzten Parabeln sind die Horizontalprojectionen der zu den Winkeln ω_0 und ω_1 gehörenden Curven isokliner Normalen. Für $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_1 = \frac{1}{2}\pi$ wird S der Flächeninhalt eines Streifens, der von den ebengenannten Curven und im Uebrigen von den Coordinatenebenen xz und yz begrenzt ist.

b. Das angegebene Verfahren lässt sich überhaupt bei allen Flächen anwenden, deren Gleichungen unter der Form

$$z^n = Ax^m + By^m$$

enthalten sind, wofür der Homogenität wegen geschrieben werden möge

9)
$$z = \frac{n c^{\frac{n-1}{n}}}{m} \left(\frac{x^m}{a^{m-1}} + \frac{y^m}{b^{m-1}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Man erhält zunächst

10)
$$\tan \vartheta = \left(\frac{a y}{b x} \right)^{m-1}$$

oder wenn

11)
$$\tan \vartheta = t^{m-1}$$

gesetzt und t als neue Variable angesehen wird,

$$y = \frac{b}{a} x t,$$

mithin

$$S = \frac{b}{a} \int\int \frac{x\, dx\, dt}{\sin \omega}.$$

Ferner ergiebt sich

12)
$$c^{\frac{2n-2}{n}} \left(\frac{x^{2m-2}}{a^{2m-2}} + \frac{y^{2m-2}}{b^{2m-2}} \right) \left(\frac{x^m}{a^{m-1}} + \frac{y^m}{b^{m-1}} \right)^{-\frac{2n-2}{n}} = \cot^2 \omega;$$

substituirt man hier den vorigen Werth von y und setzt zur Abkürzung

$$p = \frac{n-1}{m-n}, \quad q = \frac{n}{m-n},$$

so findet man

$$x^2 = \frac{a^2}{c^{2p}} \cdot \frac{(a + b t^m)^{2p}}{(1 + t^{2m-2})^q} \cot^{2q} \omega,$$

und die Formel für S wird nun zur folgenden

13)
$$S = q \frac{ab}{c^{2p}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\omega_1}^{\omega_0} \frac{(a + b t^m)^{2p}}{(1 + t^{2m-2})^q} \cdot \frac{\cos^{2q-1} \omega}{\sin^{2q+2} \omega} dt\, d\omega,$$

worin die auf t bezüglichen Integrationsgrenzen durch die Gleichungen

$$t_0^{m-1} = \tan \vartheta_0, \quad t_1^{m-1} = \tan \vartheta_1$$

bestimmt sind. Die Horizontalprojection der quadrirten Fläche ist hier ein gemischtliniges Viereck; zwei Seiten desselben sind gerade, durch den Coordinatenanfang gehende Linien, deren Gleichungen lauten

$$y = \frac{b t_0}{a} x \text{ und } y = \frac{b t_1}{a} x;$$

die beiden übrigen Seiten sind die Horizontalprojectionen der zu ω_0 und ω_1 gehörenden Curven isokliner Normalen, und zwar ergeben sich ihre Gleichungen aus No. 12) für $\omega = \omega_0$ und $\omega = \omega_1$. Das Doppelintegral für S zerfällt von selbst in ein Product zweier einfachen Integrale und bietet daher keine Schwierigkeit.

In dem speciellen Falle $n = 1$ wird

$$z = \frac{x^m}{a^{m-1}} + \frac{y^m}{b^{m-1}},$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-2}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2m-2}=\cot^2\omega,$$

$p=0,\ q=\dfrac{1}{m-1}$, und wenn man $\vartheta_0=0,\ \vartheta_1=\frac{1}{2}\pi$ nimmt, so ergiebt sich nach bekannten Formeln

$$S=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2}q)]^2}{\Gamma(q)}\cdot\frac{q^2ab}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\frac{\cos^{2q-1}\omega}{\sin^{2q+2}\omega}\,d\omega.$$

Nicht ohne Interesse ist die sehr specielle Annahme $n=\frac{3}{2}$, $m=2$ also

$$z=\frac{1}{3\sqrt{c}}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)=c\cot^2\omega;$$

es wird dann

$$S=\tfrac{1}{2}ab\sqrt{c}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\frac{d\omega}{\sin^3\omega}\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(a+bt^2)}}.$$

Ersetzt man noch a, b, c durch a^2, b^2, $\dfrac{1}{c^2}$ und beachtet, dass $t=\tan\vartheta$ ist, so wird

$$z=\tfrac{1}{3}c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$S=\frac{a^2b^2}{2c}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\frac{d\omega}{\sin^3\omega}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta+b^2\sin^2\vartheta}},$$

es kann demnach S durch ein elliptisches Integral erster Art ausgedrückt werden.

c. Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung bei denjenigen Flächen, deren Gleichungen von der Form sind

$$Ax^m+By^m+Cz^m=1;$$

nur in den Fällen $m=2$ und $m=\frac{2}{3}$ gelangt man zu den im Folgenden angebenen eleganten Resultaten.

Für $m=2$ also bei den centrischen Flächen zweiter Ordnung ist

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1,$$

$$\tan\vartheta=\frac{By}{Ax}\ \text{oder}\ y=\frac{A}{B}x\tan\vartheta,$$

$$A\left(\frac{A}{C}\tan^2\omega+1\right)x^2+B\left(\frac{B}{C}\tan^2\omega+1\right)y^2=1$$

und durch successive Einführung von ϑ und ω erhält man

$$S=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\int_{\omega_1}^{\omega_0}\frac{ABC\cos\omega\,d\vartheta\,d\omega}{[C(B\cos^2\vartheta+A\sin^2\vartheta)\cos^2\omega+AB\sin^2\omega]^2}.$$

Lässt man ϑ von 0 bis 2π gehen, so hat die Ausführung der auf ϑ bezüglichen Integration keine Schwierigkeit. Um aber Formeln zu erhalten, die auf alle drei centrischen Flächen gleichförmig passen, setzen wir bei dem Ellipsoide $a > b > c$ d. h. $A < B < C$, bei den Hyperboloiden $a < b$ voraus; die Grössen

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}}$$

sind dann immer reell und so beschaffen, dass $\alpha > \beta$ ist. Die Integration in Beziehung auf ϑ liefert nun, wenn noch $\sin\omega = u$ gesetzt wird,

$$14) \quad S = \frac{\pi}{\sqrt{AB}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}.$$

$$u_0 = \sin\omega_0, \quad u_1 = \sin\omega_1.$$

Hierin liegen folgende zwei Sätze: „jede von zwei Curven isokliner Normalen begrenzte Zone einer centrischen Fläche zweiter Ordnung ist mittelst elliptischer Integrale erster und zweiter Art quadrirbar“ und ferner: „zu jeder solchen Zone lässt sich eine zweite construiren, deren Oberfläche nur um einen algebraischen Ausdruck von der Fläche der ersten Zone differirt.“ Weitere Erörterungen hierüber sind unnöthig, weil der Verfasser dieselben Zonen schon früher untersucht hat (Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. Bd. VIII, S. 1), ohne jedoch die Eigenthümlichkeit der Begrenzungscurven zu bemerken.

Für diejenigen Flächen, deren Gleichungen von der Form sind

$$15) \qquad A x^{\frac{2}{3}} + B y^{\frac{2}{3}} + C z^{\frac{2}{3}} = 1$$

erhält man

$$\tan\vartheta = \frac{B}{A}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y = \frac{B^3}{A^3}\, x \cot^3\vartheta,$$

$$\cot^2\omega = \left(\frac{A^2}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{B^2}{y^{\frac{2}{3}}}\right) \frac{1 - A x^{\frac{2}{3}} - B y^{\frac{2}{3}}}{C^2}.$$

Die Einführung von ϑ statt y giebt

$$S = -3\, \frac{B^3}{A^3} \int\!\!\int \frac{x \cos^2\vartheta}{\sin\omega \sin^4\vartheta}\, dx\, d\vartheta.$$

Ferner ist, wenn man in der zwischen x, y, ω stattfindenden Gleichung y gleichfalls durch ϑ ausdrückt,

$$x^2 = \frac{A^6 \sin^6\vartheta}{(A^3 \sin^2\vartheta + B^3 \cos^2\vartheta + C^3 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cot^2\omega)^3},$$

und indem man dies substituirt, gelangt man zu der Formel

$$S = -9 \int\!\!\int \frac{A^3 B^3 C^3 \sin^4\vartheta \cos^4\vartheta \cos\omega\, d\vartheta\, d\omega}{(A^3 \sin^2\vartheta + B^3 \cos^2\vartheta + C^3 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cot^2\omega)^4 \sin^4\omega}.$$

Unter S verstehen wir im Folgenden den Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches auf dem zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen liegenden Flächenoctanten durch zwei Curven isokliner Normalen begrenzt wird, deren Neigungswinkel ω_0 und $\omega_1 < \omega_0$ sind; für positive A, B, C giebt die Fläche LP_0MP_1L (Taf. IV, Fig. 6) ein Bild jenes Stückes. Es ist dann ϑ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, gleichzeitig ω von ω_0 und bis ω_1 auszudehnen, und bei umgekehrter Anordnung der Integrationen ergiebt sich

$$S = 9\int_{\omega_1}^{\omega_0}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{A^3 B^3 C^3 \sin^4\omega \cos\omega \sin^4\vartheta \cos^4\vartheta\, d\omega\, d\vartheta}{[(A^3 \sin^2\vartheta + B^3 \cos^2\vartheta)\sin^2\omega + C^3 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\omega]^4}$$

oder wenn

$$\sin\omega = s, \quad \tan\vartheta = t$$

und dem entsprechend $\sin\omega_0 = s_0$, $\sin\omega_1 = s_1$ gesetzt wird,

$$S = 9\int_{s_1}^{s_0} s^4\, ds \int_0^{\infty}\frac{A^3 B^3 C^3 t^4 (1+t^2)^3\, dt}{[B^3 s^2 + \{C^3 + (A^3 + B^3 - C^3)s^2\}t^2 + A^3 s^2 t^4]^4}.$$

Nach den gewöhnlichen Methoden verursacht die Ausführung der auf t bezüglichen Integration einen ziemlich bedeutenden Rechnungsaufwand; glücklicherweise lässt sich derselbe mittelst zweier Formeln vermeiden, die ich bereits 1843 entwickelt habe (Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale) und die man auch im zweiten Bande meines Compendiums der höheren Analysis (2. Aufl. S. 276 und 277) findet. Wird nämlich zur Abkürzung

$$\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\ldots n\,(n-1)\ldots(n-r)}{2.4.6\ldots\ldots(2r)} = K_r,$$

$$\beta + 2\sqrt{\alpha\gamma} = \delta$$

gesetzt, so ist für beliebige positive p und ganze positive n

$$\sqrt{\frac{\alpha^n}{\gamma^{n-1}}}\int_0^{\infty}\frac{\zeta^{p-n}\,d\zeta}{(\alpha+\beta\zeta+\gamma\zeta^2)^{p+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\gamma^n}{\alpha^{n-1}}}\int_0^{\infty}\frac{\zeta^{p+n-1}\,d\zeta}{(\alpha+\beta\zeta+\gamma\zeta^2)^{p+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}\left\{\frac{\Gamma(p)}{\delta^p} + \frac{K_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(p-1)}{\delta^{p-1}} + \frac{K_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\cdot\frac{\Gamma(p-2)}{\delta^{p-2}} + \ldots\right\}.$$

Mittelst der Substitutionen $\zeta = t^2$, $p = q - \frac{1}{2}$ entspringen hieraus die beiden Formeln

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{2q-2n}\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^q}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(q)}\left\{\frac{\Gamma(q-\frac{1}{2})}{\delta^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{n(n-1)}{4\sqrt{\alpha\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(q-\frac{3}{2})}{\delta^{q-\frac{3}{2}}} + \ldots\right\}\sqrt{\frac{\gamma^{n-1}}{\alpha^n}},$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2q+2n-2}dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^q}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(q)}\left\{\frac{\Gamma(q-\frac{1}{2})}{\delta^{q-\frac{1}{2}}}+\frac{n(n-1)}{4\sqrt{\alpha\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(q-\frac{3}{2})}{\delta^{q-\frac{3}{2}}}+\ldots\right\}\sqrt{\frac{\alpha^{n-1}}{\gamma^n}};$$

diese liefern folgende vier Integralwerthe

$$\int_0^\infty \frac{t^4\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^4}=\frac{\pi}{32}\left\{\frac{5\sqrt{\gamma}}{\alpha\sqrt{\delta^7}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^3\delta^5}}\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{t^6\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^4}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5}{\sqrt{\alpha\delta^7}},$$

$$\int_0^\infty \frac{t^8\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^4}=\frac{\pi}{32}\cdot\frac{5}{\sqrt{\gamma\delta^7}},$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{10}\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^4}=\frac{\pi}{32}\left\{\frac{5\sqrt{\alpha}}{\gamma\sqrt{\delta^7}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma^3\delta^5}}\right\},$$

und hiernach ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{t^4(1+t^2)^3\,dt}{(\alpha+\beta t^2+\gamma t^4)^4}$$

$$=\frac{5\pi}{32}\left(\sqrt[6]{\frac{\gamma}{\alpha^2}}+\sqrt[6]{\frac{\alpha}{\gamma^2}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{\delta^7}}+\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma^3}}\right)\frac{1}{\sqrt{\delta^5}}.$$

Benutzt man diese Formel für

$$\alpha=B^3s^2,\quad \beta=C^3+(A^3+B^3-C^3)s^2,\quad \gamma=A^3s^2,$$
$$\delta=C^3+[(\sqrt{A^3}+\sqrt{B^3})^2-C^3]\,s^2$$

und setzt zur Abkürzung

$$16)\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda=(\sqrt{A^3}+\sqrt{B^3})^2-C^3,\\ M=(\sqrt{A^3}+\sqrt{B^3})^2\sqrt{A^3B^3},\quad N=\sqrt{A^9}+\sqrt{B^9},\end{array}\right.$$

so erhält man für S folgenden Werth

$$S=\frac{9\pi C^3}{32\sqrt{A^3B^3}}\int_{s_1}^{s_0}\left\{\frac{5Ms^3}{\sqrt{(C^3+\lambda s^2)^7}}+\frac{Ns}{\sqrt{(C^3+\lambda s^2)^5}}\right\}ds.$$

Die Ausführung der noch übrigen Integration ist sehr leicht und liefert, wenn

$$17)\quad\left\{\begin{array}{l}\sqrt{C^3+\lambda s_0^2}=\sqrt{C^3+\lambda\sin^2\omega}=\mu_0,\\ \sqrt{C^3+\lambda s_1^2}=\sqrt{C^3+\lambda\sin^2\omega_1}=\mu_1,\end{array}\right.$$

gesetzt wird, folgendes Endresultat

$$18)\quad S=\frac{3\pi C^3}{32\lambda^2\sqrt{A^3B^3}}\left\{(5M+\lambda N)\left(\frac{1}{\mu_1^3}-\frac{1}{\mu_0^3}\right)-3\cdot C^3M\left(\frac{1}{\mu_1^5}-\frac{1}{\mu_0^5}\right)\right\}.$$

Bei der untersuchten Fläche ist demnach ein von zwei Curven isokliner Normalen begrenzter Streifen algebraisch quadrirbar.

Im Falle positiver A, B, C ersetzen wir die Gleichung 15) durch folgende

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ihr entspricht eine geschlossene Fläche, deren Octant Ω aus No. 18) für $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$ und $\omega_1 = 0$ erhalten wird. Da Ω zunächst unter einer etwas complicirten und unsymmetrischen Form erscheint, so dürften ein paar Worte über die Reduction dieses Ausdrucks nicht überflüssig sein. Setzt man für den Augenblick

$$\frac{1}{a} = \alpha, \; \frac{1}{b} = \beta, \; \frac{1}{c} = \gamma, \quad \alpha + \beta = \varepsilon,$$

so ist

$$A^3 = \alpha^2, \quad B^3 = \beta^2, \quad C^3 = \gamma^2,$$

ferner nach No. 16 und 17)

$$\lambda = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \varepsilon^2 - \gamma^2,$$
$$M = (\alpha + \beta)^3 \alpha \beta = \varepsilon^3 \alpha \beta,$$
$$N = \alpha^3 + \beta^3 = \varepsilon (\varepsilon^2 - 3 \alpha \beta),$$
$$\mu_0 = \varepsilon, \quad \mu_1 = \gamma,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\Omega = \frac{3\pi \gamma^2 \varepsilon}{32 \alpha \beta \lambda^2} \left\{ [\varepsilon^4 + (2\alpha\beta - \gamma^2)\, \varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2] \left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\varepsilon^3}\right) \right.$$
$$\left. - 3\alpha\beta\gamma^2 \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\gamma^5} - \frac{1}{\varepsilon^5}\right) \right\}$$

oder, nach Potenzen von ε geordnet,

$$\Omega = \frac{3\pi}{32 \alpha\beta\gamma\lambda^2} \left\{ \varepsilon^5 - (\gamma^2 + \alpha\beta)\, \varepsilon^3 - \gamma^3 \varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2 \varepsilon + (\gamma^2 - 2\alpha\beta)\, \gamma^3 \right\}.$$

Das in Parenthesen stehende Polynom ist durch $(\varepsilon - \gamma)^2$ ohne Rest theilbar und daher

$$\Omega = \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{(\varepsilon - \gamma)^2 [\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\, \varepsilon + \gamma (\gamma^2 - 2\alpha\beta)]}{\alpha\beta\gamma\lambda^2},$$

oder wegen $\lambda = (\varepsilon + \lambda)(\varepsilon - \gamma)$

$$\Omega = \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\, \varepsilon + \gamma (\gamma^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma (\varepsilon + \gamma)^2},$$

und zufolge der Bedeutung von $\varepsilon = \alpha + \beta$

$$\Omega = \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 2 [\beta\gamma (\beta + \gamma) + \gamma\alpha (\gamma + \alpha) + \alpha\beta (\alpha + \beta) + \alpha\beta\gamma]}{\alpha\beta\gamma (\alpha + \beta + \gamma)},$$

woraus man schliesslich erhält

$$\Omega = \frac{3\pi}{32} \cdot \frac{b^3 c^3 + c^3 a^3 + a^3 b^3 + 2\, a b c\, [a^2 (b + c) + b^2 (c + a) + c^2 (a + b) + a b c]}{(bc + ca + ab)^2}.$$

Im speciellen Falle $a=b=c$ wird Ω gleich $\frac{17}{48}$ von der Fläche des umschriebenen Kugeloctanten.

d. Unter den transcendenten Flächen sind es die folgenden, deren Complanation auf einfache Ausdrücke führt.

Für die logarithmische Fläche

$$z = \tfrac{1}{2} c\, l\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{19}$$

findet man

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \tan\vartheta, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\tan^2\omega,$$

$$S = a^2 b^2 c^2 \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\cos^3\omega} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)^2}, \tag{20}$$

wo beide Integrationen leicht genug auszuführen sind.

Nach Analogie der gewöhnlichen Schraubenfläche entspricht der Gleichung

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\tan\frac{z}{c} \tag{21}$$

eine Art elliptischer Schraubenfläche; für diese ist

$$y = -x\cot\vartheta, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{c^2\,(x^2+y^2)}{a^2 b^2}\tan^2\omega$$

und hieraus folgt für S genau derselbe Werth wie vorhin.

Die Fläche, deren Gleichung ist

$$z = c\, l\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}\right), \tag{22}$$

könnte man als elliptisches Kettenkonoid bezeichnen, weil sie für $c=b=a$ in die bekannte Fläche übergeht, welche durch Drehung einer Kettenlinie um ihre Basis entsteht; man erhält

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \tan\vartheta,$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) = c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\tan^2\omega,$$

und für S findet man wieder denselben Werth, wie in No. 20).

XXI.

Ein Beitrag zur Ermittelung des Luftwiderstandgesetzes.

Von

J. C. F. Otto,
Königl. preussischer Generalmajor.

---

1. Im Jahre 1839 hatten in Preussen Versuche stattgefunden, welche zur Erweiterung der Kenntniss des Luftwiderstandgesetzes dienen sollten. Man hatte mit Geschossen von 8,48 Zoll Durchmesser und 60 Pfund 3 Loth altes Gewicht und zwar mit einer Ladung von 5 Pfund altes Gewicht auf 15 verschiedene Entfernungen bis zu 1382,47 Schritt geschossen. Die dazu nöthigen Erhöhungen der Seelenaxe überstiegen nicht 4 Grad, die bezüglichen Bahnen waren also sämmtlich sehr flach und die krummen Längen derselben nicht erheblich von den horizontalen Entfernungen der bezüglichen mittleren Treffpunkte verschieden.

Für jede der 15 verschiedenen Schussweiten hatte man die mittlere Flugzeit in je 30 Beobachtungen aus freier Hand ermittelt.

Dieses System von Flugzeiten, zusammengestellt mit den correspondirenden Schussweiten, bildeten das erforderliche Rechnungsmaterial.

2. Man fand sich jedoch durch dieses Material nicht befriedigt. Die beobachteten Schussweiten unterlagen zwar weiter keinem Zweifel; für die beobachteten Flugzeiten dagegen traten erhebliche Bedenken hervor, welche in der Unsicherheit der Zeitbeobachtungen aus freier Hand ihren Grund hatten.

Man bemühte sich seitdem, eine sehr sorgfältig zu arbeitende Uhr und einen elektromagnetischen Apparat zu construiren, welcher geeignet wäre, durch die Wirkung des Geschosses selbst den Zeitpunkt des Austrittes des letzteren aus der Geschossmündung und demnächst denjenigen Zeitpunkt, wo das Ziel vom Geschoss erreicht wurde, selbstregistrirend auf der vorerwähnten Uhr bemerklich zu machen und somit die beabsichtigte Beobachtung der Flugzeit in zuverlässigerer Weise zu bewirken.

Die bezüglichen Versuche fanden in den Jahren 1844 und 1845 statt.

3. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, die vorerwähnten Bedenken gegen die Beobachtungen des Jahres 1839 ausführlich darzulegen, demnächst die Resultate von den umständlicheren Versuchen der Jahre 1844 bis 1845 näher anzugeben und schliesslich die Dresdener Versuche von 1861 bis 1862 näher zu beleuchten.

4. Wir betrachten zunächst die Versuche des Jahres 1839. Die Einzelheiten derselben sind in dem 33. Bande S. 85 und in dem 38. Bande des Archivs für Offiziere des preussischen Artillerie- und Ingenieurcorps Seite 71 speciell angegeben. Wir führen dieselben hier noch einmal an, für den Fall, dass dem Leser die genannten Bände nicht zur Hand sein sollten. Es bezeichnet x die horizontale Schussweite in Schritten, von denen je 5 auf eine rheinische Ruthe gehen, t die entsprechenden Flugzeitbeobachlungen und zwar, wie sie sich für jeden von zwei Beobachtern ergeben, die mit A und B bezeichnet sein mögen, wie immer, in Sekunden:

	t		
x	A	B	Diff.
370,50	1,06	1,07	0,01
382,77	1,07	1,16	0,09
400,03	1,11	1,20	0,09
552,97	1,61	1,68	0,07
572,23	1,67	1,76	0,09
613,73	1,85	1,94	0,09
731,60	2,20	2,35	0,15
763,33	2,32	2,47	0,15
822,90	2,54	2,68	0,14
885,63	2,76	2,91	0,15
940,77	2,97	3,05	0,08
1051,87	3,39	3,46	0,07
1057,90	3,39	3,46	0,07
1233,93	4,10	4,10	0,00
1382,47	4,68	4,70	0,02.

Jede dieser Zahlen ist das arithmetische Mittel aus je 30 einzelnen Beobachtungen.

Bei den Anordnungen für diesen Versuch war man von dem Gedanken ausgegangen, — dass die Zuverlässigkeit von Zeitbeobachtungen aus freier Hand ein zweifelhaftes Ding sei, — dass das Naturell des Beobachters und sein Temperament, sowie der Grad der Uebung von merklichem Einfluss sein könne — und dass es daher von Nutzen sein müsse, hierin directe Erfahrungen zu machen. Aus diesem Grunde hatte man zwei verschiedene Beobachter angestellt, welche gleichzeitig die Flugzeiten zu beobachten hatten und welche, bei gleich grossem Interesse für den Gegenstand selbst, dennoch ihrerseits in ihrer Individualität merklich verchieden waren. Der

eine Beobachter, oben mit A bezeichnet, war von nervösem Temperament mit grosser geistiger Bereitschaft und hatte bereits mehrere Tausende von Flugzeiten beobachtet, war also sehr geübt. Der andere Beobachter B war von ruhigerem Temperament und hatte einen geringeren Grad von Uebung.

Die Folge hiervon war, dass sämmtliche Ziffernwerthe der beobachteten Flugzeiten von dem Beobachter B etwas grösser gefunden worden waren, als die des Beobachters A. Hierüber sprechen wir noch später.

5. Zunächst wurden die Beobachtungsergebnisse des geübteren Beobachters A der weiteren Bearbeitung unterzogen und an folgenden vier Luftwiderstandgesetzen geprüft.

Bezeichnet man nämlich mit

W den Luftwiderstand,

v die Fortschreitungsgeschwindigkeit,

α und β constante Zahlen, welche für jedes specielle Luftwiderstandgesetz in sich aus den Beobachtungen zu ermitteln sind, so zog man zur Untersuchung

a) Newtons (quadratisches) Luftwiderstandgesetz:

$$W = \alpha \cdot v^2;$$

b) das cubische Luftwiderstandgesetz:

$$W = \alpha \cdot v^3;$$

c) Piobert's Luftwiderstandgesetz:

$$W = \alpha \cdot v^3 + \beta \cdot v^2;$$

d) das vom Professor Schmidt zu Göttingen beliebte Luftwiderstandgesetz (s. Theorie des Widerstandes der Luft bei der Bewegung der Körper. Göttingen 1831):

$$W = \beta \cdot \frac{e^q - 1 - q}{q},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen,

$$q = \frac{v^2}{2\alpha},$$

α und β aber näher zu ermittelnde Constanten sind.

Für jedes einzelne dieser Luftwiderstandgesetze berechnete man aus den Flugzeiten des Beobachters A und aus den zugehörigen Schussweiten mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die besten Ziffernwerthe für die zugehörigen constanten Symbole α, respective β und für die Anfangsgeschwindigkeit c. Letztere ergab sich

für	das	Newton'sche	Gesetz	zu	379,15 Schritt
„	„	Piobert'sche	„	„	381,59 „
„	„	cubische	„	„	382,87 „
„	„	Schmidt'sche	„	„	383,95 „

Diese Ziffernwerthe waren gar nicht so sehr von einander verschieden, als man es vielleicht erwartet hätte.

Der eingeschlagene Weg war ganz und gar empyrischer Natur. Man hatte vier verschiedene Luftwiderstandgesetze hypothetisch versuchsweise eingeführt, um auszumitteln, welches von ihnen im Stande sein würde, bei seiner Benutzung die thatsächlich beobachteten Ziffern am besten wiederzugeben, wenn man die den verschiedenen Entfernungen entsprechenden Flugzeiten aus den durch die bisherige Rechnung gefundenen Ziffernwerthen der Constanten α, β und der Anfangsgeschwindigkeit c berechnete.

Natürlich durfte man nicht erwarten, dass die nachträglich berechneten Ziffernwerthe der Flugzeiten mit den beobachteten genau übereinstimmten. Man musste auf Differenzen gefasst sein und diese liessen sich leicht in bestimmten Ziffernwerthen angeben. Hat man aber ein solches System von thatsächlich beobachteten und von den zugehörigen berechneten Zahlen, so giebt die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Mittel an die Hand, aus den entsprechenden Differenzen den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen der beobachteten Zahlen zu finden. Man versteht darunter bekanntlich einen Ziffernwerth, in Bezug auf welchen zwei Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit wetten können, der eine, dass der vorausgesetzte wahre Fehler in der Beobachtung nicht grösser, der andere, dass er nicht kleiner sein könne, als der oben bezeichnete. Dieser Begriff, auf die verschiedenen zum Grunde gelegten Hypothesen angewandt, giebt augenscheinlich ein eben so verständliches als überzeugendes Merkmal ab, wenn man die relative Güte der Hypothesen prüfen und angeben will. Die Grösse dieses wahrscheinlichen Fehlers der einzelnen Mittelzahlen wird genau der umgekehrte Maasstab ihrer Güte sein. Dieser wahrscheinliche Fehler wurde gefunden für das

Schmidt'sche	Gesetz	zu	0,01477	Sekunden
Newton'sche	„	„	0,01402	„
Piobert'sche	„	„	0,01346	„
cubische	„	„	0,01088	„

so dass mithin hiernach das Schmidt'sche Gesetz das unvortheilhafteste, das Cubische dagegen das beste sein würde, das Newton'sche aber merklich zurückbliebe.

6. Wenn man von dem Gesetz des Professor Schmidt aus dem angegebenen Grunde ganz abstrahirt, so bleiben noch die drei: das Newton'sche (quadratische), das cubische und das durch seine Mischform zwischen beiden liegende Piobert'sche übrig.

Das Piobert'sche Gesetz ist bei der französischen Artillerie ausschliesslich adoptirt worden und ist auch bei denjenigen Artillerien beliebt, welche den französischen Fusstapfen folgen. Allein ich habe im 33. Bande des vorgenannten Archivs ausführlich nachgewiesen, dass es wenig Vorzüge vor dem Newton'schen hat, und es zeigt sich hier, dass das rein cubische Gesetz noch um Vieles besser sich den beobachteten Thatsachen anschliesst, als das Piobert'sche. Will man daher von dem Newton'schen

Gesetz entschieden abgehen, was aber, wie später erörtert werden wird, ganz und gar nicht absolut nothwendig ist, so würde man immer noch um Vieles besser thun, das rein cubische Gesetz statt des Piobert'schen gemischten anzunehmen. Dieser Punkt wird später noch weiter erörtert werden.

7. Es fragt sich nun zunächst, was mit den Angaben des Beobachters *B* anzufangen ist, und in dieser Beziehung kann es von Nutzen sein, über den Hergang beim Beobachten folgende Erläuterung zu geben.

Beide Beobachter, *A* und *B*, jeder mit seiner Uhr, standen in mässiger Entfernung von einander und ohne im Mindesten mit einander zu verkehren, neben der Schusslinie und in hinreichender Entfernung von derselben, in der Höhe desjenigen Punktes, wo der erste Aufschlag des Geschosses zu erwarten war. Sie hatten eine solche Stellung, dass sie bequem das Aufblitzen der Ladung am Geschütz und, ohne den Kopf erheblich wenden zu müssen, demnächst das Aufschlagen des Geschosses auf dem Erdboden sehen konnten. Kurz vor dem Augenblicke, wo am Geschütz: Feuer! commandirt werden sollte, wurde daselbst zur Benachrichtigung für die am Ziel befindlichen Beobachter eine Flagge aufgerichtet. Auf dieses Zeichen hin erfolgte auf der Station der Beobachter das Commando: Achtung! als Mahnung, dass Niemand von der Umgebung ein Wort sprechen oder irgend eine Bewegung machen dürfe, wodurch die Aufmerksamkeit der Beobachter hätte abgelenkt werden können. Diese, welche schon vorher den Stand ihrer Uhren notirt hatten, spannten nunmehr ihre ganze Aufmerksamkeit an, um beim Aufblitzen der Geschützladung ihre Uhren in Gang zu setzen, sodann schnell das Gesicht der muthmasslichen Gegend des Aufschlagens zuzuwenden und die Uhr in demselben Augenblicke anzuhalten, wo sie den Aufschlag bemerkten.

Man hielt es von vorn herein keineswegs für eine ausgemachte Sache, dass der absolute Zeitmoment der beobachteten Erscheinung und derjenige Zeitpunkt, wo die Uhr in Bewegung gesetzt, respective arretirt wird, ganz genau derselbe sei. Ehe die sinnliche Wahrnehmung des äusseren Auges ins Bewusstsein tritt und ehe der bezügliche Willensact vom Gehirn durch den Arm in die Fingerspitze gelangt, vergeht nach aller Wahrscheinlichkeit eine gewisse Zeit. Wenn diese Zeit auch sehr kurz ist, so kann sie möglicherweise doch einen Ziffernwerth haben, der im Vergleich zu der zu messenden Zeitdauer für erheblich zu erachten ist, und dann ist das Beobachtungsresultat um diesen Betrag fehlerhaft. Wären beide zu machende sinnliche Wahrnehmungen — die Beobachtung des Aufblitzens der Ladung einerseits und die Beobachtung des Aufschlags des Geschosses auf dem Erdboden andererseits — ganz gleich leicht zu machen, so liesse sich annehmen, dass der Zeitbetrag, um welche die Uhr anfangs zu spät in Bewegung gesetzt wird, gleich wäre demjenigen, um welchen sie zu spät angehalten wird, und dass also im Durchschnitt die Fehler sich gegensei-

tig aufheben. Letzeres kann aber nicht ohne Weiteres zugegeben werden. Das Aufblitzen des Pulvers erfolgt in einer bestimmten, schon vorher genau erkennbaren Gegend, auf welche das Auge schon hingerichtet ist. Der Ort des Aufschlags der Kugel dagegen ist besonders auf den weiteren Entfernungen ziemlich veränderlich. Das Auge findet ihn schwerer auf. Es ist mithin im Allgemeinen anzunehmen, dass die geistige Bereitschaft für die Wahrnehmung vom Aufblitzen des Pulvers grösser ist, als die für die Wahrnehmung des Aufschlagens der Kugel, — dass also der Fehler beim Arretiren der Uhr etwas grösser ist, als der beim Ingangsetzen — dass mithin die beobachteten Zeiten eher etwas zu gross als zu klein ausfallen — und dass der im Ganzen begangene Fehler um desto grösser wird, je geringer, sei es in Folge des Temperaments, sei es wegen geringerer Uebung, der Grad der geistigen Bereitschaft des Beobachters ist.

8. In Erwägung dieser Auffassung und um zu sehen, in wie weit sie sich geltend machen würde, hatte man zwei Beobachter mit der oben angegebenen psychischen Verschiedenheit angestellt. Betrachtet man die in No. 4 dieser Abhandlung aufgeführten Ziffernwerthe für die beobachteten Flugzeiten und namentlich ihre Differenzen etwas näher, so sieht man

a) dass alle Ziffernangaben des Beobachters *B* grösser sind, als die des Beobachters *A*;

b) dass (abgesehen von einigen durchaus unbefremdlichen Schwankungen) der Mehrbetrag des Beobachters *B* über die Angaben des Beobachters *A* anfangs allmälig zu-, dann aber eben so allmälig wieder abnimmt;

c) dass auf der kürzesten und auf der weitesten Entfernung die Angaben beider Beobachter zwar nahe übereinstimmen, dass jedoch für den Beobachter *B* immer noch ein kleiner Ueberschuss von 0,01 Sekunde auf der kürzesten und von 0,02 Sekunde auf der grössten Entfernung verbleibt.

Alles dies lässt sich, wenn man die voraufgeführte Ansicht gelten lassen will, hinreichend erklären. Auf der kürzesten Entfernung, wo die Geschosse nahe zusammenfallen, ist die Beobachtung beim Aufschlage der Kugel nicht viel schwerer, als die Beobachtung des Pulverdampfs. Ueberdem bringt der Beobachter für diese kurzen Flugzeiten unwillkürlich eine grössere Spannung mit. Der Fehler beim Arretiren der Uhr fällt daher nahe so aus, wie beim Loslassen derselben. Die Verschiedenheit in der geistigen Bereitschaft der Beobachter ist in diesem Falle gering und die Beobachtung wird ziemlich richtig. Auf den weitesten Entfernungen hat der Beobachter, nachdem er die Uhr losgelassen hat und während das Geschoss seine Bahn durchläuft, einen Augenblick Zeit, sich zu sammeln, zum Bewusstsein der neuen Situation zu kommen, und sich von neuem für die Beobachtung des Aufschlags der Kugel in hinreichend gespannte geistige Bereitschaft zu versetzen, und dadurch auch hier den Fehler beim Anhalten

der Uhr mit demjenigen beim Loslassen derselben in Uebereinstimmung zu bringen. Auf den mittleren Entfernungen aber, wo die Streuung der Geschosse bereits grösser wird und wo die Spannung unwillkürlich bereits nachlässt, ohne dass die Zeit lang genug wäre, um hinreichendes Bewusstsein für eine neue willkührliche geistige Bereitschaft zu gewinnen, muss ein Ueberschuss des Fehlers entstehen, der dann nach den Extremen hin wieder abnimmt, nach Maassgabe, wie die eine oder die andere Ursache sich mehr und mehr geltend macht.

9. Als Resultat ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Angaben des Beobachters *B* denen des Beobachters *A* an Werth bedeutend nachstehen. Als man der Vollständigkeit der Untersuchung halber die Ziffernangaben des Beobachters *B* derselben Behandlung unterwarf, wie die des Beobachters *A*, ergab sich, dass die wahrscheinlichen Fehler der in No. 4 unter *B* aufgeführten Ziffernangaben um mehr als doppelt so gross waren, wie die oben in No. 5 am Ende aufgeführten für den Beobachter *A*. Es schien also gerechtfertigt, von denselben ganz abzusehen und sich bloss an die Angaben des Beobachters *A*, als die wahrscheinlich besseren zu halten.

Oben in No. 5 ist bereits erörtert worden, dass von den vier zur Prüfung gekommenen Luftwiderstandgesetzen das Schmidt'sche sich als das unvortheilhafteste ergab, dass darauf zuerst das Newton'sche und dann das Piobert'sche folgte, dass aber das rein cubische sich als das entschieden beste und namentlich als dem Piobert'schen gemischten erheblich überlegen erwies.

10. Gleich nach Beendigung dieses Versuchs und der Bearbeitung seiner Ergebnisse, etwa im Jahre 1840, tauchte in Preussen die Idee auf, bei der Beobachtung der Flugzeiten electromagnetische Apparate zu benutzen. Wie sich später ergeben hat, war bald darauf auch in Russland derselbe Gedanke von dem gegenwärtigen General Konstantinoff aufgefasst und mit Nachdruck verfolgt worden.

Das Wesentliche der bezüglichen Einrichtung besteht bekanntlich darin, dass mit Hilfe eines electromagnetischen Apparats, der mittelst der erforderlichen Drathleitungen einerseits einen etwas vor der Geschützmündung liegenden Punkt, andrerseits das zu treffende Ziel mit einer sehr sorgfältig gearbeiteten geeigneten Uhr in Verbindung setzt, der Zeitpunkt sowohl für den Austritt des Geschosses aus dem Geschützrohr, als auch der Zeitpunkt für das Treffen des Ziels derart festgestellt werden, dass das zwischen diesen beiden Zeitpunkten inneliegende Zeitintervall die Flugzeit des Geschosses für einen Weg von genau bekannter Länge ergiebt.

Die Schwierigkeiten, welche dieser damals noch ganz neue Gegenstand darbot, der neben der entsprechenden Handhabung des Electromagnetismus auch in der Construction eines angemessenen Uhrmechanismus Aufgaben stellte, mit denen man sich bis dahin noch niemals beschäftigt hatte, verzögerten den Fortgang dieser Angelegenheit bis zum Jahre 1844, in welchem,

so wie in dem darauf folgenden Jahre 1845 die Versuche endlich zur Ausführung gelangten.

11. Man benutzte zu diesem Versuch einen glatten Sechspfünder, aus welchem man Kugeln von 6,00647 Pfund Gewicht mit 2 Pfund Pulverladung schoss, alles in altem Gewicht. Der mittlere Durchmesser der Kugeln betrug 3,46 Zoll.

Folgendes waren die Ergebnisse:

Länge des horizontal durchlaufenen Weges.		Mittlere Flugzeit.	Mittler Fehler der einzelnen Beobachtung.	Mittler Fehler der Mittelzahlen.	Anzahl der Schüsse.
Schritt	Fuss	Sekunden			
50	120	0,08641	0,02075	0,00655	10
200	480	0,36795	0,02615	0,00827	10
250	600	0,47675	0,03743	0,01184	10
300	720	0,58300	0,02686	0,00849	10
400	960	0,79591	0 02949	0,00932	10
450	1080	0,92144	0,03949	0,01249	10
500	1200	1,03712	0,04592	0,01452	10

Unter dem „mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung" ist die Zahl verstanden, welche entsteht, wenn man für jede Entfernung in sich die Differenz zwischen jeder einzelnen Beobachtung und dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen für diese Entfernung bildet, alle diese Differenzen als positiv betrachtet addirt und dann aus ihnen das arithmetische Mittel nimmt.

Dividirt man die so erhaltene Zahl durch die Quadratwurzel aus der Anzahl aller betreffenden Beobachtungen, hier also durch $\sqrt{10}$, so erhält man den „mittleren Fehler der Mittelzahlen."

12. Man denke sich nun folgende Bezeichnungen eingeführt:

M das Gewicht des Geschosses = 6,0065 Pfund,
g die Beschleunigung der Schwere = 31,265 Fuss,
s der vom Geschoss durchlaufene Weg,
t die Flugzeit,
c die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses,
v die Geschwindigkeit des Geschosses in irgend einem Punkte seiner Bahn,
e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen,
W der Luftwiderstand in irgend einem Punkte der Bahn,
A, B, C, D, E constante Zahlen, welche vorläufig noch unbestimmt und deren Ziffernwerthe für jedes der bezüglichen Luftwider-

standgesetze aus den gegebenen Beobachtungen auszumitteln sind,

r eine Constante, speciell für das Piobert'sche Luftwiderstandgesetz bestimmt, welche den Werth $r = 435$ Meter hat, so dass für preussische Schritte zu setzen ist:

$$\frac{1}{r} = 0{,}001\,7316.$$

Dies vorausgesetzt, so sind folgende Formen des Luftwiderstandgesetzes zum Vergleich gezogen und an dem oben angegebenen Erfahrungsmaterial geprüft worden:

I. $$W = Av;$$

II. $$W = Av^2 \text{ (Newton)};$$

III. $$W = Av^2\left(1 + \frac{1}{r}v\right) \text{ (Piobert)};$$

IV. $$W = Av^3;$$

V. $$W = (Dv^6 + Ev^5)^{\frac{1}{2}};$$

VI. $$W = Av^4.$$

Die Ansatzgleichungen für die Relation zwischen Flugzeit und durchlaufenem Weg sind dann bekanntlich:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{W}{M}\cdot g \text{ und } \frac{ds}{dt} = v$$

und hieraus ergiebt sich durch angemessene Substitution und demnächstige zweimalige Integration für

$$\frac{Ag}{M} = \lambda$$

I. $$t = -\frac{1}{\lambda}\log nat\left(1 - \frac{\lambda}{c}s\right),$$

II. $$t = \frac{1}{c\lambda}(e^{\lambda s} - 1),$$

III. $$t = \frac{1}{c\lambda}\left(1 + \frac{c}{r}\right)(e^{\lambda s} - 1) - \frac{s}{r},$$

IV. $$t = \frac{1}{c}s + \frac{1}{2}\lambda s^2,$$

V. $$t = \frac{1}{c}s + Bs^2 + Cs^3,$$

$$D = \frac{M^2}{g^2}\left(4B^2 - 12\frac{C}{c}\right), \quad E = \frac{12CM^2}{g^2},$$

VI. $$t = \frac{(1 + 2\lambda c^3 s)^{\frac{3}{2}} - 1}{3\lambda c^3}.$$

13. Ermittelt man nun mittelst der Methode der kleinsten Quadrate für jedes der vorbezeichneten verschiedenen Luftwiderstandgesetze diejenigen Ziffernwerthe der bezüglichen Constanten, welche den in der laufenden

No. 11 angegebenen Erfahrungsresultaten am Besten entsprechen, so ist zunächst (alle Längenmaasse in Fussen gedacht)

$$\log \frac{g}{M} = 0{,}71643$$

und sodann für

Hypothese I.

$$\log A = 0{,}81214 - 2$$
$$\log \lambda = 0{,}52857 - 1$$
$$c = 1370{,}6 \text{ Fuss.}$$

Hypothese II (Newton).

$$\log A = 0{,}74811 - 5$$
$$\log \lambda = 0{,}46454 - 4$$
$$c = 1383{,}7 \text{ Fuss.}$$

Hypothese III (Piobert).

$$\log A = 0{,}86335 - 5$$
$$\log \lambda = 0{,}57978 - 4$$
$$c = 1390{,}5 \text{ Fuss.}$$

Hypothese IV.

$$\log A = 0{,}68274 - 8$$
$$\log \lambda = 0{,}39917 - 7$$
$$c = 1399{,}7 \text{ Fuss.}$$

Hypothese V.

$$\log B = 0{,}16285 - 7$$
$$\log C = 0{,}06272 - 11$$
$$c = 1415{,}5 \text{ Fuss.}$$

Hypothese VI.

$$\log A = 0{,}61592 - 11$$
$$\log \lambda = 0{,}33235 - 10$$
$$c = 1418{,}8 \text{ Fuss.}$$

14. Berechnet man nun für jede einzelne der sechs Hypothesen für die in No. 11 angegebenen 7 Schussweiten (in Fussen ausgedrückt) mittelst der in No. 13 angegebenen Ziffernwerthe der Constanten und mittelst der in No. 12 angegebenen Formeln die zugehörigen Flugzeiten, so bekommt man für jede der sechs Hypothesen 7 berechnete Flugzeiten. Für jede derselben suche man die Differenz zwischen ihr selbst und der correspondirenden beobachteten Flugzeit und bezeichne diese Differenz mit dem Zeichen ε. Jede dieser sieben Ziffern erhebe man ins Quadrat und addire die so entstehenden Zahlen. Die so entstandene Summe nennt man bekanntlich „die Summe der Fehlerquadrate", man bezeichne sie durch $[\varepsilon\varepsilon]$. Man findet durch eine solche Rechnung für die

Hypothese I. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,95897$,

„ II. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,87219$ (Newton),

Hypothese III. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,84026$ (Piobert),
„ IV. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,81755$ (cubisch),
„ V. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,80076$,
„ VI. $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}0000\,79576$ (biquadratisch).

Der Sinn der Methode der kleinsten Quadrate ist bekanntlich der, für eine gegebene mathematische Form eines Naturgesetzes diejenigen Ziffernwerthe der in letzterem vorkommenden und vorläufig noch unbestimmt gelassenen constanten Symbole durch Rechnung zu finden, welche einer durch praktische Beobachtungen gegebenen Reihe von Versuchsresultaten am Besten entsprechen. Letzteres findet, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung nachweist, statt, wenn die Summe der ins Quadrat erhobenen Differenzen zwischen den beobachteten Zahlen und den mittelst jener constanten Symbole berechneten Zahlen die kleinstmöglichste (ein Minimum) ist.

Es soll also die Summe der Fehlerquadrate, nämlich $[\varepsilon\varepsilon]$ ein Minimum sein.

Die in No. 13 aufgeführten Ziffernwerthe der verschiedenen constanten Symbole für die sechs angegebenen Luftwiderstandgesetze sind nun diejenigen, welche die correspondirenden kleinsten Summen der Fehlerquadrate ergeben und die Ziffernwerthe der letzteren selber sind hier oben unter der Bezeichnung $[\varepsilon\varepsilon]$ angegeben.

15. In demselben Sinne und mit demselben Rechte, wie man für eine bestimmt gegebene mathematische Form eines Naturgesetzes diejenigen Ziffernwerthe der constanten Symbole in demselben für die besten hält, welche die kleinstmöglichste Summe der Fehlerquadrate ergeben, in demselben Sinne kann man auch den Werth mehrerer mathematischer Ausdrücke für ein und dasselbe Naturgesetz mit einander vergleichen, indem man dabei die correspondirenden kleinsten Summen der Fehlerquadrate als Maassstab benutzt und zuletzt diejenige mathematische Form für die bessere erklärt, welcher die kleinere, respective die kleinste Summe der Fehlerquadrate entspricht.

Betrachtet man von diesem Standpunkte aus die in der vorigen Nummer angegebenen Ziffernwerthe von $[\varepsilon\varepsilon]$, so sieht man

1) wie in Uebereinstimmung mit dem in No. 4 aufgeführten Zahlenbeispiel und der No. 5 auch hier das Newton'sche Gesetz schlechter als das Piobert'sche und das Piobert'sche schlechter als das rein cubische Gesetz ist;
2) dass das Gesetz unter No. V wiederum besser als die vier vorhergehenden und das endlich dass biquadratische Gesetz der No. VI das beste von allen ist.

Der Werth der sechs versuchten Hypothesen steigt mit der römischen Bezeichnungsziffer.

16. Die in No. 14 angegebenen Ziffernwerthe von $[\varepsilon\varepsilon]$ können benutzt werden, um den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtungszahlen



in No. 11 zu finden. Man versteht hierunter bekanntlich eine Zahl, in Bezug auf welche zwei Personen von entgegengesetzter Meinung mit gleichem Grade von Wahrscheinlichkeit zu wetten berechtigt sind, der eine, dass der Fehler jeder einzelnen der zum Grunde gelegten (sieben) beobachteten mittleren Flugzeiten nicht grösser, der andere, dass er nicht kleiner sein könne, als jene Zahl, welche man „den wahrscheinlichen Fehler" nennt. Bezeichnet man mit m die Anzahl der zum Grunde gelegten Einzelzahlen (hier 7 Flugzeiten), und mit μ die Anzahl der im Problem vorkommenden Constanten, (hier 2), so ist der wahrscheinliche Fehler $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = 0{,}67450 \, . \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-\mu}} = 0{,}67450 \, . \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{5}}$$

und sodann für

Hypothese	I.	$\mathfrak{F} = 0{,}00295$,
„	II.	$\mathfrak{F} = 0{,}00282$,
„	III.	$\mathfrak{F} = 0{,}00277$,
„	IV.	$\mathfrak{F} = 0{,}00273$,
„	V.	$\mathfrak{F} = 0{,}00270$,
„	VI.	$\mathfrak{F} = 0{,}00269$,

Ziffernwerthe, welche begreiflicherweise sich eben so rangiren, wie die entsprechenden von $[\varepsilon\varepsilon]$.

17. Wenn man beachtet, dass aus dem in den Nummern 4 und 5 besprochenen Versuche genau dieselbe Rangirung der drei verschiedenen Luftwiderstandgesetze:

das Newton'sche,
das Piobert'sche,
das cubische,

hervorgeht, wie aus dem in den Nummern 13 bis 16 beschriebenen Versuch, so muss diese Uebereinstimmung grosse Beruhigung und Befriedigung gewähren. Die Art der Zeitbeobachtungen in beiden war total verschieden. In dem ersten Versuche fanden die Zeitbeobachtungen aus freier Hand statt, in dem zweiten durch selbstregistrirende Apparate. Dass in der Anordnung der von den geschicktesten Künstlern gefertigten Apparate, sowie in Betreff der Sorgsamkeit der Ausführung der Beobachtungen Alles aufgeboten war, was guter Wille und Sachkenntniss förderlich erscheinen liessen, braucht kaum versichert zu werden. Wenn nun trotz der angedeuteten Verschiedenheiten in beiden Fällen dieselbe Rangirung als Resultat hervortrat, so besteht augenscheinlich mindestens eine grosse Wahrscheinlichkeit, dass die angeführte Art der Rangirung in der Natur der Sache selbst begründet sei und es tritt mithin für künftige derartige Versuche die Nothwendigkeit hervor, bei der Heranziehung der verschiedenen Formen der zu prüfenden Luftwiderstandgesetze in eine eben so grosse Ausdehnung einzugehen. So viel kann man aber wohl schon jetzt mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass auch das Piobert'sche Gesetz der Wahrheit und Wirklich-

keit noch nicht nahe genug kommt, und dass in dieser Beziehung die Hypothesen IV, V und VI vorzuziehen sind.

Hierbei ist nun zunächst zu beachten, dass die Luftwiderstandgesetze mit einfachen Potenzen der Geschwindigkeit und ganzem Exponenten folgende Reihefolge ergeben:

			Differenz
I.	$W = Av$,	$\mathfrak{F} = 0{,}00295$,	0,00013,
II.	$W = Av^2$,	$\mathfrak{F} = 0{,}00282$,	0,00009,
IV.	$W = Av^3$,	$\mathfrak{F} = 0{,}00273$,	0,00004,
VI.	$W = Av^4$,	$\mathfrak{F} = 0{,}00269$.	

Bildet man hiervon eine graphische Darstellung, in welcher die Exponenten von v (1, 2, 3, 4) die Abscissen, die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{F}$ aber die Ordinaten bilden, so tritt mit grosser Augenscheinlichkeit hervor, dass das Gesetz Av^5 bereits wieder ein grösseres $\mathfrak{F}$, als $W = Av^4$ ergeben würde, und dass mithin der wahre Exponent für v, wenn man ein eingliedriges Gesetz annehmen will, eine Bruchzahl sein würde, die zwischen 4 und 5 liegt.

Da jedoch sowohl alle zweigliedrigen Luftwiderstandgesetze, als auch die eingliedrigen mit gebrochenen Exponenten höchst lästige Verwickelungen in den an sich schon so sehr voluminösen Rechnungen ergeben, so würden nur noch die Hypothesen IV und VI, nämlich $W = Av^3$ und $W = Av^4$ zur Wahl übrig bleiben. Beide sind nun, wie die Ziffernwerthe von $\mathfrak{F}$ zeigen, in ihrem Werth nur wenig verschieden, es bleibt daher das Gesetz $W = Av^3$ als das empfehlenswertheste übrig, insofern die von ihm abgeleiteten Formeln die einfacheren sind.

Ob diese Ansicht richtig ist, werden fernere noch zuverlässigere Versuche entscheiden können.

18. In Betreff der Zulässigkeit oder Unzulässigkeit des Gesetzes $W = Av^3$ ist noch folgendes anzuführen.

Es tritt mit immer grösserer Bestimmtheit hervor, dass bei allen Geschossen in Folge der Umdrehung (sei diese wälzend, wie bei excentrischen, oder bohrend, wie bei Spitzgeschossen der gezogenen Geschütze) eine hebende oder drückende Kraft wirksam wird, welche dem Geschoss ein Bestreben mittheilt, über oder respective unter die jedesmalige Bahntangente des betreffenden Punktes auszuweichen. Von der sogenannten Derivation wird hierbei abgesehen. Es ist Sache der Rechnung, das Gesetz für jenes Streben aufzufinden und dafür einen passenden mathematischen Ausdruck aufzustellen, welcher in der Anordnung der Rechnungen in angemessener Weise zu benutzen ist.

Welches nun immerhin die Form des Luftwiderstandgesetzes sein mag, welches man zu benutzen sich entschliesst, so sind dabei zwei verschiedene Wirkungen zu betrachten: die Verschiedenheiten in dem Fortschreiten in der Bahn nach der jedesmaligen Richtung der Bahntangente und die Verschiedenheiten in der Abweichung aus dieser Bahn nach Maassgabe, theils

der Schwere, theils der Umdrehung des Geschosses. Die Art und Weise, wie alle Ermittelungen des Luftwiderstandgesetzes vor sich gehen, läuft immer darauf hinaus, Bahnstrecken von bekannter Länge zum Grunde zu legen und die Ziffernwerthe derselben als Urvariabeln in das bezügliche Gesetz einzuführen. Dasjenige Luftwiderstandgesetz, zu dessen Benutzung man sich schliesslich entschliesst, wird immer schon der Art sein, dass es dem Fortschreiten in der Bahn nach der Richtung der jedesmaligen Bahntangente von selbst hinreichend entspricht und es kann dieser Punkt bei der ferneren Betrachtung ausser Acht bleiben.

Anders ist es mit den Verschiedenheiten in dem Ausweichen des Geschosses aus seiner jedesmaligen Richtung, insofern dies durch die Schwere bewirkt wird, und insofern die Verschiedenheiten des Luftwiderstandgesetzes Verschiedenheiten in der Intensität dieses Ausweichens bewirken können. Da aber ausser diesem eben besprochenen Ausweichen auch noch dasjenige zu berücksichtigen ist, welches durch die Umdrehung des Geschosses hervorgerufen wird, so kann man beide Wirkungen zusammenwerfen und bei der Ermittelung ihres Gesetzes aus praktischen Schiessversuchen von dem Umstande absehen, dass sie aus dem Zusammenwirken zweier an sich verschiedener Ursachen hervorgehen. In dem Ausdruck des Gesetzes, wie es sich unter diesen Umständen ergiebt, ist sodann der etwaige Einfluss des Luftwiderstandgesetzes auf die Ausweichung in der Richtung senkrecht auf die Bahntangente implicite bereits mit eingeschlossen.

Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass diese ganze Auseinandersetzung für jedes beliebige Luftwiderstandgesetz gilt, welches man für anwendbar erachtet.

19. Die Ermittelung des Luftwiderstandgesetzes ist in den beiden in dem Vorigen besprochenen Versuchen in ihrem experimentellen Theile auf die Beobachtung der Flugzeiten für gegebene Längen der Flugbahn begründet.

Es waren denselben auswärts mehrfach Fallversuche vorangegangen, bei welchen man für gemessene Fallhöhen die dazu gehörigen Flugzeiten aus freier Hand beobachtet hatte.

Herr Professor J. F. W. Gronau an der Realschule zu St. Johann zu Danzig hat die wichtigsten derselben in den Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig für das Jahr 1865 einer sehr eingehenden und interessanten Kritik unterworfen.

Die Resultate der desfallsigen Untersuchungen waren indessen für den hier vorliegenden Zweck nicht ausreichend, weil die grössten vorgekommenen Geschwindigkeiten der fallenden Körper weit hinter denen der Artilleriegeschosse zurückbleiben.

Eine noch erheblichere Schwierigkeit jedoch liegt in dem Umstande, dass auf die Grösse der beobachteten Flugzeiten der Grad der geistigen

Bereitschaft des Beobachters einen so grossen Einfluss hat, so dass dieses Element nicht allein je nach der Individualität des Beobachters, sondern auch je nach der augenblicklichen Stimmung des letzteren verschieden ist und dass kein Mittel vorhanden ist, diesen Einfluss in jedem einzelnen Falle scharf zu ermitteln und gehörig in Rechnung zu stellen.

Aus der laufenden No. 4, welche die gleichzeitigen Beobachtungen zweier verschiedener Personen von ungleichem Temperament, angestellt für ein und dieselbe Serie von Thatsachen, angiebt, geht hervor, dass die Unterschiede der beobachteten mittleren Flugzeiten von dem einen Beobachter gegen den andern bis auf den Betrag von 0,15 Sekunden stiegen. In den Fallversuchen von Dr. Benzenberg im Michaelisthurme zu Hamburg im Jahre 1802 hat letzterer den in Rede stehenden Fehler, welchen er „Fehler der Sinne" nennt, zu 3,67 Tertien = 0,0612 Sekunden gefunden. Reiche in seinen ähnlichen Versuchen in einem Bergwerksschacht zu Freiberg im Jahre 1832 giebt diesen Fehler zu 8,76 Tertien = 0,1460 Sekunden an. Der Schreiber dieser Zeilen hat im Jahre 1858 die Gelegenheit benutzt, für einen Beobachter von grosser Uebung und unbezweifelter Gewissenhaftigkeit diesen „Fehler der Sinne" zu ermitteln, indem er die Brennzeiten äusserst sorgfältig gearbeitete Brennzünder einerseits auf einem selbstregistrirenden chronometrischen Apparat, andererseits aber gleichzeitig durch Beobachtung aus freier Hand feststellen liess. In Mittelzahlen aus je 20 Beobachtungen ergaben sich dann für drei verschiedene Zünderlängen die Brennzeiten des selbstregistrirenden chronometrischen Apparates zu

1,0130 1,9985 3,0406 Sekunden,

die des Beobachters aus freier Hand zu

1,1100 2,1000 3,1250 Sekunden,

mithin Unterschied

0,0970 0,1015 0,0844 Sekunden,

als dasjenige, was vorhin mit dem Ausdruck „Fehler der Sinne" bezeichnet ist.

Hier zeigt sich nun, dass auch für einen und denselben Beobachter der Ziffernwerth dieses „Fehlers der Sinne" nicht unter allen Umständen derselbe bleibt.

20. Betrachtungen dieser Art waren es, welche zu dem in No. 10 besprochenen Entschluss führten, die beabsichtigte Beobachtung der Flugzeiten durch selbstregistrirende electromagnetisch - chronometrische Apparate zu bewirken.

Die Ergebnisse der bezüglichen Versuche sind in dem Vorhergehenden ausführlich besprochen.

Ganz abgesehen davon indessen, dass auch die Einrichtungen der letzteren Art ihren Bedenken in Bezug auf Zuverlässigkeit unterliegen, welche zu beseitigen ein Geschäft für sich ist, so ist durch den belgischen Major Navez seit dem Jahre 1851 eine Behandlungsweise dieses Gegen-

standes in Anregung und in Gang gebracht worden, welche eine ungemeine Förderung desselben in Aussicht stellt.

Statt nämlich, wie bei den zwei vorgenannten Methoden, für bestimmte Schussweiten die zugehörigen Flugzeiten zu messen, ermittelt Major Navez die am Endpunkt jeder Schussweite, oder, was dasselbe ist, in bestimmten Punkten der Flugbahn die zugehörige Geschwindigkeit des Geschosses. Er bewirkt dies, indem er das Geschoss durch zwei Drathgitter gehen lässt, welche in der Gegend des Ziels in kurzer Entfernung von einander aufgestellt, mit einem electromagnetischen Apparat in Verbindung stehen, welcher durch die Fallhöhe eines Pendels die Zeit ergiebt, in der der Raum zwischen den zwei Drathgittern von dem Geschoss durchlaufen wurde. Man nimmt hierbei an, dass die Geschwindigkeit des Geschosses auf seinem Wege zwischen den beiden Gittern ohne erheblichen Fehler für gleichförmig angesehen werden dürfe. Der Quotient aus dem Abstande der Gitter dividirt durch die beobachtete Zeit ist dann die gesuchte Geschwindigkeit.

Nun ist es jedoch mit der blossen Beobachtung der Flugzeit — sei dies, wie im ersten Halle, diejenige für die ganze Strecke bis zum Ziel, oder wie im andern Falle für eine nur sehr kurze Strecke in der Gegend des Ziels — noch nicht abgemacht, sondern es handelt sich dann noch darum, für jedes zur Prüfung gezogene Luftwiderstandgesetz die Ziffernwerthe derjenigen Constanten zur ermitteln, welche in dem, jenem Gesetz entsprechenden Ausdruck für die Relation zwischen Flugzeit und durchlaufenem Wege oder zwischen letzterem und der Endgeschwindigkeit vorkommen. Die Arbeit besteht dann darin,

> mittelst der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Ziffernwerthe der erwähnten Constanten aufzufinden, für welche die schliessliche Berechnung der Flugzeiten oder bezüglich der Geschwindigkeiten zu den gegebenen Schussweiten die kleinstmöglichste Summe der Fehlerquadrate zwischen Berechnung und Beobachtung ergiebt.

Diese Berechnung — angestellt für die Flugzeiten der ganzen Schussweiten — ist besonders für mehrgliedrige Luftwiderstandgesetze eine unerträglich mühsame, weil die Ausdrücke, welche den Zusammenhang zwischen der Flugzeit und der ganzen Schussweite angeben, nur durch eine zweimalige Integration der Ansatz-Gleichungen erhalten werden und oft eine lästige Verwickelung zeigen.

Unvergleichlich besser stellt sich diese Angelegenheit, wenn man die zweite Art der Beobachtungen, nämlich die durchlaufenen Räume und die zugehörigen, mittelst des Navez'schen Apparates gefundenen Geschwindigkeiten am Endpunkte dieser durchlaufenen Räume benutzt. Die Formeln für diese werden aus den Grundgleichungen durch eine nur ein-

malige Integration gefunden, ergeben viel einfachere Ausdrücke und verursachen daher viel weniger Mühe bei den Berechnungen.

Da es zugleich den Anschein hat, dass diese Beobachtungen ganz besonders einer Prüfung ihrer Zuverlässigkeit und eines hohen Grades von Genauigkeit fähig gemacht werden können, so dürfte diese Art der Behandlungsweise des in Rede stehenden Gegenstandes für die Folge vorzugsweise Platz greifen und die im Eingange besprochene dadurch vollständig verdrängt werden.

In neuerer Zeit soll namentlich durch die Vorschläge des belgischen Lieutenant Herrn Le Boulengé eine namhafte Vervollkommnung des in Rede stehenden Apparates bewirkt worden sein, worüber der 56. Band des Archivs für Art. u. Ing. Off. S. 189 nähere Auskunft giebt.

21. Dem Schreiber dieser Zeilen ist bis jetzt nur ein Beispiel bekannt, in welchem der Navez'sche Apparat zur Ermittelung des Luftwiderstandgesetzes benutzt worden ist. Es ist dies der in den Jahren 1861 und 1862 bei Dresden angestellte Versuch, welcher im 54. Bande jenes „Archivs" S. 24 beschrieben ist.

Man schoss nämlich mit Granaten aus einem gezogenen 6 Pfünder auf die drei Entfernungen von 28^m, 328^m und 628^m und erhielt mittelst des Navez'schen Apparates auf diesen Entfernungen die Geschwindigkeiten von bezüglich $311{,}00^m$; $207{,}38^m$, und $281{,}70^m$, wo das Zeichen m Meter bedeutet. Betrachtet man den Punkt, welcher der Entfernung von 28^m von der Geschützmündung entspricht, als den Anfangspunkt, so hat man

Anfangsgeschwindigkeit $= 311{,}00^m$,
Geschwindigkeit für die Entfernung von 300^m: $297{,}38^m$,
" " " " " 600^m: $281{,}70^m$,

eine Anordnung des Versuchs, welche überaus vortheilhaft ist. Durch Combination dieser drei Elemente zu je zweien erhält man hieraus, wenn man allgemein unter

c die Anfangsgeschwindigkeit,
s den durchlaufenen Raum,
v die Endgeschwindigkeit

versteht, folgende drei Fälle, alles in Metern verstanden:

s	c	v
300	311,00	297,38,
600	311,00	281,70,
300	297,38	281,70,

welche nun zur Prüfung mittelst der Methode der kleinsten Quadrate ganz geeignet sind.

22. Bezeichnet man, wie oben in No. 12, mit

M das Gewicht des Geschosses,
g die Beschleunigung der Schwere,
Av^n den Luftwiderstand,

so sind die Grundansatz-Gleichungen bekanntlich

$$\frac{v\,dv}{ds} = -\frac{Ag}{M} \cdot v^n.$$

Setzt man sodann für die verschiedenen zu prüfenden Luftwiderstandgesetze

I. $W = Av$,

II. $W = Av^2$ (Newton),

III. $W = Av^2\left(1 + \frac{1}{r}v\right)$ (Piobert), wo $r = 435^m$,

IV. $W = Av^3$, (die V. der No. 12 fällt hier aus),

VI. $W = Av^4$

VII. $W = Av^5$,

VIII. $W = Av^n$,

so ergiebt sich durch angemessene Substitution und einmalige Integration, und für

$$\frac{Ag}{M} = \lambda,$$

I. $c - v = \lambda s$,

II. $\log nat\, c - \log nat\, v = \lambda s$,

III. $\log nat\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{r}\right) - \log nat\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{r}\right) = \lambda s$,

IV. $\frac{1}{v} - \frac{1}{c} = \lambda s$,

VI. $\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} = 2\lambda s$,

VII. $\frac{1}{v^3} - \frac{1}{c^3} = 3\lambda s$,

VIII. $\frac{1}{v^{n-2}} - \frac{1}{c^{n-2}} = (n-2)\lambda s$.

Gleichungen, aus welchen augenscheinlich die erforderlichen Formeln zur Berechnung der Endgeschwindigkeit v aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c und dem durchlaufenen Raume s durch einfache Umstellung sehr leicht erhalten werden.

23. Man erkennt sogleich, dass in allen diesen Gleichungen auf der linken Seite abgesehen von dem bekannten r immer nur die Anfangsgeschwindigkeit und die Endgeschwindigkeit vorkommen, welche beide durch die Beobachtung bekannt, also gegeben sind. Auf der rechten Seite kommt überall nur der Buchstabe λ neben der bekannten Entfernung s vor, so dass, wenn man Behufs allgemeiner Behandlung das jedesmal links stehende, mit Θ, und das rechts neben s stehende mit β bezeichnet, die Form

$$\Theta = \beta \cdot s$$

erscheint, wo die zusammengehörigen Werthe von Θ und s bekannt sind und β der einzige Unbekannte ist.

Bezeichnet man sodann für jede einzelne Voraussetzung des Luft-

widerstandes in sich und für die am Ende der No. 21 angegebenen drei Fälle die zusammengehörigen Werthe von Θ und s respective mit

$$\Theta_{\text{I}},\ s_{\text{I}};\quad \Theta_{\text{II}},\ s_{\text{II}};\quad \Theta_{\text{III}},\ s_{\text{III}};$$

so wie $\Theta_{\text{I}} s_{\text{I}} + \Theta_{\text{II}} s_{\text{II}} + \Theta_{\text{III}} s_{\text{III}}$ mit $[\Theta s]$ und $s_{\text{I}} s_{\text{I}} + s_{\text{II}} s_{\text{II}} + s_{\text{III}} s_{\text{III}}$ mit $[s s]$, so ergiebt sich der beste Ziffernwerth für β nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus

$$\beta = \frac{[\Theta s]}{[s s]}.$$

24. Führt man nun für jede der in No. 22 angegebenen hypothetisch vorausgesetzten Luftwiderstandgesetze die Berechnung von β aus, und berechnet man sodann damit für die in den No. 21 aufgeführten 3 Fälle aus den für s und c gegebenen Ziffernwerthen die zugehörigen Ziffernwerthe von v, so erhält man durch diese Berechnung:

Hypothese	v_{I}	v_{II}	v_{III}	
I.	296,35	281,70	282,73	
II.	295,99	281,70	283,02	Newton
III.	295,84	281,70	283,14	Piobert
IV.	295,60	281,70	283,30	
VI.	295,34	281,70	283,60	
VII.	294,90	281,70	283,75	
anstatt der wirklich beobachteten	297,38	281,70	281,70.	

Berechnet man sodann für jede dieser 6 Hypothesen in sich und für jeden der 3 berechneten Werthe von v die Differenz zwischen dem berechneten und dem beobachteten Werthe von v und bezeichnet man diese Differenz mit ε, so hat man beispielsweise für Hypothese I

$$\varepsilon_{\text{I}} = -1{,}03;\quad \varepsilon_{\text{II}} = 0;\quad \varepsilon_{\text{III}} = +1{,}03.$$

Erhebt man sodann diese Werthe von ε ins Quadrat, addirt die so erhaltenen Zahlen, und bezeichnet das Resultat

$$\varepsilon_{\text{I}} \varepsilon_{\text{I}} + \varepsilon_{\text{II}} \varepsilon_{\text{II}} + \varepsilon_{\text{III}} \varepsilon_{\text{III}} \text{ mit } [\varepsilon \varepsilon],$$

so ist dieses $[\varepsilon\varepsilon]$ die Summe der Fehlerquadrate, und man erhält dafür in dem Falle

I.	$[\varepsilon\varepsilon] = 2{,}12$ wo	$W = Av$
II.	$[\varepsilon\varepsilon] = 3{,}67$	$W = Av^2$
III.	$[\varepsilon\varepsilon] = 4{,}45$	$W = Av^2\left(1 + \frac{v}{r}\right)$
IV.	$[\varepsilon\varepsilon] = 5{,}42$	$W = Av^3$
VI.	$[\varepsilon\varepsilon] = 7{,}79$	$W = Av^4$
VII.	$[\varepsilon\varepsilon] = 10{,}35$	$W = Av^5$

25. Der Sinn dieser Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, wie schon oben erörtert, der, dass diejenige Form des Luftwiderstandgesetzes im Vergleich zu einer andern wahrscheinlich die bessere sei, bei welcher die Summe der Fehlerquadrate $[\varepsilon\varepsilon]$ kleiner ist, als bei der andern.

Von den hier zur Prüfung gezogenen Luftwiderstandgesetzen würde also dasjenige das (wahrscheinlich) beste sein, für welches die Summe der Fehlerquadrate $[\varepsilon\varepsilon]$ die kleinste unter allen ist. Dies trifft bei der Hypothese I zu, für welche $[\varepsilon\varepsilon] = 2{,}12$ kleiner ist, als irgend einer der nachfolgenden ähnlichen Ziffernwerthe. Hiernach also wäre

$$W = Av$$

die passendste Form des Luftwiderstandgesetzes (unter den hier zur Prüfung gekommenen) und die anderen darauf folgenden

$$W = A \,.\, v^2; \quad W = A\, v.^3 \text{ u. s. w.}$$

wären schlechter und immer schlechter, je mehr der Potenzexponent von v steigt.

Dies stimmt nun ganz und gar nicht mit allen früheren Versuchen, welche jemals und irgendwo angestellt worden sind. Immer will man, im Widerspruche mit dem soeben gefundenen Resultat, gefunden haben, dass der Exponent der Geschwindigkeit grösser als 2 angenommen werden müsse und bei den in dieser Abhandlung erörterten, in Preussen stattgehabten Versuchen ist man sogar auf noch grössere Exponenten, respective zur Ziffer 3, 4 und noch darüber hinaus, hingelangt.

Es müssen also nothwendiger Weise entweder die hier in Rede stehenden Dresdener Versuche oder die anderen unzuverlässig gewesen sein. Für die Entscheidung kann nur von einer grösseren oder geringeren Wahrscheinlichkeit die Rede sein und diese spricht entschieden gegen die Dresdener Versuche.

Um dies noch näher darzuthun, beachte man, dass die Form des Luftwiderstandgesetzes

$$W = Av,$$

also der Potenzexponent 1 für v sich nur im Vergleich zu den übrigen bis jetzt zur Prüfung gezogenen Formen als der passendste erwiesen hat, indem die ihm entsprechende Summe der Fehlerquadrate $[\varepsilon\varepsilon]$ kleiner ist, als die den übrigen Gesetzen zugehörige, dass aber hierdurch noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass Potenzexponenten, welche kleiner als 1 sind, nicht eine noch kleinere Summe der Fehlerquadrate geben könnten.

26. Setzt man zum Behuf einer solchen Prüfung in den Formeln VIII der No. 22 nach und nach $n = 0{,}9$; $0{,}8$; $0{,}7$; $0{,}6$; $0{,}5$; so erhält man

für n	
0,9	$c^{1,1} - v^{1,1} = 1{,}1 \,.\, \lambda \,.\, s$
0,8	$c^{1,2} - v^{1,2} = 1{,}2 \,.\, \lambda \,.\, s$
0,7	$c^{1,3} - v^{1,3} = 1{,}3 \,.\, \lambda \,.\, s$
0,6	$c^{1,4} - v^{1,4} = 1{,}4 \,.\, \lambda \,.\, s$
0,5	$c^{1,5} - v^{1,5} = 1{,}5 \,.\, \lambda \,.\, s.$

Führt man nun hiermit die Berechnung für jede einzelne Horizontalreihe in sich, sowie in No. 23 und 25 durch, so erhält man, wenn der besseren Uebersicht wegen auch die in No. 24 bereits aufgeführten Resultate

wiederum mit herangezogen werden, für die Summen der Fehlerquadrate folgende Ziffern

für $W =$	$[\varepsilon\,\varepsilon]$
Av^5	10,35
Av^4	7,79
Av^3	5,42
$Av^2\left(1+\frac{v}{r}\right)$	4,45
Av^2	3,67
Av	2,12
$Av^{0,9}$	2,0
$Av^{0,8}$	1,8
$Av^{0,7}$	1,7
$Av^{0,6}$	1,6
$Av^{0,5}$	1,5.

Hier ist nun ersichtlich, dass auch der Potenzexponent 1 noch nicht die kleinste Summe der Fehlerquadrate ergiebt, sondern dass dazu noch kleinere Zahlen nöthig sein würden. Dies spricht jedoch so sehr gegen alle Wahrscheinlichkeit, dass es nicht der Mühe lohnt, diese Rechnungen fortzusetzen, und man scheint zu dem Urtheil berechtigt, dass irgend ein ungünstiger Umstand die Dresdener Versuche beeinträchtigt haben müsse, und dass durch dieselben der vorgesetzte Zweck nicht erreicht worden ist.

Man wird also diese Versuche fortsetzen müssen, und dabei alle nur mögliche Sorgfalt anzuwenden haben, um die unvermeidlichen Fehler nach Möglichkeit gleichmässig zu vertheilen.

27. Welche Rücksichten dabei zu nehmen und welche Anordnungen dafür zu treffen wären, darüber behält sich der Verfasser dieser Zeilen eine weitere Aeusserung für einen passenden Zeitpunkt noch vor.

Spandau, Mai 1866.



Kleinere Mittheilungen.

XXXIV. Ueber die Summen $\sum\limits_0^x \sin(p + xq)$ und $\sum\limits_0^x \cos(p + xq)$ **und Verwandtes.** Von Prof. Reusch. (Hierzu Taf. IV, Fig. 7—9.)

§. 1.

Durch Beiziehung einiger Begriffe aus der Lehre vom Schwerpunkt lassen sich die bekannten Formeln für die obigen Summen in einfacher Weise ableiten. Ich betrachte (Fig. 7) ein Polygonstück $abcde$, dessen gleiche und gleich schwere Seiten einen Kreis vom Halbmesser OA in ihren Mitten oder Schwerpunkten $A, B, C \ldots$ berühren, und suche zwei Ausdrücke für das Moment des Polygonstückes in Beziehung auf eine beliebige durch O gehende Achse OX. Ein erster Ausdruck ist $ab\,(AA_1 + BB_1 + CC_1 + \ldots)$, wo AA_1, $BB_1 \ldots$ die Abstände der Punkte A, $B \ldots$ von der Achse sind. Nach einem bekannten Satz ist aber das Moment des Polygonstückes auch gleich dem Product aus der Projection αs des Polygons auf die Achse in den Halbmesser OA des einbeschriebenen Kreises. Setzt man aber $OA = 1$, so bedeuten die Grössen AA_1, $BB_1 \ldots$ die Sinusse der Winkel XOA, XOB, $XOC \ldots$, welche, wenn der erste $= p$, und $AOB = BOC \ldots = q$ gesetzt wird, der Reihe nach die Werthe $p, p + q, p + 2q \ldots, p + xq$ erhalten. Da ferner $ab = 2Oa.\sin\frac{1}{2}q$ ist, so wird der erste Ausdruck für das Moment zu

$$2Oa.\sin\tfrac{1}{2}q \sum_0^x \sin(p + xq).$$

Die Projection des Polygons $ab \ldots e$ auf die Achse hat den allgemeinen Ausdruck

$$Oa\,(\cos aOX - \cos eOX) = Oa\,[\cos(p - \tfrac{1}{2}q) - \cos(p + xq + \tfrac{1}{2}q)]$$

und dies ist, weil mit $OA = 1$ zu multipliciren ist, um das Moment zu erhalten, das Moment selbst. Durch Gleichsetzung der beiden Werthe erhält man

$$1)\qquad \sum_0^x \sin(p + xq) = \frac{\cos(p - \frac{1}{2}q) - \cos[p + (x + \frac{1}{2})q]}{2\sin\frac{1}{2}q}.$$

Sucht man ebenso das Moment des Polygonstückes in Beziehung auf eine Achse OY, welche senkrecht auf OX steht, so ist der erste Ausdruck dafür

$$2\,Oa\,.\,\sin\tfrac{1}{2}q\sum_0^x\cos(p+xq);$$

der zweite ist

$$\alpha_1\,\varepsilon_1 = Oa\,(\sin eOX - \sin aOX) = Oa\,[\sin(p+xq+\tfrac{1}{2}q) - \sin(p-\tfrac{1}{2}q)],$$

woraus

$$2)\qquad \sum_0^x\cos(p+xq) = \frac{\sin[p+(x+\frac{1}{2})q] - \sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}.$$

§. 2.

Die eben entwickelten Formeln hat M. Koller in einer Arbeit über die Berechnung periodischer Naturerscheinungen*) angewendet, um die Werthe gewisser Summen zu bestimmen, auf die man bei Entwickelung der Bessel'schen Formel stösst. Man kann sich aber auch die Aufgabe stellen, die Werthe jener Summen direct zur Anschauung zu bringen, und es ist vielleicht nicht ganz unnütz, wenn ich den von mir eingeschlagenen Weg kurz bezeichne.

Die zunächst in Betracht kommenden Summen seien

$$3)\qquad \begin{array}{ll} \Sigma\sin(p+rmz) = A, & \Sigma\cos(p+rmz) = B, \\ \Sigma[\sin(p+rmz)]^2 = C, & \Sigma[\cos(p+rmz)]^2 = D, \end{array}$$

in welchen $z = \frac{2\pi}{n}$ einen aliquoten Theil der Peripherie, r eine ganze positive Zahl und Σ eine Summe bedeutet, deren Glieder man erhält, indem man m der Reihe nach $0, 1, 2\ldots, n-1$ setzt, so dass also Σ nur Abkürzung für $\sum\limits_{m=0}^{m=n-1}$ ist.

In den Ecken $0, 1, 2, \ldots n-1$ eines regulären n-Ecks (wo also n wenigstens $=3$ ist) (Fig. 8), denke ich mir je einen materiellen Punkt von gleichem Gewichte niedergelegt; der Halbmesser des umschriebenen Kreises sei $=1$; MX und MY seien zwei im Mittelpunkt sich rechtwinklig kreuzende Achsen, mit deren ersterer MX, der Anfangsradius Mo den Winkel $XM0 = p$ bilde. Alsdann sind die aufeinanderfolgenden Winkel

$$XM0,\ XM1,\ XM2\ldots XM(n-1)$$

der Reihe nach

$$p,\ p+\frac{2\pi}{n},\ p+2.\frac{2\pi}{n},\ \ldots p+(n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Die von $m=0$ bis $m=n-1$ genommenen Summen

$$\Sigma\sin(p+mz)\ \text{und}\ \Sigma\cos(p+mz)$$

können nun, wenn man sich ihre Glieder mit den Gewichten der materiellen

*) Denkschriften der Wiener Akademie I. Band, 1850, pag. 54.

Punkte multiplicirt denkt, als Momente des Punktsystems in Beziehung auf die Achsen MX und MY aufgefasst werden. Der Schwerpunkt aller n-Punkte liegt aber nothwendig in M; es sind daher beide Summen für jeden Werth von n der Null gleich.

Die Summen

$$\Sigma[\sin(p+mz)]^2, \quad \Sigma[\cos(p+mz)]^2$$

können, nachdem ihre Glieder mit den Massen der Punkte multiplicirt sind, als Trägheitsmomente T_x und T_y des Punktsystems für die Achsen MX und MY angesehen werden. Das Trägheitsmoment Θ in Beziehung auf eine durch M gehende zu XMY senkrechte Achse ist aber, da alle n-Punkte im Abstand 1 von M liegen, gleich n multiplicirt mit der Masse eines Punktes. Bekanntlich ist aber*)

$$\Theta = T_x + T_y;$$

ferner ist leicht zu zeigen, dass allezeit

$$T_x = T_y;$$

denn denkt man sich die Achse MX der Reihe nach durch die Punkte $0, 1, 2 \ldots n-1$ gelegt, so erhält man n gleiche Trägheitsmomente, woraus folgt, dass dieselben auch für alle Zwischenachsen denselben Werth haben. Es ist daher

$$T_x = T_y = \tfrac{1}{2}\Theta.$$

Der letztere Werth wird aber, nach Unterdrückung des Massenfactors, $= \frac{1}{2}n$.

Im Bisherigen liegt also der Beweis, dass für $r=1$ und einen beliebigen Werth von n, welcher grösser als 2 ist, die Beziehungen bestehen:

$$4) \qquad A=0,\ B=0,\ C=\tfrac{1}{2}n,\ D=\tfrac{1}{2}n.$$

§. 3.

Um zu untersuchen, wie sich die Werthe der Summen 3) gestalten, wenn man für r der Reihe nach immer grössere Zahlen setzt, hat man nur zu sehen, wie sich die den Winkeln

$$p,\ p+r\frac{2\pi}{n},\ p+2r\frac{2\pi}{n},\ \ldots p+(n-1)\,r\frac{2\pi}{n}$$

entsprechenden Endpunkte $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ und die daselbst niedergelegten materiellen Punkte auf dem Kreisumfang gruppiren. Trifft es sich, dass dieselben wiederum auf die Ecken eines regulären Polygons zu liegen kommen, so gelten auch, so oft dies eintritt, die Relationen 4).

Hierbei treten uns aber sofort zwei Fälle entgegen, wo die Gruppirung auf den Ecken eines regulären Polygons unmöglich ist, wo daher die Werthe der Summen 3) besonders zu bestimmen sind. Der erste Fall ist der, dass r ein ganzes Vielfaches von n, oder $r=Kn$ ist, wobei $K=1$,

*) Es ist $\Theta = \Sigma mr^2 = \Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2$.

2, 3 ... Alsdann ist die Differenz der aufeinander folgenden Winkel $n\frac{2\pi}{n} = K.2\pi$ und es fallen daher alle Punkte mit 0 zusammen. Man erhält jetzt

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} A=n\sin p,\quad B=n\cos p,\quad C=n\sin^2 p,\quad D=n\cos^2 p; \\ \qquad \text{und für } p=0, \\ A=0,\quad B=n,\quad C=0,\quad D=n. \end{array}\right.$$

Der zweite Fall ist der, wo n gerade und r ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}n$ ist. Nun wird

$$r=(2\varkappa+1)\frac{n}{2},\quad r\frac{2\pi}{n}=(2\varkappa+1)\pi,$$

wo $\varkappa=0, 1, 2 \ldots$. Diesmal fällt die eine Hälfte der Punkte (0, 2, 4 ...) auf 0, die andere Hälfte (1, 3, 5 ...) auf den der 0 gegenüberliegenden Punkt. Die Werthe der Summen 3) sind

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} A=0,\quad B=0,\quad C=n\sin^2 p,\quad D=n\cos^2 p; \\ \qquad \text{und für } p=0, \\ A=0,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=n. \end{array}\right.$$

§. 4.

Die sechs Kreise der Fig. 9 zeigen, wie z. B. für $n=7$ und $r=1$ bis 6, die 7 Punkte 0, 1, 2 ... 6 immer auf die Ecken eines regulären Siebenecks zu liegen kommen, und es hat wohl wenig Schwierigkeit, einzusehen, dass das Analoge stattfindet für den allgemeineren Fall, wo n eine Primzahl ist und $r=1$ bis $n-1$ gesetzt wird. Die Gruppirung der Punkte selbst anlangend, kann man Folgendes sagen: für $r=1$ und $r=n-1$ legen sich die Punkte direct auf die Ecken des n-Ecks, im ersten Falle rechtsläufig, im zweiten linksläufig; für ein zwischenliegendes r legen sich die Punkte in die Spitzen eines r-tourigen Sterns von n-Zacken, oder kürzer eines r-tourigen n-Zacks. Von $r=2$ bis $r=\frac{1}{2}(n-1)$ sind die Sterne verschieden nach Maassgabe der Sehnen 02, 03, 04 u. s. w. im ersten Kreise, kehren aber von $r=\frac{1}{2}(n+1)$ bis $r=n-2$ in derselben Form wieder, so dass für r und $n-r$ ihre Gestalt dieselbe, die Lage der Punkte gleicher Nummer aber entgegengesetzt ist. Bei der in Fig. 9 eingehaltenen Darstellungsweise kann man auch sagen, die zweite Reihe von Gestalten sei das Spiegelbild der ersten für MN als Spiegel. — Für $r=n+1$, $n+2$, ... $r=2n+1$, $2n+2$ u. s. w. kommt man immer wieder auf dieselben Gestalten wie für $r=1$, 2, 3 ..., indem hierdurch nur einfache oder mehrfache ganze Touren eingeschoben werden, wodurch die Stellung eines Punktes von gegebener Nummer nicht verändert wird. Diese letztere Bemerkung gilt auch für das Folgende.

Sind n und r relative Primzahlen (z. B. $n=24$, $r=5$, 7, 11) so kommen die Punkte auf die Spitzen eines r-tourigen n-Zacks zu liegen. Ist aber

r ein Factor von n, so dass $n = \nu r$, so legen sich die Punkte auf die Ecken eines r-tourigen ν-Ecks. Ist z. B. $n = 24$, so enthält diese Zahl die Factoren 12, 8, 6, 4, 3 und die Punkte legen sich für $r = 2, 3, 4, 6, 8$ auf die Ecken des zweitourigen Zwölfecks, des dreitourigen Achtecks u. s. w. Haben endlich n und r ein gemeinschaftliches Maass μ, so dass $n = \nu\mu$, $r = \varrho\mu$, so legen sich je μ-Punkte in die Spitzen eines ϱ-tourigen ν-Zacks; z. B. für $n = 24$ und $r = 9$ ist $\mu = 3$, $\nu = 8$, $\varrho = 3$; für $r = 10$ ist $\mu = 2$, $\nu = 12$, $\varrho = 5$.

Schliesst man daher die in §. 3 bezeichneten Werthe von r aus, so kommen die n Punkte allezeit entweder einzeln oder in gleichzähligen Gruppen auf die Ecken eines regulären Polygons zu liegen. Die Summen 3) in §. 2 haben somit für alle Werthe von r, welche nicht ein ganzes Vielfaches von n sind, oder, für ein gerades n, nicht ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}n$ sind, die Werthe

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \tfrac{1}{2}n, \quad D = \tfrac{1}{2}n.$$

§. 5.

Bei der Entwickelung der Bessel'schen Formel kommen noch die nachfolgenden Summen in Betracht:

$$3^{bis}) \qquad \begin{aligned} \Sigma \sin rmz \,.\, \sin \varrho mz &= E \\ \Sigma \sin rmz \,.\, \cos \varrho mz &= F \\ \Sigma \cos rmz \,.\, \cos \varrho mz &= G, \end{aligned}$$

wo die Symbole Σ, m, z dieselbe Bedeutung wie früher (§. 2) haben und r und ϱ ganze positive Zahlen sind. Durch leichte Umformung erhält man

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos (r - \varrho)\, mz - \tfrac{1}{2}\Sigma \cos (r + \varrho)\, mz, \\ F &= \tfrac{1}{2}\Sigma \sin (r + \varrho)\, mz + \tfrac{1}{2}\Sigma \sin (r - \varrho)\, mz, \\ G &= \tfrac{1}{2}\Sigma \cos (r + \varrho)\, mz + \tfrac{1}{2}\Sigma \cos (r - \varrho)\, mz. \end{aligned}$$

Von den drei Grössen E, F, G ist hiernach nur F unbedingt der Null gleich, weil nach den Formeln 4), 5), 6) nur $\Sigma \sin rmz$ für alle Werthe von r verschwindet. Die Grössen E und G sind nur Null, wenn $r + \varrho$ und $r - \varrho$ nicht Vielfache von n, oder für ein gerades n nicht ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}n$ sind. Die gewöhnlich angegebenen Relationen

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0$$

sind daher nur unter der bezeichneten Voraussetzung richtig.

Tübingen, 29. December 1865.

XXXV. Ueber die durch Fluorescenz hervorgerufene Wärmestrahlung. Von Dr. VICTOR PIERRE, Professor a. d. Univers. Prag.

Es ist wiederholt die Frage gestellt worden: ob durch Fluorescenz auch strahlende Wärme erzeugt werde? und es haben Studnicka (Wien. Akad. Ber. XLIV, 2, p. 289) und Fürst Salm-Horstmar (Poggd. Ann. XCIII, p. 54) dieselbe im bejahenden Sinne beantworten zu müssen geglaubt. Insofern als sichtbaren Strahlen Wärmewirkungen zukommen, ist es im

Grunde überflüssig, jene Frage zu stellen, da es feststeht, dass durch Fluorescenz solche sichtbare Strahlen entstehen, von denen man weiss, dass sie thermoskopisch wirksam sind. Es kann sich sonach nur um die Frage handeln, ob durch Fluorescenz auch dunkle, d. h. solche Wärmestrahlen entstehen, deren Wellenlänge grösser ist als jene der äussersten rothen Strahlen?

In dieser Richtung habe ich mich bereits vor neun Jahren mit der Frage zu beschäftigen angefangen, konnte jedoch zu keinem genügenden Resultate kommen. Ich schrieb jedoch damals die Ursache des Misslingens meiner Versuche dem in der That sehr unvollkommenen Apparate zu, über den ich verfügen konnte. Seither in den Besitz besserer Apparate gelangt und unter günstigeren Localverhältnissen nahm ich die Untersuchungen von Neuem auf, und die Ergebnisse derselben bilden den Gegenstand vorliegender Mittheilung.

Es schien mir der beste Weg, die Frage zu entscheiden, der zu sein, dass man das Licht der Sonne oder einer künstlichen constanten Lichtquelle zuerst durch ein durchsichtiges für dunkle Strahlen aber undurchgängiges oder wenigstens nur wenig durchgängiges Medium hindurchleitet, dann auf die freie Oberfläche eines fluorescirenden Stoffes fallen lässt, und die thermoskopische Wirkung der zurückgeworfenen Strahlen misst. Kehrt man dann den Vorgang um, indem man das Licht zuerst auf den fluorescirenden Stoff direct wirken lässt, und dann den reflectirten Bündel, bevor er das Thermoskop trifft, durch dasselbe für dunkle Strahlen undurchgängige Mittel wie früher hindurchleitet, so müsste man, wenn durch Fluorescenz dunkle Strahlen entstanden sind, im zweiten Falle eine Verminderung der thermoskopischen Wirkung beobachten.

Ist nämlich s die Menge der leuchtenden, d jene der dunklen Strahlen im einfallenden Lichte, so ist die Menge der aus der eingeschalteten Platte austretenden Strahlen beziehungsweise αs und βd. Durch Reflexion gehen diese Mengen über in $\varrho \alpha s$ und $\varrho' \beta d$. Es soll nun durch Fluorescenz eine neue Quantität leuchtender und dunkler Strahlen entstehen, und zwar durch die Strahlung αs die Menge $f \alpha s$ leuchtender und $f' \alpha s$ dunkler Strahlen; durch die Strahlung βd die Menge $f'' \beta d$ dunkler Strahlen. Die gesammte Strahlenmenge, welche auf das Thermoskop wirkt, ist demnach:

$$M = \alpha s (\varrho + f) + \beta d (\varrho' + f'') + f' \alpha s.$$

Fällt das Licht direct auf den fluorescirenden Stoff, so erhält man im reflectirten Lichte die Strahlenmenge ϱs und $\varrho' d$ in Folge der blossen Reflexion; durch Fluorescenz kommen hinzu die Mengen fs leuchtender und $f's$ dunkler Strahlen von Seite der einfallenden Strahlung s; ferner die Menge $f'd$ dunkler Wärmestrahlen von Seite der Strahlung d. Gehen diese Strahlen durch dieselbe Platte wie früher durch, so treten aus derselben aus die Mengen $\alpha s (\varrho + f)$ sichtbarer, und $\beta d (\varrho' + f'') + \beta f' s$ dunkler Strahlen, so dass die auf das Thermoskop wirkende Strahlenmenge sein wird:

$$M' = \alpha s(\varrho + f) + \beta d(\varrho' + f'') + \beta f' s.$$

Es ist daher

$$M - M' = f' s(\alpha - \beta)$$

oder wenn $\beta = 0$, d. h. das Medium für dunkle Strahlen adiatherman wäre:

$$M - M' = f' \alpha s.$$

Ich stellte nun die Versuche sowohl mit dem Lichte der sogenannten Locatellischen Lampe als auch mit Sonnenlicht an. Da jedoch die Strahlenintensität bei Locatelli's Lampe so gering war, dass keine bemerkbaren Fluorescenzerscheinungen auftraten, legte ich auf die durchaus negativen Resultate dieser Versuche, trotzdem ich mich zur Messung der Stromstärken eines sehr empfindlichen Spiegelgalvanometers bediente, kein besonderes Gewicht und benutzte bei den weiteren Versuchen ausschliesslich Sonnenlicht. Aber auch bei diesem stösst man auf erhebliche Schwierigkeiten. Namentlich ist es die durch die verschiedene Höhe der Sonne und durch die Veränderungen im Zustande der Atmosphäre bedingte Veränderlichkeit der Strahlung, auf welche man sorgfältig Rücksicht nehmen muss, wenn man sich keinen Täuschungen aussetzen will. Es werden daher nur solche Versuche brauchbare Resultate liefern können, die in der Nähe des Mittags, also bei constanter oder sehr nahe constanter Sonnenhöhe, und bei möglichst wolkenlosem Himmel angestellt wurden. Die Versuche wurden in der Art ausgeführt, dass man das durch einen Silbermann'schen Heliostat horizontal in das Zimmer geleitete Sonnenlicht mittelst eines zweiten Metallspiegels in eine für den Versuch geeignete gegen den Horizont geneigte Richtung brachte. Das vom Metallspiegel reflectirte Licht wurde von einer in einem Metallschirme angebrachten Quarzlinse von ziemlich grosser Brennweite aufgefangen und auf die beiläufig in den Focus der Linse gebrachte freie Oberfläche einer fluorescirenden Flüssigkeit geworfen. Diese letztere befand sich in einem flachen Schälchen zwischen zwei Metallschirmen, welche mit Oeffnungen zum Durchgange der einfallenden und reflectirten Strahlen versehen und in geeigneter Weise aufgestellt wurden. Die Thermosäule war an der der Wärmequelle zugewendeten Seite mit einem kurzen cylindrischen Ansatzrohre versehen, und ganz nahe an der Oeffnung des hinteren Schirmes so aufgestellt, dass sie den reflectirten Strahlenbündel möglichst vollständig aufzunehmen vermochte.

Zur Strommessung diente ein gewöhnlicher Thermo-Multiplicator von Silberdraht mit gut astatischer Nadel. Ein dritter Schirm diente dazu, die einfallenden Strahlen nach Bedarf abzuhalten und wieder zuzulassen; derselbe befand sich zwischen der Quarzlinse und dem vorderen durchbrochenen Schirme. Anfänglich breitete ich die fluorescirende Flüssigkeit in einer dünnen Schicht auf einer matten Glasplatte aus, später zog ich es vor dieselbe in ein Uhrschälchen zu giessen. Es wurde jedesmal dafür Sorge getragen, dass der Flüssigkeitsspiegel jene Höhe hatte, bei welcher der re-

flectirte Strahlenbündel vollständig zur Thermosäule gelangen konnte. Als Zwischenplatte diente zumeist eine geschliffene in Kork gefasste Alaunplatte von beiläufig 2 Millim. Dicke; ausser dieser versuchte ich auch ein dunkelviolettes Glas, welches keine rothen Strahlen durchliess, so wie auch andersfarbige (grüne, blaue und braune) Gläser. Als fluorescirende Flüssigkeiten kamen ein ätherisch-alkoholischer Auszug von Epheublättern (Chlorophyll-Lösung) und die von Rochleder aus Aesculin dargestellte, prachtvoll roth fluorescirende Substanz (Rochleder's Aesculin-Roth) in Anwendung.

Bezeichnet man nun die beiden Stellungen der Zwischenplatte als vordere und hintere, je nachdem sie im einfallenden oder reflectirten Lichte sich befand, so ergaben sich folgende Resultate:

A. Chlorophyll-Lösung.

Vers. 1)	Alaunplatte	vorne	Ablenkung	10°
	„	hinten	„	10°
Vers. 2)	„	vorne	„	6°
	„	hinten	„	6°
Vers. 3)	„	vorne	„	13°
	„	hinten	„	13°
Vers. 4)	Violettes Glas	vorne	„	20°
	„	hinten	„	20°

B. Rochleder's Aesculin-Roth.

Vers. 5)	Alaunplatte	vorne	Ablenkung	6°
	„	hinten	„	6°

C. Matte Glasplatte.

Vers. 6)	Alaunplatte	vorne	Ablenkung	3°
	„	hinten	„	3°.

Es war sonach bei beiden fluorescirenden Flüssigkeiten die thermoskopische Wirkung des reflectirten Bündels dieselbe, mochte die Zwischenplatte im einfallenden oder reflectirten Strahle sich befinden. Da nun kaum angenommen werden kann, dass in allen Fällen $\alpha = \beta$ gewesen sei, um so weniger als auch bei Einschaltung verschiedenfarbiger Glasplatten die Resultate dieselben blieben, so erhellt, dass, wenn auch nicht behauptet werden kann, dass absolut gar keine dunkle Wärmestrahlung durch Fluorescenz erregt wurde, dieselbe doch jedenfalls so gering war, dass sie keine messbare thermoskopische Wirkung hervorbrachte, dass also, wenn nicht $f' = 0$ genommen werden will, dasselbe doch jedenfalls einen nur sehr kleinen Werth haben kann. Ich möchte mich indessen in den meisten Fällen für die erstere Annahme, d. h. für $f' = 0$ entscheiden, nur beim Chlorophyll könnte die Sache vielleicht zweifelhaft sein, in-

sofern das f' einen von Null verschiedenen, wenn auch sehr kleinen Werth haben könnte. Untersucht man nämlich die Zusammensetzung der durch Fluorescenz entstehenden Mischfarbe durch prismatische Analyse, so geht die sichtbare Strahlung bei allen mir bisher bekannt gewordenen fluorescirenden Stoffen nicht bis an die äusserste Grenze des Roth, bei manchen Stoffen kaum über das Orange, selten weiter als bis in die Nähe der Fraunhofer'schen Linie C; es ist also nicht zu erwarten, dass dunkle Strahlen von grösserer Wellenlänge als die äussersten rothen in merkbarer Intensität auftreten werden.

Ich habe übrigens ausser den eben angeführten auch eine Reihe anderer Versuche ausgeführt, bei welchen ich die Zwischenplatten gänzlich wegliess, und die thermoskopischen Wirkungen, welche sich ergaben, wenn das Licht von einer Glasplatte reflectirt wurde, mit jenen zu vergleichen suchte, welche erhalten wurden als die Reflexion an der freien Oberfläche von Wasser, Aetherweingeist, Rochleder's Aesculin-Roth oder Chlorophyll-Lösung erfolgte. Die Zusammenstellung des Apparates blieb wesentlich dieselbe wie früher, nur wurde unmittelbar hinter der reflectirenden Oberfläche die mit dem konischen Reflector versehene Thermosäule in geeigneter Stellung angebracht. Ich erhielt indessen auf diese Weise keine brauchbaren Resultate und würde die ganze Sache auch nicht weiter erwähnt haben, wenn mir dabei nicht ein Umstand bemerklich geworden wäre, welcher den Schlüssel zur Erklärung der von Studnicka erhaltenen Resultate abzugeben vermag. Bringt man nämlich ein Schälchen mit Aetherweingeist oder Chlorophyll-Lösung vor die Thermosäule, so entsteht in Folge der raschen Verdampfung eine starke Abkühlung der Flüssigkeit, in Folge welcher sich eine Strahlung von der Thermosäule zur Flüssigkeit einstellt, welche für sich allein die Nadel des Multiplicators um 5 bis 6° abzulenken vermag. Setzt man eine Chlorophyll-Lösung in dem Apparate der Sonnenstrahlung aus, so sind die ersten Ausschläge aus dem eben angegebenen Grunde stets zu klein, überhaupt unregelmässig, weil die Verdampfung nicht immer gleich rasch vor sich geht. Lässt man aber die Bestrahlung längere Zeit dauern, so geht die Multiplicatornadel oscillirend immer mehr über die Grenze des ersten Ausschlages hinaus und erreicht endlich eine bleibende Ablenkung, welche bedeutend grösser ist, als der erste Ausschlag. Blendet man jetzt die einfallenden Strahlen ab, so kehrt die Nadel nur sehr langsam zurück und bleibt längere Zeit um einige Grade abgelenkt, eine Strahlung von der Flüssigkeit zur Säule anzeigend. Es ist also keinem Zweifel unterworfen, dass hier eine starke Absorption von Wärmestrahlen und in Folge davon eine Erwärmung der Flüssigkeit stattgefunden hat. Gleiches, wenn auch in geringerem Grade findet auch bei Rochleder's Aesculinroth statt. Ich glaube daher nicht zu irren, wenn ich annehme, dass bei Studnicka's Versuchen, bei welchen eine dünne Schicht Chlorophyll-Lösung auf Glimmer aufgetragen und eintrocknen gelassen

wurde, etwas Aehnliches stattgefunden habe. In der That, als ich eine Glasplatte, auf der sich eine eingetrocknete Chlorophyllschicht befand, in meinen Apparat brachte, beobachtete ich genau dieselben Erscheinungen, welche an der Lösung wahrzunehmen waren. Auch ist die Differenz der Ablenkungen, welche Studnicka erhielt, so gross, dass wenn der von ihm benutzte Apparat dieselbe Empfindlichkeit und denselben Scalenwerth gehabt hätte, wie der von mir angewandte, dieselbe einer Strahlungsdifferenz von mehr als 10 Pct. entsprochen haben würde, dabei war die Chlorophyllschicht so dünn, dass keine Fluorescenz bemerkt werden konnte. Ich glaube daher nicht, dass bei meinen Versuchen, bei welchen eine sehr stark fluorescirende Flüssigkeit und ein, wie ich vermuthen muss, empfindlicherer Apparat in Anwendung kam, eine so bedeutende Vermehrung der Strahlung unbemerkbar geblieben wäre.

Dass die von Salm-Horstmar (a. a. O.) angeführte Erscheinung auf eine durch Absorption bedingte Erwärmung hinauskommt, glaube ich ebenfalls mit Gewissheit behaupten zu können. (Wiener Akad.)

XXXVI. Ueber ein neues akustisches Experiment. Von Prof. Stefan.

Tönt eine Platte so, dass sie mit vier im fixen Centrum zusammenlaufenden Knotenlinien in vier Abtheilungen schwingt, so haben je zwei gegenüberliegende Abtheilungen der Platte zur selben Zeit Bewegungen in derselben, zwei neben einander liegende Bewegungen in entgegengesetzter Richtung. Es gehen also von den verschiedenen Stellen der Platte gleichzeitig Verdünnungen und Verdichtungen der Luft aus, die durch Interferenz sich schwächen, weshalb der Ton der Platte wenig intensiv ist. Er wird aber stärker, wenn man über zwei gegenüberliegende Abtheilungen die Hände hält oder einen aus zwei rechtwinklichen Sectoren bestehenden Fächer aus Pappe. Wird dieser über der Platte gedreht, so hört man abwechselnd den Ton anschwellen und verlöschen. Man kann so einfach die Schwebungen, das Trillern nachahmen.

Je rascher man den Fächer dreht, desto schneller folgen die Schwebungen auf einander, bis sie endlich nicht mehr unterschieden werden können. Dann verschwindet aber zugleich der Ton der Platte und an seine Stelle treten zwei, ein höherer und ein tieferer, die um so mehr vom primären Tone abweichen, je schneller der Fächer gedreht wird. Bei einer Platte, die den Ton fis_1 giebt, wurden bei zehn Umdrehungen in der Sekunde zwei Töne erhalten, die nahe an f_1 und g_1 lagen.

Sind die Sectoren grösser oder kleiner als die Abtheilungen der Platte, so hört man auch den primären Ton mit. Meistens erscheint der höhere Ton als der intensivere.

Anstatt den Schirm vor der Platte zu drehen, kann man auch die Platte vor dem Schirm drehen, auch letzteren weglassen und nur die Platte allein drehen. Denn bei einer vor dem Ohr langsam gedrehten Platte hört man den Ton abwechselnd anschwellen und verlöschen. Dasselbe ist bei einer Stimmgabel der Fall. Diese, in rasche Drehung versetzt, giebt dieselbe Erscheinung. Man kann auch eine Resonanzröhre vor die Platte oder Stimmgabel geben und dieselbe drehen, oder aber Platte oder Stimmgabel vor der Resonanzröhre rotiren lassen.

Lässt man eine runde Platte in sechs, acht Abtheilungen schwingen, so zeigt sich dasselbe Phänomen, wenn man Fächer mit drei, vier Sectoren verwendet. Ein Fächer mit vier Sectoren vor einer Platte, die in vier Abtheilungen schwingt, gedreht, zeigt das Phänomen nicht, ebenso nicht ein Fächer mit zwei Sectoren vor einer Platte mit sechs, acht Abtheilungen.

Die Versuche wurden an der Schwungmaschine, an der Drehbank mit verschiedenen Platten, Stimmgabeln und Fächern gemacht.

Die Erscheinung kann auf folgende Weise erklärt werden. Die in Folge eines constanten einfachen Tones erzeugte Bewegung in einem mitschwingenden Körper kann dargestellt werden z. B. durch die Formel $a \sin 2n\pi t$, wenn n die Schwingungszahl des Tones; a ist die Amplitude. Aendert sich diese mit der Zeit, so ist sie ebenfalls von der Zeit t abhängig. Aendert sie sich periodisch, so dass n' Perioden auf die Sekunde kommen, so kann man im einfachsten Falle a durch $\alpha \sin 2n'\pi t$ ersetzen, worin α constant ist. Es lässt sich nun in $\alpha \sin 2n'\pi t \sin 2n\pi t$ das Product der Sinus auflösen in die Cosinus der Differenz und der Summe der beiden Winkel, welche zwei Ausdrücke dann einfache Schwingungen repräsentiren, gehörig zu Tönen von den Schwingungszahlen $n - n'$ und $n + n'$.

Dieser trigonometrischen Zerlegung obigen Ausdruckes entspricht hier ebenso die reale Zerlegung in zwei Töne, wie in den Erscheinungen der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes einer analogen trigonometrischen Zerlegung die des einfachen Strahles in zwei circular polarisirte entspricht.

Die hier beobachteten Töne bilden eine neue Art von Combinationstönen, indem mit dem primären Tone der Rhythmus der Unterbrechung nach Summe und Differenz sich combinirt. Um diese Töne durch einen eignen Namen von den andern zu unterscheiden, könnte man sie etwa Interferenztöne nennen. (Wiener Akad.)

XXXVII. Beiträge zur genaueren Kenntniss der Gesetze der Fluorescenz-Erscheinungen. Von Prof. Dr. PIERRE in Prag.

1. Die Fluorescenz erregende Eigenschaft ist nicht blos auf die



brechbarsten Strahlen des Sonnenspectrums beschränkt, sondern es können Strahlen von jeder Wellenlänge im Allgemeinen Fluorescenz erregen.

2. Für jeden bestimmten Stoff giebt es eine bestimmte prismatische Farbe, in welcher die Fluorescenz zuerst auftritt, so dass alle weniger brechbaren Farben als diese keine Fluorescenz hervorbringen.

3. Selten nur ist diese Farbe auch zugleich diejenige, welche die intensivste Fluorescenz erzeugt, meistens sind es die nächst brechbareren Strahlen, aber immer wieder für einen bestimmten Stoff bestimmte Strahlen.

4. Wenn Strahlen von bestimmter Farbe, also von bestimmter Wellenlänge und Schwingungsdauer, Fluorescenz in einem Stoffe erzeugen, so entstehen nicht nur überhaupt Strahlen von grösserer Schwingungsdauer als jene des erzeugenden Strahles, sondern es sind die durch Fluorescenz entstehenden Strahlen für jeden Stoff immer dieselben, welche Schwingungsdauer auch dem erzeugenden Strahle zukommen mag.

5. Die Wellenlängen der durch Fluorescenz erzeugten Strahlen gehen nicht immer stetig in einander über, sondern es zeigen sich mitunter Sprünge, so dass Strahlen von gewisser Wellenlänge nicht zur Entwicklung kommen, in welchem Falle das Spectrum der Fluorescenzfarbe von dunklen Bändern durchzogen wird; auch diese Erscheinung ist von der Wellenlänge (Schwingungsdauer) der erzeugenden Strahlen unabhängig.

6. Immer sind unter den durch Fluorescenz neu entstehenden Strahlen diejenigen die intensivsten, deren Wellenlänge derjenigen der Strahlen, in welchen die Fluorescenz zuerst auftritt, entweder gleich ist, oder doch nahe kommt, in diesem letzteren Fall aber stets eine grössere ist, als die der Grenze des Beginnes der Fluorescenz entsprechende.

7. Bei Stoffen, welche in Lösung fluoresciren, hat, insofern dieselben in verschiedenen Flüssigkeiten löslich sind, mitunter das Lösungsmittel Einfluss auf den Charakter der Fluorescenz, so dass in verschiedenen Lösungsmitteln gelöst, derselbe Stoff in verschiedener Weise fluorescirt. Bei demselben Lösungsmittel hat die Concentration der Lösung nur auf die Intensität der Fluorescenz Einfluss, lässt aber den Charakter derselben unberührt. Ueber und unter derjenigen Concentration, welche die Fluorescenz-Erscheinungen am intensivsten macht, scheint die Intensität der Fluorescenz in allen Partien des Spectrums, in welchen sich dieselbe überhaupt entwickelt, nahezu in demselben Verhältnisse abzunehmen, so dass sie bei der schwächsten Entwicklung nur noch an den Stellen des Maximums deutlich erkennbar bleibt.

8. Das Zusammensein eines fluorescirenden Stoffes mit anderen fluorescirenden oder nicht fluorescirenden Stoffen hat sehr verschiedenen Einfluss auf den Charakter der Fluorescenz desselben; in manchen Fällen erleidet derselbe keine Veränderung, in anderen Fällen dagegen wird derselbe gänzlich verändert. Sind mehrere fluorescirende Stoffe mit einander gemengt, so entsteht eine zusammengesetzte Fluorescenz, deren Farbe im

diffusen Tages- oder directen Sonnenlichte sehr verschieden sein kann, trotzdem stets dieselben Stoffe mit einander gemengt sind. Wenn die verschiedenen Stoffe nicht verändernd auf ihre Fluorescenzen einwirken, lässt sich eine derartige zusammengesetzte Fluorescenz stets in die einfachen Fluorescenzen derjenigen Stoffe, welche in der Mischung enthalten sind, auflösen, und insofern kann man durch Fluorescenz das Vorhandensein gewisser Stoffe in einem Gemenge verschiedener Stoffe erkennen, im gegentheiligen Falle aber nicht.

9. Es giebt Stoffe, welche durch Zusatz von Säuren, und solche, welche durch Zusatz von Alkalien stark fluorescirend werden; in diesen Fällen ist es gleichgültig, welche Säure oder welches Alkali angewendet werde, der Charakter der Fluorescenz bleibt stets derselbe*). (Nur Chlor- und Jodwasserstoffsäure machen eine Ausnahme, insofern sie die Fluorescenz zerstören.)

10. Das Licht künstlicher Lichtquellen, oder solches, welches durch farbige Medien gegangen ist, bewirkt mitunter Verschiedenheiten des Fluorescenz-Charakters verglichen mit jenem im Sonnenlichte, insofern Beginn und Maximum der Fluorescenz auf andere Stellen als im Sonnenspectrum fallen können.

Zusammenhang zwischen Fluorescenz und Phosphorescenz.

Es musste für mich von Interesse sein, die Phosphorescenz-Erscheinungen, welche sich an den Schwefelverbindungen verschiedener Erdmetalle in so ausgezeichneter Weise entwickeln, ebenfalls inden Kreis meiner Untersuchungen einzubeziehen, und ich verwendete zu diesem Behufe verschiedene Präparate, die theils von Albert in Frankfurt a. M., zum Theil von Lenoir in Wien herrührten.

Projicirt man das prismatische Spectrum auf einen derartigen phosphorescirenden Körper, so sind die Erscheinungen dieselben wie bei fluorescirenden. Die Phosphorescenz beginnt bald in den sichtbaren, bald in den ultravioletten Strahlen, kurz bei verschiedenen Präparaten in verschiedenen Gegenden des Spectrums; sie hat ebenfalls ein Maximum (bei einigen Stoffen fand ich auch zwei Maxima) und die Farbe des Phosphorescenzlichtes ist in der ganzen Ausdehnung der Phosphorescenz erregenden Partie des Spectrums dieselbe. Analysirt man ein auf einen derartigen Körper projicirtes Linearspectrum durch ein Prisma, so erhält man ebenfalls ein abgeleitetes Spectrum, welches der Hauptsache nach genau dasselbe Ansehen hat, wie das eines fluorescirenden Stoffes; nur lässt die unebene rauhe

---

*) Dieses Verhalten ist gewissermassen analog demjenigen farbig durchsichtiger Medien, welche ihre Farbe durch Zusatz von Säuren oder Alkalien verändern. Auch bei diesen ist die resultirende Mischfarbe unabhängig von der Natur der zugesetzten Säure oder Base.

Oberfläche dieser Körper kein reines Spectrum zu, es wird stets viel Licht unregelmässig zerstreut, weshalb es auch nicht möglich war, mit Sicherheit zu erkennen, ob sich nicht auch hier das Analogon mit der zusammengesetzten Fluorescenz finde; ich vermuthe indessen, dass bei einigen der von mir untersuchten Stoffe etwas derart der Fall sei. Der ganze Anblick, den ein phosphorescirender Körper im prismatischen Spectrum darbietet, ist so vollständig derselbe, wie bei einem fluorescirenden, dass man aus diesem Anblick allein durchaus nicht entscheiden könnte, ob man es mit einer Phosphorescenz oder einer Fluorescenz zu thun habe; der Unterschied der beiden Erscheinungen liegt nur darin, dass die Fluorescenz sogleich verschwindet, wenn man das einfallende Licht abblendet, während die Phosphorescenz in diesem Falle fortdauert, aber in ihrer Intensität rasch abnimmt; dabei gestalten sich wieder die Erscheinungen genau so, wie bei einer fluorescirenden Flüssigkeit, bei welcher man die Concentration bis zum Verschwinden der Fluorescenz abändert. Zuerst wird das Phänomen an der Seite des Beginnes und im Ultraviolett unmerklich und bleibt zuletzt nur noch an den Stellen des Maximums bemerkbar. Auf diese Weise scheint mir die Behauptung von E. Becquerel, dass Fluorescenz und Phosphorescenz sich nur durch die Dauer unterscheiden, indem die erstere mit dem Aufhören der erzeugenden Strahlung sogleich erlischt, letztere aber noch fortdauert, völlig begründet. (Wiener Akad.)

XXXVIII. Ueber eine neue Methode, die Längen der Lichtwellen zu messen. Von Prof. Stefan.

Lässt man auf eine Quarzsäule mit parallel zur optischen Axe angeschliffenen Flächen Licht fallen, welches unter 45° gegen die optische Axe polarisirt ist, so theilt sich jeder Strahl in den ordentlichen und ausserordentlichen, die parallel aus dem Quarz austreten, wenn die Flächen des Ein- und Austrittes parallel sind. Werden die beiden wieder auf eine gemeinschaftliche Schwingungsrichtung gebracht, so löschen sich alle jene Strahlen aus, deren Gangunterschied eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt. Breitet man das Licht in ein Spectrum aus, so erscheinen in diesem schwarze Interferenzstreifen, um so zahlreicher und feiner, je dicker die Quarzsäule ist. Der Gangunterschied zwischen zwei Strahlen lässt sich aus der Dicke der Quarzsäule und den Brechungsquotienten rechnen und zwar sehr genau, da man von letzteren nicht die absoluten Werthe, sondern nur die Differenzen braucht. Der doppelte Gangunterschied dividirt durch die Wellenlänge ist für jeden dunklen Streifen eine ungerade Zahl und zwar für jeden folgenden gegen Violett hin um zwei Einheiten grösser. Aus der Anzahl der Streifen von einer Fraunhofer'schen Linie

bis zu einer andren kann man die Wellenlänge der letzteren rechnen, wenn die der ersteren bekannt ist.

Um eine Wellenlänge direct, unabhängig von einer andern zu bestimmen, muss man den Gangunterschied für die betreffende Stelle des Spectrums successive vergrössern oder vermindern. Es tritt dann eine Wanderung der Interferenzstreifen ein. Aus der Anzahl der durch das Fadenkreuz gewanderten Streifen und der erzeugten Aenderung des Gangunterschiedes kann die Wellenlänge für die fixirte Stelle gerechnet werden. Die successive Aenderung des Gangunterschiedes könnte durch das Uebereinanderschieben zweier Quarzkeile erzielt werden. Ein solcher Apparat stand nicht zu Gebote. Es wurde vielmehr folgende Methode angewandt: Die Quarzsäule ward aus ihrer gegen die einfallenden Strahlen senkrechten Lage langsam herausgedreht, dadurch der Einfallswinkel, also auch der Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahl successive vergrössert und die gleichzeitig durch das Fadenkreuz gewanderten Streifen wurden gezählt. Da auch die mit der gemessenen Aenderung des Einfallswinkels eingetretene Aenderung im Gangunterschiede gerechnet werden kann, so hat man die Daten, die man zur absoluten Bestimmung der Wellenlänge der fixirten Stelle im Spectrum braucht.

Für die Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien B, C, D, E, F, G, H wurden folgende Zahlen gefunden: 6873, 6578, 5893, 5271, 4869, 4291, 3959 in Zehnmillionsteln des Millimeters. Diese Werthe stimmen sehr genau überein mit den aus den Beugungsphänomenen feiner Gitter abgeleiteten und sind dadurch zugleich ein Beweis für die Richtigkeit unserer Theorie der Lichtbeugung. (Wiener Akad.)

Fehler in Schlömilch's fünfstelligen Logarithmentafeln:

S. 159, Z. 14 v. o. (Gewicht eines Litre Luft) ist statt 1,29743 zu setzen 1,292743.

S. 44, Z. 1 v. o. in der zu Cotg. gehörenden Differenzentafel statt 47,1 lies 37,1.

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Elfter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1866.

Inhalt.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Das Wesen der Wärme. Versuch einer neuen Stoffanschauung der Wärme mit vergleichender Betrachtung der übrigen jetzt gebräuchlichen Wärmetheorien. In allgemein fasslicher Darstellung von Dr. PAUL REIS. Zweite bedeutend vermehrte Auflage. Leipzig, Quandt & Händel. 1865. 163 S. 8.

Die erste Auflage dieser Schrift erschien im Programm des Mainzer Gymnasiums von 1863 — 1864. Da dieselbe im Buchhandel häufig verlangt wurde, entschloss sich der Verfasser, dieselbe in erweiterter Form als selbstständiges Werk herauszugeben. — Die Anzahl der Versuche, aus molecularphysikalischen Hypothesen die Eigenschaften der Materie zu erklären, hat in den letzten Jahren in bedenklicher Weise überhand genommen; doch kann man nicht sagen, dass durch diese Fülle der Literatur wesentlich neue Gesichtspunkte zu Tage gefördert worden wären. Von der Mehrzahl dieser Schriften, welche in der Regel der dynamischen Wärmetheorie huldigen und ohne hinreichend sichere empirische Grundlagen Hypothesen über die Bewegungsformen der Körper- und Aetheratome aufstellen, welche den Erscheinungen der Wärme, der Elektricität, des Magnetismus entsprechen, unterscheidet sich der vorliegende Versuch wesentlich dadurch, dass er für die Hypothese des Wärmestoffes in die Schranken tritt, indem der Verfasser den freien, d. h. nicht durch die Anziehung der ponderablen Atome in deren Aetherhüllen gebundenen, Aether mit der Wärme und die Dichte des freien Aethers in den Intermolecularräumen mit der Temperatur identificirt. Der Verfasser bemerkt selbst in der Einleitung zu seiner Schrift, dass eine derartige Hypothese nur dann das Bürgerrecht in der Naturforschung beanspruchen kann, wenn die Erscheinungen aus derselben auf dem exacten Wege mathematischer Schlussfolgerungen abgeleitet werden. Leider aber hat der Verfasser diesen Weg nicht betreten, sondern sich nur der allgemeinen Verständlichkeit willen auf die „Erklärung mit Worten" beschränkt. Sehen wir also, wie weit es demselben auf diesem Wege gelungen ist, seine Aufgabe zu lösen.

Wenn es sich gegenwärtig um die Widerlegung der dynamischen Wärmetheorie und um die Darlegung einer Hypothese im Sinne der stofflichen Natur der Wärme handelt, so wird sich unsre Aufmerksamkeit naturgemäss darauf zu richten haben, wie sich die fragliche Hypothese denjenigen Erscheinungen gegenüber verhält, welche mit Recht als Fundamentalerscheinungen der mechanischen Wärmetheorie betrachtet werden, und welche derselben, als unerklärbar im Sinne der älteren Theorie, das jetzt ziemlich unbestrittene Uebergewicht über letztere verschafft haben. Als solche Fundamentalerscheinungen sind namentlich zu bezeichnen die von Joule nachgewiesene Thatsache, dass ein ohne Arbeitsleistung sich expandirendes Gas seine Temperatur nicht ändert, die Versuche von Rumford, Davy, Joule u. s. w. über die Erzeugung von Wärme durch Reibung ohne Verminderung der Wärmecapacität der geriebenen Körper, die Erscheinungen der Strahlung und der Absorption der Wärmestrahlen in ihrem Zusammenhange mit den Erscheinungen des Lichts.

Was zunächst die Erscheinungen der Wärmestrahlung betrifft, so äussert sich der Verfasser darüber in dem Kapitel über Sonnenwärme (S. 33) folgendermassen: „Wärme, Gluth ist frei werdender Aether; die Sonne „stösst also fortwährend nach allen Seiten Aether aus. Aether aber ist „wegen seiner nach allen Richtungen ausstrahlenden Abstossung absolute „Elektricität. Wenn nun in einer Reihe elastischer Kugeln, die einander „berühren, die erste einen Stoss erhält, so bleiben alle in Ruhe und nur die „letzte fliegt mit einer der Stosskraft entsprechenden Geschwindigkeit fort. „Ebenso ist der Weltraum mit Aether angefüllt, dessen Atome sich zwar „nicht direct berühren, aber mit ihren Abstossungsstrahlen, die ja unend„lich dicht neben einander liegen, in einander greifen... Es müssen dem„nach, wenn die Sonne uns aufgeht, Aetheratome in unsere Atmosphäre „hineingeschleudert werden, ohne dass der Aether des Weltraums vermehrt „wird; es sind ja nicht die von der Sonne ausgestrahlten, sondern die unse„rer Atmosphäre nächsten Atome, welche in dieselbe eindringen, während „sie durch jene ersetzt werden...." Beim Durchlesen dieser Stelle muss es scheinen, als seien dem Verfasser die Erscheinungen der Interferenz und Polarisation der Wärmestrahlen, welche beweisen, dass die Wärme sich wie das Licht durch Transversalwellen fortpflanzt, und überhaupt alle Erscheinungen, welche der Ansicht, dass Wärmeerzeugung und Erleuchtung nur verschiedene Wirkungen derselben Aetherwellen seien, allgemeinen Eingang verschafft haben, gänzlich unbekannt geblieben. Das ist jedoch nicht der Fall. In einem späteren Kapitel (S. 69 u. ff.) werden nämlich die Beziehungen zwischen Wärme und Licht ausführlich besprochen und auf S. 98 wird insbesondere die Interferenz, Brechung, Doppelbrechung und Polarisation der Wärmestrahlen erwähnt. Die Durchsichtigkeit und die Diathermanität der Körper denkt sich der Verfasser von ihrem Gefüge nämlich von dem Vorhandensein mehr oder minder zahlreicher „Aetherkanäle" zwischen

den Körperatomen abhängig, welche sowohl den transversalen Aetherschwingungen des Lichts, als den longitudinalen Impulsen, welche in der oben erläuterten Weise die Wärme fortpflanzen, den Durchgang gestatten. „Wenn „nun die lichtbildende Querbewegung eines Aetheratoms vernichtet wird, „so wird im Allgemeinen die wärmebildende Längsbewegung des Atoms „demselben Schicksal unterliegen, da die jedenfalls veränderte Beschaffen-„heit des Aetherkanals auch auf die letztere von Wirkung sein muss" (S. 95). Es sind daher die Lichtstrahlen im Allgemeinen immer mit Wärmestrahlen combinirt, oder ein Körper, welcher für eine Gattung von Lichtstrahlen durchsichtig ist, ist auch für eine entsprechende Art von Wärmestrahlen diatherman. Wie nämlich die Farben des Lichts durch ihre Wellenlänge verschieden sind, so unterscheiden sich die Wärmearten durch eine bestimmte Gruppirung der wirksamen Aetherstrahlen (S. 71). Während demnach im Allgemeinen jedem Lichtstrahl von bestimmter Wellenlänge eine gewisse Wärmeart entspricht, giebt es andrerseits dunkle Wärmestrahlen, denen keine Lichtstrahlen entsprechen; ein undurchsichtiger Körper kann diatherman sein, „denn die breite Querschwingung des Lichts kann durch den „Widerstand der Seitenwände eines Aetherkanals vernichtet werden, ohne „dass die Längsschwingung auch sofort erloschen sein müsste" (S. 94). „Finden sich in einem durchstrahlten Körper mehrere Richtungen mit zahl-„reichen regelmässigen Aetherkanälen, wie es bei den das Licht doppelt „brechenden Krystallen der Fall sein muss, so kann doch eine doppelte „Brechung der Wärme, ja sogar eine mehrfache Brechung derselben aus „diesen Gründen ebenso gut für die nicht combinirten Strahlen stattfinden, „wie sie die combinirten mit dem Lichte gemeinschaftlich erfahren" (S. 99). Der Verfasser scheint sich also vorzustellen, dass es in einem Kalkspathkrystall überhaupt nur zwei Richtungen gebe, in denen sich Licht- und Wärmestrahlen fortpflanzen können, und dass ein Krystall, in welchem „Aetherkanäle" in drei Richtungen vorhanden sind, das Licht dreifach brechen würde! „Sind mehrere Platten so gelegt, dass ihre Aetherfäden „parallel sind, so können die aus der einen Platte tretenden Strahlen unge-„hindert durch die zweite gehen; kreuzen sich aber die Aetherfäden, so „müssen die Wärmestrahlen bei der ersten Platte von der zweiten absor-„birt werden" (S. 99). Diese Proben aus dem Kapitel der Wärmestrahlung werden genügen, um sich ein eigenes Urtheil über die Anschauungsweise des Verfassers zu bilden. Wir bemerken nur noch, dass der Gedanke, die Wärmestrahlen durch Longitudinalwellen zu erklären, nicht eben neu ist.

Was zweitens die Erklärung der Wärmeerscheinungen bei Compression und Expansion der Gase betrifft, so wird der Hypothese gemäss durch Compression der im Gase enthaltene freie Aether verdichtet, somit Wärme erzeugt, umgekehrt wird durch Expansion derselbe verdünnt, oder das Gas abgekühlt. Beim Einströmen der Luft in einen leeren Raum (S. 37) „ist

„der letztere schon mit Aether von der Dichte des Aethers der freien Um-
„gebung gefüllt, der zwar bei der Einströmung in Bewegung gesetzt wird,
„aber sogleich zurückströmen muss, wenn hinter ihm ein weniger dichter
„Aether nachfolgt.“ Es würde aber aus dieser Anschauungsweise offenbar folgen, dass bei Verkleinerung oder Vergrösserung eines leeren Raumes genau ebenso viel Wärme erzeugt oder verbraucht würde, als wenn derselbe mit Luft von beliebiger Dichtigkeit gefüllt wäre, während hingegen die Erfahrung lehrt, dass die erzeugte Wärmemenge der geleisteten Arbeit, also der Dichte der comprimirten Luft, proportional ist.

Die Wärmeerzeugung durch Reibung endlich erklärt der Verfasser nach der im Sinne der Stofftheorie üblichen Weise dadurch, dass durch Annäherung der Theilchen des geriebenen Körpers eine Verdichtung des Aethers und ein Uebergang des gebundenen in freien Aether stattfinde (S. 43). Hätte der Verfasser die von ihm citirte Abhandlung von Rumford studirt, so würde er gefunden haben, wie Rumford diese Erklärung widerlegte, indem er nachwies, dass die Wärmecapacität der geriebenen Körper durch die Wirkung nicht verändert worden war. Des Versuches von Davy, bei welchem durch Reibung zweier Eisstücke im leeren Raum und in einer unter 0° erkalteten Umgebung Wasser, also ein Körper von grösserer Wärmecapacität als die geriebenen Körper, erzeugt wurde, erwähnt der Verfasser an dieser Stelle gar nicht und in einer späteren Stelle (S. 135) erklärt er denselben durch die Zusammendrückung des Eises, wobei Wärme frei werde, während doch andrerseits die Stofftheorie den zum Uebergang in den flüssigen Zustand erforderlichen Wärmeverbrauch dadurch erklärt, dass Wärme gebunden werde. — Zur Erklärung der von Joule angestellten Versuche über Flüssigkeitsreibung sagt der Verfasser (S. 44): „Die
„Flüssigkeitstheilchen werden mit Gewalt an einander gepresst, dadurch
„Aether verdichtet und so die Wärme erhöht; ob die entstehende Wärme-
„menge wirklich unbeschränkt sei, darüber belehrt uns kein Versuch aus-
„reichend; sehr gross kann dieselbe sein, weil die Menge des gebundenen
„Aethers im Verhältniss zu der des freien sehr gross ist; eine der Arbeit
„verhältnissgleiche Menge muss es sein, da in allen Fällen zwar etwas Ar-
„beit zur Näherung der Körpertheilchen verwendet wird, der weitaus
„grösste Theil aber immer die Abstossung des Aethers überwindet, also
„denselben verdichtet, und zwar um so mehr verdichtet, je mehr Kraft auf-
„gewendet wird.“ ... „Ob die benutzten Wasser- und Quecksilbermassen
„nach den Versuchen in demselben Zustande waren, wie vorher, darüber
„stehen mir keine Angaben zu Gebote. Zweifelhaft ist es; doch liegt die
„Möglichkeit vor, dass dabei die Aenderungen durch die später wieder von
„Aussen eintretenden Aetheratome beseitigt wurden.“ Leider liegen zu Gunsten des Verfassers keine Erfahrungen darüber vor, dass Wasser und Quecksilber durch Reibung ihre Wärmecapacität ändern, und wenn davon die Rede ist, dass die Zustandsänderung durch später wieder von Aussen

eintretende Aetheratome beseitigt werde, so heisst dies, in die Hypothese des Verfassers übersetzt, nichts anderes, als dass die durch Reibung im Calorimeter erzeugte Wärmemenge den Umgebungen der Flüssigkeit, d. i. den Gefässwänden, entzogen werde. Wenn der Verfasser von der Art, wie Joule die Versuchsreihen über Flüssigkeitsreibung ausführte, Kenntniss genommen hätte, so würde er die Ueberzeugung gewonnen haben, dass eine nachträgliche Abkühlung der Flüssigkeit und Wärmeaufnahme von Aussen der Aufmerksamkeit des Experimentators nicht hätte entgehen können.

Wir glauben auf den Theil des Buches, in welchem der Verfasser die weiteren Folgerungen aus seiner Hypothese entwickelt, nicht näher eingehen zu dürfen, zumal da die bereits gegebenen Proben den Charakter seiner Deductionen hinreichend erkennen lassen. Dass ein grosser Theil der Wärmeerscheinungen durch die Hypothese eines Wärmestoffes ebenso wohl und selbst zum Theil durch elementarere und daher der Anschauung näher liegende Betrachtungen erklärt werden kann, als im Sinne der dynamischen Wärmetheorie, ist niemals geläugnet worden. Lange Zeit hindurch hat ja die Stofftheorie zur Erklärung der bekannten Erscheinungen ausgereicht, und die Aetherthorie des Verfassers ist von den Vorstellungen von de Luc, Black, Jrvine, Wilke und Berthollet über freie und latente Wärme in keinem wesentlichen Punkte verschieden. Die Schwierigkeiten, auf welche jene Stofftheorie stösst, und welche zur Verwerfung derselben und zur Annahme der Bewegungstheorie geführt haben, werden dadurch nicht beseitigt, dass an Stelle des „Wärmestoffes" der neue Name „Aether" gesetzt wird.

Die zweite Abtheilung des Buches enthält eine Darstellung und Kritik der Ansichten, welche im Sinne der Bewegungstheorie der Wärme über die Natur der Wärmebewegungen aufgestellt worden sind. Insbesondere wendet sich der Verfasser gegen die Theorie der Identität der Licht- und Wärmestrahlung. Obgleich zugegeben werden mag, dass im Nachweis dieser Identität noch manche experimentelle Lücken vorhanden sein mögen; so beruht doch die Mehrzahl der Einwürfe des Verfassers auf Missverständnissen. Der Verfasser schliesst z. B., dass der grösseren Schwingungsgeschwindigkeit der violetten Strahlen auch die grösste Wärmewirkung entsprechen müsste. Dieser Schluss würde nur unter der Voraussetzung gleicher Schwingungsamplituden zulässig sein, indem dann allerdings der kürzesten Schwingungsdauer die grösste absolute Vibrationsgeschwindigkeit entsprechen würde. Es hindert aber nichts, anzunehmen, dass die Schwingungsamplituden der dunklen Strahlen jenseits des rothen Endes des Spectrums die grössten seien, und dass die Unempfindlichkeit der Netzhaut für Strahlen von grosser Schwingungsdauer, oder auch die Absorption in den Augenmedium uns hindern, diese Schwingungen als Licht wahrzunehmen. Dass die Intensität der Lichtempfindung im gelben Theil des Spectrums am grössten ist, steht dieser Annahme nicht entgegen, da man zwischen der

Intensität der Aetherbewegung und der Stärke des Lichteindrucks auf unser Auge wohl zu unterscheiden hat. Die erstere wird durch die lebendige Kraft der Aetherschwingungen oder durch die Wärmewirkung derselben gemessen, letztere aber ist ausserdem durch den verschiedenen Grad der Empfindlichkeit unseres Sehnerven für Schwingungen von verschiedener Wellenlänge bedingt, welche sogar grosse individuelle Verschiedenheiten bei verschiedenen Beobachtern zeigt. Für Strahlen, deren Wellenlänge dem vorrothen und rothen Theil des Spectrums entspricht, besitzt das Auge keine oder nur geringe Empfindlichkeit, während dasselbe für blaue und violette Strahlen so empfindlich ist, dass es dieselben als Licht noch wahrnimmt, obgleich dieselben so geringe Schwingungsamplituden besitzen, dass sie keine messbaren thermometrischen Wirkungen zu erzeugen im Stande sind.

Ein anderer Einwand, welchen der Verfasser gegen die Identität von Licht- und Wärmestrahlen aufstellt, bezieht sich auf die von Aken und Tyndall mit dem Namen der Calcescenz oder Calorescenz bezeichneten Erscheinungen der Umwandlung dunkler Wärme- in leuchtende Strahlen, wie dieselbe z. B. bei der Ersetzung des Kalkes durch die vorwiegend dunkle Strahlen aussendende Flamme des Knallgasgebläses vorkommt. — Es findet hier eine Uebertragung der Aetherschwingungen an die Körperatome statt und es ist *a priori* keineswegs erweislich, dass die Schwingungsdauer der neuen von den Körperatomen aus erregten Aetherwellen mit den der ursprünglichen von den Körperatomen erregten Wellen identisch sein müsse. — Ein ganz ähnliches Verhältniss findet bei den Fluorescenzerscheinungen der Lichtstrahlen statt. Die erwähnten Erscheinungen können demnach vielmehr zur Unterstützung als zur Widerlegung der Identitätstheorie dienen. — Dass ferner ein durchsichtiger Körper adiatherman für gewisse Wärmestrahlen und ein diathermaner Körper undurchsichtig sein könne, liefert ebenso wenig einen Beweis gegen die Identität von Licht und Wärme, wie aus der Erfahrung, dass rothes Glas keine blauen und blaues Glas keine rothen Strahlen hindurchgehen lässt, gefolgert werden kann, dass rothes und blaues Licht Erscheinungen verschiedener Natur seien.

Die übrigen zum Theil unter sich widersprechenden Resultate verschiedener Forscher, welche der Verfasser als Argumente gegen die Identitätstheorie anführt, beweisen nur, dass die Versuche über Wärmestrahlung mit mancherlei Schwierigkeiten verknüpft sind, welche selbst geübte Beobachter, wie Melloni, zu Irrthümern veranlassen konnten, die durch Vervollkommnung der Hilfsmittel und Versuchsmethoden ihre Aufklärung gefunden haben. Wie gross jene experimentellen Schwierigkeiten sind, mag man aus den entgegengesetzten Resultaten schliessen, zu welchen noch in der jüngsten Zeit zwei der berühmtesten Experimentatoren bezüglich der Absorption der Wärmestrahlen durch gasförmige Mittel gelangt sind.

Der Verfasser erörtert sodann die Vorstellungen, welche Ampère,

Redtenbacher (das Dynamidensystem, Mannheim 1857), Wiener (Grundzüge der Weltordnung, Leipzig und Heidelberg 1863) von der molecularen Beschaffenheit der Materie gegeben haben, sowie die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie und die im Zusammenhang mit denselben von Krönig, Clausius u. A. aufgestellten Ansichten über die Natur der Gase u.s.w. Der Ansicht des Verfassers, dass die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie auch mit seiner Aethertheorie verwoben seien, können wir nach den oben gegebenen Erörterungen nicht beipflichten. Dass andererseits die Ansichten der verschiedenen Forscher über die Natur der Wärmebewegung noch viel Lückenhaftes und Widersprechendes enthalten, wer wollte es läugnen? Die Unzugänglichkeit des Gebietes der Molecularphysik für die directe Beobachtung einerseits, die bedeutenden Schwierigkeiten, welche sich einer streng mathematischen Behandlung entgegenstellen andererseits, werden voraussichtlich eine erfolgreiche Ausbildung dieses Gebietes noch lange verzögern — indess ist es nicht eine oder die andere specielle Hypothese über die atomistische Zusammensetzung der Materie, auf welche die mechanische Wärmetheorie sich gründet. Dieselbe ist vielmehr eine nothwendige Consequenz bestimmter Erfahrungsthatsachen, welche mit der Annahme eines Wärmestoffes im Widerspruch stehen. Jeder Versuch, die Theorie des Wärmestoffes in dieser oder jener Form wieder zur Geltung zu bringen, muss daher so lange als verfehlt betrachtet werden, bis er jene Thatsachen entweder zu widerlegen oder auf genügende Weise zu erklären im Stande ist. Dies ist durch die Aethertheorie des Verfassers nicht geleistet worden.

Berlin, im November 1865. JOCHMANN.

Der Monitor. Eine Sammlung von Formeln und Tabellen aus dem Gebiete der Mathematik und Mechanik; zusammengestellt von H. VAN ALLER, Oberst a. D. Erster Theil, Mathematik. Hannover, G. Wedekind. 1865.

Das vorliegende Werkchen enthält eine ziemlich reichhaltige Sammlung von Formeln aus folgenden Theilen der Mathematik: 1. Goniometrie, 2. Ebene Trigonometrie, 3. Sphärische Trigonometrie, 4. Polygonometrie, 5. Polyedrometrie, 6. Analytische Geometrie der Ebene, 7. Analytische Geometrie des Raumes, 8. Berechnung von Flächen, 9. Berechnung der Oberflächen und Inhalte von Körpern, 10. Versetzungen, Reihen und Gleichungen, 11. Differential- und Integralrechnung, 12. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. In einer derartigen Publication sucht selbstverständlich Niemand eigene Forschungen des Verfassers, wohl aber verlangt das Publikum mit Recht dreierlei, nämlich Correctheit des Druckes, bequeme Anordnung des Materiales und genaue Angabe der Be-

dingungen, unter welchen die aufgeführten Formeln richtig sind. Nach diesen Gesichtspunkten betrachtet, hat die vorliegende Schrift keinen günstigen Eindruck auf den Referenten gemacht, wenigstens erweckt es ein nachtheiliges Vorurtheil, dass demselben beim blossen Durchblättern die folgende ziemlich lange Reihe von Fehlern und Ungenauigkeiten aufgestossen ist.

S. 21, Z. 6 v. u. steht *arctan* x statt *arctan* 1; S. 102, Z. 3 v. u. muss es statt $\frac{1}{4}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2$ heissen $\frac{1}{8}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2$; S. 103, Z. 4 v. o. ist statt $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ zu lesen $\sqrt{2(a^2+b^2)}$; S. 233, Z. 3 v. u. steht $m\log(a+x)+n\log(b+x)$ statt

$$(a+x)^m(b+x)^n d[m\log(a+x)+n\log(b+x)];$$

in mehreren folgenden Zeilen fehlt der Factor dx; S. 280, Z. 6 v. o. muss es für Cordioide heissen „Cardioide". Ferner ist zu tadeln, dass der Verfasser häufig mit einem und demselben Buchstaben ganz verschiedene Grössen bezeichnet; so wird auf S. 117 als Gleichung der hyperbolischen Spirale angegeben

$$r=\frac{a}{t}=\frac{2\pi a}{t},$$

wo die beiden a verschiedene Bedeutungen haben; daraus entspringt der Uebelstand, dass man bei den a, welche in den folgenden Formeln für Tangente, Normale etc. vorkommen, nicht weiss, welches a gemeint ist. Dieselbe Unsicherheit findet sich wieder bei der Gleichung der logarithmischen Spirale (S. 118), welche der Verfasser schreibt

$$r=c\,e^{\frac{t}{a}}=a^t=a\,e^{mt},$$

was geradezu eine Confusion giebt, da überdies m einmal $=1$ und das andere Mal davon verschieden ist. Auf S. 175 steht als Oberfläche des Ellipsoides

$$O=\frac{ab\pi}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}+\frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}$$

(bei Drehung um die grosse Axe),

$$O=2b^2\pi+\frac{2ab\pi}{\varepsilon}\ln(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})$$

(bei Drehung um die kleine Axe);

das erste O bedeutet die Oberfläche einer Viertelzone von der Höhe x; das zweite die Gesammtoberfläche, ohne dass dieser wesentliche Unterschied in einer Note bemerkt wäre. Unter der Rubrik Rectification bezeichnet beim Kreise (S. 285) s einen Quadranten, bei der Parabel den Bogen, dessen Horizontalprojection x ist, bei der Ellipse den ganzen Umfang, und wiederum fehlt hierzu jede Erläuterung. — Sehr unglücklich erscheint dem Referenten die Anordnung der Integralformeln, welche in 8 Tafeln auf folgende Weise vertheilt sind: Taf. 29. Integralformeln; Taf. 30. Unmittelbare Integrationen; Taf. 31. Integrationen durch Theile; Taf. 32. Integrale rationaler

Differentiale; Taf. 33. Integrale irrationaler Differentiale; Taf. 34. Integrationen durch Reductionsformeln; Taf. 35. Bestimmte Integrale; Taf. 36. Transcendente (unbestimmte) Integrale. Offenbar hat der Verfasser hierbei nicht die Natur des gegebenen Differentiales, sondern die zufälligen Hilfsmittel der Integration zum Eintheilungsgrunde genommen, er hat aber dabei übersehen, dass es auf letztere bei einem Tabellenwerke nicht ankommt. Wer z. B. den Werth von

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2}$$

in einer Tafel sucht, der fragt nicht danach, ob dieses Integral durch theilweise Integration oder durch Zerlegung in Partialbrüche oder durch Reductionsformeln entwickelt werden kann (hier würden sogar alle drei Methoden passen), er hat nur das Interesse, jenen Werth möglichst rasch zu finden. Für diesen Zweck ist die Anordnung, welche Meyer Hirsch, Minding, Bierens de Haan u. A. bei ihren Integraltafeln benutzt haben, die richtige und durch die Erfahrung längst bewährt. Wie weit dagegen bei des Verfassers Eintheilung die verwandtesten Formeln von einander getrennt werden, möge nur ein Beispiel zeigen:

$\int e^x\,dx$ steht auf S. 225,

$\int e^{ax}\,dx$ „ „ „ 227,

$\int x e^{ax}\,dx$ „ „ „ 235,

$\int x^n e^{ax}\,dx$ „ „ „ 253.

Endlich ist noch zu rügen, dass der Verfasser bei keiner Formel die Bedingungen ihrer Gültigkeit angiebt, wodurch der Nachschlagende zu dem Glauben an die Allgemeingültigkeit der betreffenden Formel und damit zu Fehlern verleitet wird. Aus den ersten Zeilen von Taf. I, *b* geht z. B. hervor, dass der Verfasser die Function $arc\sin x$ als eindeutig betrachtet, d. h. darunter immer den zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen versteht, dessen Sinus $=x$ ist. Dann musste aber auch bei der Formel (S. 20)

$$arc\sin x + arc\sin y = arc\sin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

die Einschränkung $x^2+y^2 \leqq 1$ beigefügt werden, ohne welche falsche Resultate herauskommen, wie z. B. für $x=y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$2\,arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Besonders gefährlich wird der gerügte Mangel bei den unendlichen Reihen. So steht auf S. 198 ohne alle Determination

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 x}{5} + \ldots.$$

und hieraus folgt, indem man von der Formel

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1} x\, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x\, dx = 2 . \frac{2.4.6 \ldots . (2n)}{3.5.7 \ldots (2n+1)}$$

Gebrauch macht,

$$\int_0^\pi x \sin^2 x\, dx = 2 \left\{ \frac{2}{1^2.3} + \frac{4}{3^2.5} + \frac{6}{5^2.7} + \right\},$$

was durchaus unrichtig ist. — Nach diesen Erörterungen muss man sagen, dass der Verfasser zwar mit vielem Fleisse aus allen möglichen Büchern Formeln zusammengetragen, dass er es aber hierbei versäumt hat, sich den eigentlichen Sinn und die praktische Anwendbarkeit derselben klar zu machen. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. November bis 31. December 1865.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1865. 2. Bd., 1. u. 2. Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1864. Berlin, Dümmler. 2 Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1863. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. 19. Jahrg., redig. von E. JOCHMANN. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Repertorium für physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde. Herausgeg. von P. CARL. 1. Heft. München, Oldenburg. pro compl. 6²/₅ Thlr.

Reine Mathematik.

NEUMANN, C., Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig, Teubner. 3⅔ Thlr.

—— —— Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. Ebendas. 18 Ngr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 5. Aufl. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 8. Aufl. Leipzig, Brandstetter. 1⅓ Thlr.

RULAND, N., Praktische Anleitung zum Unterricht in der Algebra. Ausführliche Auflösung der Gleichungen etc. in Heis' Sammlung. 2. Aufl. Bonn, Cohen & Sohn. $1^3/_5$ Thlr.

ZAMPIERI, J., Sammlung von Formeln und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Nach der 4. Aufl. der gleichnamigen Sammlung von J. Salomon. Wien, Gerold. 1⅙ Thlr.

GALLENKAMP, W., Die Elemente der Mathematik. 3. Aufl. 1. Thl. (Arithmetik, Algebra und Planimetrie). Iserlohn, Bädeker. ⅓ Thlr.

VEGA, G. v., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 49. Aufl., bearb. von BREMIKER. Berlin, Weidmann. 1¼ Thlr.

RÜHLMANN, M., Logarithmisch-trigonometrische und andere nützliche Tafeln. 7. Ausg. Leipzig, Arnold. ⅜ Thlr.

LALANDE, J. DE, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben von H. G. KÖHLER. 3. Ausg. Leipzig, Holtze. 18 Ngr.

Geometrisches Lehrpensum für das Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Cöln. Cöln, Schmitz. 8 Ngr.

SPITZ, C., Lehrbuch der ebenen Polygonometrie. Leipzig, Winter. 18 Ngr.

—— —— Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Ebendas. 1⅙ Thlr.

GEISER, C. F., Einige geometrische Betrachtungen. Zürich, Schabelitz. $^1/_5$ Thlr.

—— —— Ueber eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. Ebendas. ⅙ Thlr.

GREGORY, D. F., *Mathematical writings. Edited by W. Walton. With a biographical memoir by R. L. Ellis. London, Bell.* 12 sh.

Angewandte Mathematik.

POHLKE, K., Darstellende Geometrie. 1. Abth. 2. Aufl. Berlin, Gärtner. 1 Thlr.

CULMANN, K., Die graphische Statik. 2. Hälfte. Zürich, Meyer & Zeller. 4⅚ Thlr.

GRASHOF, F., Die Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Berlin, Gärtner. 2 Thlr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 2. Thl.: Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen. 4. Aufl. 7. u. 8. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

RHODIUS, A., Ein neuer Lehrsatz der Aerodynamik nebst dessen Anwendungen auf Maschinen und die Bewegungen der Atmosphäre. Bonn, Marcus. ⅙ Thlr.

PECHMANN, E., Die Abweichung der Lothlinie bei astronomi-

schen Beobachtungsstationen und ihre Berechnungen bei Gradmessungen. (Fortsetzung.) Wien, Gerold. 2 Thlr.

Lesser, O., Tafeln der Lutetia mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter und Saturn. Altona und Berlin, Dümmler. 1 Thlr.

Kepleri, J., *Opera omnia ed. C. Fritch. Vol. VI. Pars* 1. Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 2½ Thlr.

Loomis, E. A., *treatise on astronomy. New York and London.* 16 sh.

Bour, M. E., *Course de mécanique et machines, professé à l'école polytechnique. 1. Fascicule. Cinématique. Paris, Gaulthiers-Villars.*

Physik.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Aufl. 1. Lief. Leipzig, Teubner. ⅚ Thlr.

Schabus, J., Grundzüge der Physik. 4. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. 2 Thlr. 12 Ngr.

Neumann, C., Der gegenwärtige Standpunkt der mathematischen Physik. (Antrittsrede.) Tübingen, Laupp. 6 Ngr.

Urbanski, A., Theorie des Potentials und dessen Anwendung auf Elektricität. 2. Ausg. der Vorträge über höhere Physik. 1. Abth. Berlin, Friedländer. 1 Thlr.

Suhle, H., Psychrometertafeln, welche den Dunstdruck und die relative Feuchtigkeit für Zehntelgrade beider Thermometer des Psychrometers enthalten. Cöthen, Schettler. 24 Ngr.

Wild, H., Ueber ein neues Polaristrobometer und eine neue Bestimmung der Drehungsconstante des Zuckers. Bern, Haller. ⅔ Thlr.

Schrauf, A., Die Refractionsäquivalente und optischen Atomzahlen der Grundstoffe. Wien, Gerold's Sohn. ⅙ Thlr.

Kupffer, A. v., Handbuch der Alkoholometrie. Berlin, Springer. 2½ Thlr.

Zetzsche, K. E., Die Copirtelegraphen, die Typendrucktelegraphen und die Doppeltelegraphie. Ein Beitrag zur Geschichte der elektrischen Telegraphie. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 26 Ngr.

Matteucci, C., *Della pila di Volta, della corrente elettrica e della sue applicazioni. Torino.* 80 c.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Von Dr. Otto Hesse, ordentlicher Professor an der Universität Heidelberg. Leipzig, B. G. Teubner.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht und noch deutlicher in der kurzen Vorrede gesagt ist, hatte der berühmte Verfasser keineswegs die Absicht, ein vollständiges Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene zu liefern; vielmehr bezeichnet er seine Vorlesungen als wesentlich akademische, deren Aufgabe sei, „gefällig anzuregen und zu weiteren Entdeckungen zu ermuntern". Diesem Plane entspricht die gewählte Darstellung; sie ist ausführlich, wo es sich um principielle Erörterungen und Begriffsbestimmungen handelt, sie wird knapper bei Folgerungen, welche durch gewöhnliche Rechnungsoperationen erreichbar sind, sie giebt endlich an vielen Stellen Andeutungen zu weiterer Ausführung des Vorgetragenen oder zum Studium verwandter Untersuchungen. Zufolge dieser echt akademischen Weise gewährt hier das gedruckte Wort sehr nahe den Eindruck des gesprochenen, und selbst wer die analytische Geometrie genau kennt, wird doch dem ebenso anziehenden als anregenden Vortrage des Verfassers gern folgen. Hinsichtlich des Inhaltes mögen die nachfolgenden Angaben zur Orientirung dienen.

Als charakteristisch für die Methode der analytischen Geometrie bezeichnet der Verfasser in der ersten (einleitenden) Vorlesung drei Operationen: Die Uebertragung der geometrischen Data in Gleichungen, die Combination und Transformation der letzteren, endlich die geometrische Interpretation der neuen durch die vorigen Operationen erhaltenen Gleichungen. Dazu findet sich noch folgende Bemerkung: „Man würde irren, wenn man den Schwerpunkt der analytischen Geometrie in der Rechnung suchen wollte. Das Resultat der Rechnung ist das Endziel, die Rechnung selbst bleibt eine unliebsame Beigabe, die wir zur freieren Bewegung auf ein Minimum zu beschränken haben. Dieses Minimum durch möglichste Vermei-

dung von Rechnungen annähernd zu erreichen, wird eine der Aufgaben sein, welche zu lösen diese Vorlesungen sich durchgehend zur Pflicht machen." In der That ist dies geschehen, und es dürfte schwerlich ein Werk über analytische Geometrie existiren, welches dem Leser noch weniger Rechnung zumuthete als das vorliegende.

Es folgen nun die Definition der Coordinaten eines Punktes, die Bestimmung des Abstandes zweier Punkte und die Ermittelung der Dreiecksfläche, wobei die Theorie der geraden Linie durch Betrachtung von Dreiecken, welche gleiche Basis und gleiche Fläche besitzen, eingeleitet wird. Die zweite Vorlesung ist ausschliesslich der geraden Linie gewidmet; die Bedeutung der Coefficienten in der allgemeinen Gleichung

$$Ax + By + D = 0, \quad (\text{kurz } U = 0)$$

sowie in der speciellen Gleichung

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - d = 0, \quad (\text{kurz } A = 0),$$

welche die Normalform der Gleichung einer Geraden heisst, wird sehr sorgfältig erörtert. Daran knüpfen sich einige Aufgaben und Lehrsätze, z. B. „Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden sind, so bedeuten $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen der Geraden, welche die Winkel zwischen jenen Linien halbiren", ferner: „Wenn zwischen den Gleichungen dreier Geraden $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Identität $\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv 0$ obwaltet, so schneiden sich die Geraden in einem Punkte," u. dgl. m. Selbstverständlich werden von diesen Sätzen Anwendungen auf die merkwürdigen Punkte des Dreiecks gemacht. Die dritte Vorlesung beschäftigt sich mit den „harmonischen Linien und Linien der Involution", d. h. mit den Doppelverhältnissen zwischen den Sinus von vier Winkeln in Büscheln von vier Strahlen, mit den harmonischen Strahlbüscheln und mit der Involution von sechs Strahlen.

Das Gegenstück zur zweiten Vorlesung bildet die vierte; während nämlich in jener die gerade Linie durch eine Gleichung zwischen Punktcoordinaten ausgedrückt wurde, erscheint hier der Punkt repräsentirt durch eine Gleichung zwischen den neu eingeführten Liniencoordinaten, welche Gleichung entweder in der allgemeinen Form

$$Au + Bv + C = 0, \quad (\text{kurz } U = 0)$$

oder in der sogenannten Normalform

$$au + bv + 1 = 0, \quad (\text{kurz } A = 0)$$

auftreten kann. Die Analogie zwischen der Theorie des Punktes und der Theorie der Geraden wird sehr genau durchgeführt z. B. „Wenn $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte sind, so sind $A - A_1 = 0$ und $A + A_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte, von welchen der erste im Unendlichen liegt, der andere die Verbindungslinie halbirt"; ferner: „Wenn zwischen den Gleichungen von drei Punkten $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Identität $\lambda U + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$ stattfindet, so liegen jene Punkte in einer Geraden", u. dgl. m. Auf

gleiche Weise entspricht der dritten Vorlesung die fünfte; sie behandelt die Doppelschnittsverhältnisse einer Reihe von vier Punkten, die harmonischen Punkte und die Involution von sechs in gerader Linie liegenden Punkten. Die letztere Theorie wird in der darauf folgenden Vorlesung noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet und erweitert. Hierbei gelangt der Verfasser zu dem Satze: „Beliebige vier Punkte auf einer Geraden bilden drei Gruppen von zwei Punktepaaren. Construirt man drei Punktepaare, von denen jedes harmonisch ist, mit den Punktepaaren einer Gruppe, so sind je zwei construirte Punktepaare harmonisch," und dieses Theorem dient nun wieder, um der in Vorlesung 7 folgenden Auflösung biquadratischer Gleichungen einen geometrischen Sinn unterzulegen. Die achte Vorlesung nimmt den bereits in der sechsten Vorlesung benutzten Gedanken, ein Punktepaar oder ein Linienpaar durch eine Gleichung darzustellen, wieder auf und führt zu einer Reihe von Sätzen, welche ausschliesslich für solche Paare gelten, die harmonisch sind mit einem gegebenen Paar. In der neunten Vorlesung kommen die homogenen Coordinaten und die Dreieckscoordinaten zur Sprache; sie werden u. A. auf die vorige Lehre von den Punktepaaren angewendet. Die zehnte Vorlesung behandelt die Sechsecke von Pascal und Brianchon. Wie sich von selbst versteht, können dieselben hier nicht als Sehnen- oder Tangentenvielecke aufgefasst werden, der Verfasser definirt daher das Pascal'sche Sechseck als ein solches, bei welchem die Durchschnitte der Gegenseiten in einer Geraden liegen, ebenso das Brianchon'sche Sechseck als ein solches, dessen drei Hauptdiagonalen durch einen Punkt gehen. Diese Definitionen reichen aus, um die Eigenschaften beider Figuren zu entwickeln; der bekannte Steiner'sche Satz (Systematische Entwickelung etc. S. 311, No. 54) lautet dann so: wenn eines von den durch 6 Punkte bestimmten 60 verschiedenen Sechsecken ein Pascal'sches Sechseck ist, so sind es auch alle übrigen; die entsprechenden 60 Geraden gehen zu drei und drei durch einen Punkt u. s. w.

In den drei letzten Vorlesungen behandelt der Verfasser die Theorie des Kreises mit vieler Ausführlichkeit. Unter Anderem verdient erwähnt zu werden: die Pole und die Polaren, die Aehnlichkeitspunkte und die Aehnlichkeitsaxen, das System der Kreise, die von einem festen Kreise senkrecht geschnitten werden, die Potenzlinien und das Problem der Berührung von drei gegebenen Kreisen durch einen vierten Kreis, womit das Werk schliesst.

Man kann ohne Uebertreibung behaupten, dass es sehr wenig Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 182 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten, und daher liegt der Wunsch nahe genug, dass sich der Verfasser zu einer Fortsetzung des Werkes entschliessen, d. h. Vorlesungen über die analytische Geometrie der Kegelschnitte veröffentlichen möge. Nur Eines hat Referent

vermisst, nämlich die Angabe literarischer Hilfsmittel. Gerade weil sich der Verfasser hie und da auf Andeutungen beschränkt und weitere Ausführungen des einen oder anderen Punktes nur in der Perspective sehen lässt, wäre es ohne Zweifel passend gewesen, dem für Anregungen empfänglichen Jünger der Wissenschaft einen Wegweiser für seine ferneren Studien mitzugeben. Vielleicht lässt sich diesem Mangel bei einer zweiten Auflage oder Fortsetzung nachträglich abhelfen. SCHLÖMILCH.

Lehrbuch der Experimentalphysik von Dr. ADOLPH WÜLLNER, Docent der Physik an der landwirthschaftlichen Akademie zu Poppelsdorf und Privatdocent zu Bonn. Zweiten Bandes zweite Abtheilung. Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1865.

Die erwähnte Abtheilung dieses umfangreicheren Lehrbuches der Physik erfüllt, wie man beim Durchlesen auf jeder Seite bemerken kann, die Aufgabe vollständig, mit der niederen Mathematik Vertraute in das Gebiet der auf dem Titel genannten Wissenschaften einzuführen. Wer auch nur mit der Sprache einiger Originalabhandlungen, in denen die hauptsächlichsten Arbeiten über den Magnetismus niedergelegt sind, vertraut ist, der findet in der Abhandlung über den Magnetismus in Wüllner's Lehrbuche die Klarheit der Begriffe wieder, die den messenden Theilen des Magnetismus vorausgehen müssen, und die treu den Originalen von Gauss, Weber etc. eingeführt sind. Da nun, wie in den früher besprochenen Theilen des schätzenswerthen Lehrbuches, dem Leser überall eine höchst klare Auseinandersetzung entgegentritt und die Citate der besten Originalabhandlungen als weitere Wegweiser für das Studium einen entsprechenden Platz gefunden haben, so kann die gesammte Abhandlung über den Magnetismus, die den Eingang zur 2. Abth. des 2. Bandes bildet, den Studirenden, die nach gründlichem Wissen in diesem Theile der Physik streben, nur willkommen sein. Dem Magnetismus folgt die Lehre von der Reibungselektricität, und würde es bezeichnend genug sein, das im Allgemeinen über die Behandlung des Magnetismus Gesagte hierauf mit auszudehnen, jedoch ziehe ich vor, gleichsam zur Begründung des Vorigen, aus meinen beim Durchlesen gemachten Notizen hervorzuheben, dass die geschickte Herleitung der Eigenschaften der Elektricität aus den Fundamentalversuchen des Fernewirkungsgesetzes aus Coulomb' Versuchen mit der Drehwaage, der Messung der Elektricität mit Coulomb' Drehwaage, Dellmann's und Kohlrausch' Elektrometer, die Theorie des Condensators mir besonderes Vergnügen bereitet haben.

Eine gleich eingehende Behandlung hat der Galvanismus erfahren; die grösste Vollständigkeit im vorgetragenen Stoffe zeigt die Berücksichtigung

auch der neuesten Forschungen; da übrigens der Verfasser sich streng an die Resultate der Experimente gehalten hat, tritt die leidenschaftslose Unpartheilichkeit in seinen Aussprüchen über die Theorie des Galvanismus um so wohlthuender auf, als er selbst in diesem Gebiete thätig gewesen ist.

In dem nun folgenden Capitel der Elektrodynamik, welche die Ampère'schen Erscheinungen, den Diamagnetismus, überhaupt alle Erscheinungen der Wirkung von Strömen nach aussen mit umfasst, ist, wie zu erwarten, dieselbe gründliche Behandlung angewendet. Das Streben, nach dem Vorgange von Ampère, Weber, die Gesetze der Fernewirkung strömender Elektricität abzuleiten und vorzutragen, hat den Verfasser genöthigt, Gebrauch von den Elementen der Differential- und Integralrechnung zu machen. Ich möchte dies dem Lehrbuch weniger als Fehler, sondern vielmehr als eine Tugend anrechnen. Wo durchgängig in einem Lehrbuche der Physik das Streben hervortritt, aus den Erscheinungen auf das Gesetz zu führen, aus Messungen dasselbe herzuleiten, darf man einen Leserkreis erwarten, welcher, nach dem Dargebotenen strebend, auch die geringen Anstrengungen nicht scheut, sich in den Besitz der Mittel zum Verständniss desselben zu setzen.

Am Schlusse sei es uns noch gestattet, einen Rückblick auf Wüllner's Physik im Ganzen zu werfen. Nach Durchlesung dieses Lehrbuches kann es nicht entgehen, dass sich dasselbe wesentlich von unsern gangbaren Lehrbüchern der Physik unterscheidet. Während die Letzteren den Zweck verfolgen, die im Laufe der Zeit gewonnenen physikalischen Lehren vorzutragen und ihre Bedeutung an interessanten und wichtigen Einrichtungen zu zeigen, sehen wir bei Wüllner's Lehrbuch noch einen andern Zweck erreicht; die einzelnen Aufgaben der Physik treten deutlich hervor, die Lösungen, die sie erfahren haben, werden ausführlich besprochen, der Leser wird in die Thätigkeit des Physikers selbst eingeführt, deren genauere Kenntnissnahme ihm durch die zahlreichen, gut gewählten Citate erleichtert wird. Lernt der Leser hier einerseits, wie die Hauptfragen in der Physik von den Physikern selbst beantwortet worden sind, so wird ihm in Wüllner's Lehrbuch andererseits ein Muster der Darstellung entgegengebracht, welches ihm bei eigenen Arbeiten als Vorbild dienen wird. Der Verfasser versprach in der Vorrede, ein Lehrbuch liefern zu wollen, welches ausser dem Zwecke, die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen zu verbreiten, hauptsächlich dazu dienen solle, denjenigen als Vorschule zu dienen, die tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen. Wir können jetzt am Schlusse des ganzen Lehrbuches dem Verfasser nachrufen, dass er die von ihm angeregten Erwartungen auf das Vollkommenste befriedigt hat. Der Verfasser hat durch Vorführung der wichtigsten physikalischen Arbeiten in klarer, den Gebrauch der höheren Mathematik, wo es nur angeht, ausschliessender Darstellung und durch Hinweise auf die wichtigsten physikalischen Arbeiten durch Citate auf die Methode wahrer physikalischer

Forschung hingeleitet, so dass Wüllner's Lehrbuch diejenigen nicht gut entbehren können, die tiefer ins physikalische Wissen eindringen und später eigene physikalische Forschungen anstellen wollen. Der Verfasser hat durch Aufnahme sehr zahlreicher eleganter Abbildungen, die meistens als Holzschnitte in den Text des überhaupt von der Verlagshandlung vortrefflich ausgestatteten Lehrbuches aufgenommen worden sind, den Gebrauch des Lehrbuches erleichtert. Dass bei der angegebenen Behandlung das Werk voluminös ausfallen musste, ist natürlich, der 1. Band enthält 1065 Seiten, der 2. Band 1352 Seiten, wobei die jedem Bande beigegebenen Inhaltsverzeichnisse und Sachregister, sowie das am Schlusse des Ganzen angefügte Namenregister mit gezählt sind. Wenn man in Erwägung zieht, dass bei allen angegebenen Vorzügen Wüllner's Lehrbuch nur 11 Thlr. 10 Ngr. kostet, so muss man zu der Ansicht sich bekennen, dass unsere physikalische Lehrbücher-Literatur einen recht bedeutenden, und wegen des billigen Preises der mühevollen Arbeit, nicht schwer zugänglichen Zuwachs erhalten hat.

Dr. Kahl.

Ueber Vielecke und Vielflache. Von Dr. Chr. Wiener, Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe. Leipzig, B. G. Teubner. 1864.

Bereits im Jahre 1809 hatte Poinsot gezeigt (*Mémoire sur les polygones et polyèdres, Journal de l'école polytechnique, cahier* 10), dass sich den von Alters her bekannten fünf regulären Körpern noch vier neue Polyeder hinzufügen lassen, die mit demselben Rechte als regelmässige Polyeder gelten müssen, wie das gleichseitige Sternfünfeck (der heraldische „Drudenfuss“) als regelmässiges Polygon. Dass solcher Sternpolyeder nur vier möglich sind, haben Cauchy in seinen *Recherches sur les polyèdres* (*Journ. de l'école polyt.*, 1811, *cahier* 16) und Bertrand in seiner *Note sur la théorie des polyèdres réguliers* (*Comptes rendus* 1858, *T.* 46) bewiesen. Der Verfasser schliesst sich hauptsächlich dem letzteren Geometer an, erörtert aber die Grundlagen des Beweises genauer und führt auch die Untersuchung weiter, indem er den von Cayley aufgestellten Begriff des Flächeninhaltes eines regulären Sternpolygones auf die Sternpolyeder anwendet. Ein besonderes Verdienst aber hat sich der Verfasser dadurch erworben, dass er das Studium dieser interessanten Körpergruppe durch zahlreiche, ebenso genau als elegant ausgeführte graphische Darstellungen erleichtert, die bisher noch gar nicht gegeben worden sind. Tafel I enthält ausser den zu den Beweisen nöthigen Figuren die geometrischen Ansichten (orthogonalen Projectionen) der Sternpolyeder; Tafel II liefert die erforderlichen Netze, auf Tafel III erscheinen die mit Licht und Schatten versehenen perspectivischen Darstellungen; letztere sind von überraschender Schönheit.

Wir empfehlen hiermit diese werthvolle Monographie allen Freunden der Stereometrie und bemerken noch, dass Herr M. Doll, Assistent am Carlsruher Polytechnikum bereit ist, Modelle der Sternpolyeder auf Bestellung zu liefern. Vielleicht wäre es auch gerathen, stereoskopische Abbildungen solcher Modelle in den Handel zu bringen und dadurch minder bemittelten Studirenden ein wohlfeiles Mittel der Veranschaulichung zu bieten. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. Februar 1866.

Periodische Schriften.

BREMIKER, C., Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1868 zur Bestimmung von Länge, Breite und Zeit zur See nach astronomischen Beobachtungen. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

Annuario marittimo per l'anno 1866, *compilato dal Lloyd austriaco.* 16. *Annata.* Triest, Direction der liter. Abth. d. österr. Lloyd. 1⅓ Thlr.

Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome IX. No. 1 *et* 2. Leipzig, Voss. pro compl. 3 Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirées du bulletin de l'académie des sciences de St. Petersbourg. Tome VI, livr. 2—4. Ebendas. 1½ Thlr.

Annales de l'observatoire physique central de Russie. Red. par A. F. Kupffer. Année 1862. *Corréspondance météorologique,* 1863. Ebendas. 7 Thlr.

Reine Mathematik.

WIECKE, P., Lehrbuch der Mathematik für höhere Unterrichtsanstalten. 2. Thl. Arithmetik. Leipzig, O. Wigand. 1 Thlr. 6 Ngr.

BALSAM, H., Arithmetisches Uebungsheft. No. 2. Stettin, Saunier. 6 Ngr.

BÖKLEN, O., Lehrbuch der Geometrie für Real- und Gewerbschulen. Stuttgart, Nitzschke. 8 Ngr.

GERLING, C. L., Grundriss der analytischen Geometrie, mit besonderer Rücksicht auf Kegelschnitte. Nach dem Tode des Verfassers herausgeg. von J. ROTHFELS. Cassel, Luckhardt. 3 Thlr.

Schwarzer, A., Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger Kreisvielecke. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Unferdinger, F., Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks verbinden. (Akad.) Ebendas. ⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Weisbach, J., Der Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln etc. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr. 4 Ngr.

Burmester, L., Elemente einer Theorie der Isophoten (Linien gleicher Lichtintensität). Inaug.-Dissert. Heidelberg, Bangel & Schmitt. ⅓ Thlr.

Schneider, F. A., Fernere Nachrichten über die Fortschritte der Astro-Meteorologie. (1. Fortsetzung.) Leipzig, List & Francke. 1⅓ Thlr.

Domke, F., Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln für die königl. preuss. Navigationsschulen. 4. Aufl. Berlin, Geh. Oberhofbuchdruckerei. 2⅓ Thlr.

Mascart, M., *Eléments de mécanique rédigés conformément au programme de l'enseignement scientifique dans les lycées. Paris, Hachette.* 3 frcs.

Physik.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausg. 3. Lief. Leipzig, Teubner. ⅚ Thlr.

Bolze, H., Lehrbuch der Physik für Schule und Haus. 2. Aufl. Berlin, Grieben. 27 Ngr.

Stefan, J., Ueber die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Berichtigungen.

(Literaturzeitung der Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI, 1.)

Seite 2 Zeile 21 v. o. lies Elasticität statt Elektricität,
„ 6 „ 15 v. o. „ Akin statt Aken,
„ 7 „ 7 v. o. „ vereinbar statt verwoben.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Th. Henri Martin, *Observations et théories des anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques et sur les attractions électriques. Rome* 1865. (Auszug aus dem XVIII. Bde. der *Atti dell' Academia pontificia de' nuovi Lincei.*)

Der Verfasser dieser Schrift, dessen Gelehrsamkeit im Gebiete der Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften besonders bei den Alten mit seinen rein philologischen Kenntnissen wetteifert, hat hier auf 42 Seiten (in 4°) eine solche Fülle von Material vereinigt, dass es schwer fallen würde, Einzelheiten desselben hervorzuheben, ohne bei dieser Auswahl den blossen Zufall walten zu lassen. Ich begnüge mich daher mit der oberflächlichsten Angabe, dass zuerst die Kenntnisse zusammengestellt sind, welche die Alten, und namentlich die Griechen, von der Anziehungskraft des Magnetes auf das Eisen besassen. Darauf folgt ein kurzes Verzeichniss von richtigen Eigenschaften des Magnetes, welche unbekannt waren, ein längeres von in Wahrheit nicht vorhandenen Eigenschaften, welche der Aberglaube dem Magnete beizulegen liebte, und die Theorien, welche zur Erklärung jener Gesammtheit von wahren und erdichteten Erscheinungen aufgestellt wurden. Die Theorien sind theils mechanische, wie z. B. wenn dem Magneten eine Art von Einathmung zugeschrieben wird, der diejenigen Körper Folge leisten müssen, deren kleinste Unebenheiten in die Poren des Magnetes passen, wie es sich mit dem Eisen verhält; woraus aber auch folgt, dass umgekehrt nicht etwa auch das Eisen den Magneten anzuziehen im Stande ist, eine Annahme, welche die Anhänger jener Theorie in folgerichtiger Logik für wahr hielten, ohne experimentelle Prüfung zuzulassen. Theils waren die Theorien fast psychischer Natur; man nahm eine Liebe der beiden Körper zu einander an, und folgerte daraus auch die psychische Kraft des Magneten menschlichen Gefühlen gegenüber. Giebt doch in Folge dieser Theorie noch Marbod, der Bischof von Rennes, im S. XI die Vorschrift, um von der Treue einer Frau sich zu überzeugen, solle man ihr einen Magnet unter das Kopfkissen schie-

ben; die treue Gattin werde hierauf sich umdrehen und ohne zu erwachen den Gemahl umarmen, die ungetreue dagegen werde durch die geheimnissvolle Kraft von dem Lager herabgeschleudert werden. Bildeten die Theorien des Magnetismus bei den Alten einen zweiten Abschnitt in der Martin'schen Monographie, so beschäftigt sich der dritte Abschnitt mit den Kenntnissen, welche das Mittelalter neu hinzufügte, so z. B. mit der Entwickelungsgeschichte des Kompasses. Endlich folgt allerdings weit kürzer die Geschichte der elektrischen Kräfte, soweit sie den Alten bekannt waren.

Es mag hier noch bei der Geschichte des Kompasses verweilt werden, zu deren Erforschung die letzten Jahre manches Material beigebracht haben, wovon zwei Abhandlungen von *D'Avezac*, abgedruckt in dem *Bulletin de la Société de Geographie* (*Mars* 1858 und *Avril et Mai* 1860. *Paris, imprimerie de L. Martinet*), mir vorliegen, ebenso wie eine Abhandlung von W. Wenckebach, welche ursprünglich in holländischer Sprache 1835 in *Mulder's Natuur- en scheikundig Archief* erschien, neuerdings in französischer Uebersetzung durch *T. Hooiberg* in den *Annali di Matematica* Bd. VII, Heft 3 (*Roma* 1865) wieder abgedruckt wurde. Aus diesen Untersuchungen geht mit Bestimmtheit hervor, dass *Flavio Gioia* von *Amalfi*, der um 1320 lebte, sicherlich nicht der Erste war, welcher in Europa die Benutzung der Richtungsfähigkeit des Magneten für Schifffahrer lehrte, indem dieselbe schon mehr als ein Jahrhundert früher bekannt war. Nicht blos, dass *Guyot de Provins* und *Gaultier d'Espinois* zwischen 1180 und 1205, der Letztere seine Geliebte dem Polarsterne vergleicht, nach welchem sein Herz magnetisch hinneigt, der Erstere den Papst gern zu einem sicheren Richtungspunkte gemacht haben möchte, wie es der Nordpol dem Schifffahrer sei mit Hilfe des Magneten; nicht blos, dass *Brunetto Latini*, der Lehrer Dante's, die Beschreibung des *Guyot de Provins* aus der gereimten Sprache in Prosa übersetzt und deutlich beschreibt, wie der Magnet, ein hässlicher schwarzer Stein, mit einem Holzsplitter in Verbindung gesetzt, auf dem Wasser schwimme und dabei constant nach Norden zeige; auch eine weit vollkommenere Gestalt des Kompasses ist am Ende des S. XII bereits bekannt. *Alexander Neckam* von St. Alban, welcher 1180—1187 zu Paris lehrte, dann in seine Heimath zurückkehrte und 1217 in Kemsey bei Worcester starb, hat in einer von Herrn *Thomas Wright* herausgegebenen und am Anfange der *Library of national antiquities* abgedruckten *Somma de utensilibus* unter den bei Schiffausrüstungen unentbehrlichen Instrumenten auch die Magnetnadel genannt, welche, auf eine Spitze aufgesetzt, um dieselbe oscillire, bis sie endlich in nördlicher Richtung stehen bleibe. *D'Avezac* ist geneigt, bis in eben jene Zeit die Erfindung eines kleinen Behälters für die schwingende Magnetnadel hinaufzurücken, welches *pixidula* oder *buxula* hiess, und aus dem letzteren Worte entstand zweifellos der moderne Name Boussole. Woher alle diese Kenntnisse stammen, ist zweifelhaft. Wohl kannten die

Chinesen um das Jahr 100 eine kompassartige Vorrichtung, allein Mittel und Wege der Uebertragung nach Europa sind durchaus hypothetisch. Wollte man z. B. die Araber als die Vermittler ansehen, so spricht dagegen, dass der erste Schriftsteller dieser Nation, bei welchem man bisher die Beschreibung der auf Wasser schwimmenden nach Norden gerichteten Magnetnadel fand, erst 1242 schrieb und die Richtungskraft als eine Entdeckung des Aristoteles bezeichnet, woraus mindestens der Schluss gerechtfertigt erscheint, dass jener arabische Schriftsteller aus occidentalischen Quellen schöpfte. Wieder einige Jahre später schrieb ein französischer Ritter-Pilger, *Pierre de Maricourt*, genannt *Petrus Peregrinus Maricurtensis*, wahrscheinlich während der Belagerung von *Lucera*, dem alten *Nuceria* in Apulien, eine den 8. August 1268 vollendete Abhandlung *de magnete* an seinen Freund *Syger de Foucaucourt*. Diese Abhandlung existirt in mehreren Handschriften, sowie sie auch verschiedentlich abgedruckt wurde. Eine Beschreibung der Handschrift hat aus *Epistola Petri ad Sygerum* die *Epistola Petri Adsigerii* gemacht, und von da an geht durch die Geschichte des Magnetismus der Schriftsteller *Adsigerius*, bis Wenckebach ihn in dem obengenannten sehr lesenswerthen Aufsatze wieder vernichtete. Ob, wie *D'Avezac* zu glauben geneigt ist, schon *Petrus Peregrinus* die Declination der Magnetnadel kannte, scheint nach Wenckebach weniger wahrscheinlich. Muthmasslich war Christoph Columbus der Entdecker dieser merkwürdigen Eigenschaft, welche alsbald auch politische Bedeutung gewann, indem die sogenannte Linie ohne Declination als ideale Demarcationslinie spanischer und portugiesischer Entdeckungsoccupationen festgesetzt wurde. Die Inclination der Magnetnadel wurde 1543 von dem Nürnberger Georg Hartmann entdeckt. CANTOR.

Die neueren Apparate der Akustik. Für Freunde der Naturwissenschaft und Tonkunst von Dr. FR. JOS. PISKO, Professor der Physik an der Communal-Oberrealschule auf der Wieden etc. Mit 96 in den Text aufgenommenen Holzschnitten. Wien, Verlag von Carl Gerold's Sohn. 1865.

Der Verfaser hat in seiner 268 Grossoctavseiten zählenden Schrift seine Studien über die Apparate der neueren Akustik niedergelegt. Wie aus dem Vorwort hervorgeht, hat derselbe die neueren Apparate der Akustik nicht nur aus den Originalschriften, sondern auch aus eigener Anschauung in der Industrieausstellung zu London im Jahre 1862, bei einem Besuche beim rühmlichst bekannten Verfertiger akustischer Instrumente König in Paris und durch eigene Versuche kennen gelernt. Seine Schrift ist so eingerichtet, dass derjenige, welcher die Fortschritte der Akustik in unserem Jahrhundert an der Hand der Experimente kennen lernen will, sie sicherlich

willkommen heissen wird. Das durchgängige Weglassen aller mathematischen Theorie gestattet ein schnelles Durchlesen der Schrift und die in dem ersten Capitel gemachte klare Auseinandersetzung der schönen Helmholtz-schen Arbeiten über Analyse und Synthese des Klanges durch Resonatoren und elektrisch bewegte Stimmgabeln führen den Leser, auch wenn er nur mit der Akustik der älteren Lehrbücher bekannt ist, rasch in die neueren Vervollkommnungen dieser Wissenschaft ein. Ganz vorzüglich empfiehlt sich die Schrift von Dr. Pisko zu Studien über die Akustik, weil derselbe auf den letzten 42 Seiten seines Buches die Citate der Originalabhandlungen für die einzelnen Capitel des Buches zusammengestellt hat und dabei auch dankenswerthe Rücksicht auf die ältere akustische Literatur genommen hat. Ingleichen nützlich muss es für das Studium wirken, dass der Verfasser überall die König'schen Apparate besonders betont und durch Abbildung dargestellt hat, denn er weist dadurch ebensowohl auf recht schätzenswerthe Apparate zur Darstellung der akustischen Erscheinungen, als auf ihre Bezugsquelle hin.

Den Inhalt des Buches ausser dem schon besprochenen 1. Capitel wird folgendes Verzeichniss möglichst bezeichnend angeben:

2. Capitel. Sirenen und Helmholtz' Doppelsirene zur Erzeugung der Summations- und Differenztöne.

3. Capitel. Graphische Aufzeichnung der Schwingungen von Stimmgabeln, Stäben, Membranen. Telephon von Reis.

4. Capitel. Optische Darstellung der Schwingungen tönender Körper durch die Lissajou'schen Figuren und durch die Kaleidophone.

5. Capitel. Erregung stehender Schwingungen an fädenförmigen Körpern durch Stimmgabeln nach Melde.

6. Capitel. Scheibler's Tonmesser und Stimmverfahren, Terquem's Stäbe.

7. Capitel. Wheatstone Erklärung von Chladni's Klangfiguren, König's Apparate zur Erläuterung dieser Erklärung.

8. Capitel. Chemische Harmonika, Flammenzeiger von König zur Aufsuchung von Knoten und Bäuchen in Pfeifen.

9. Capitel. Ermittelung der Schallgeschwindigkeit auf kleineren Strecken.

Der Verfasser hat es verstanden, den interessanten Stoff für das Studium vortrefflich herzurichten und wir wünschen deshalb eine recht fleissige Benutzung des Schriftchens von Seiten des wissenschaftlichen Publikums.

Dr. Kahl.

Die Physik, für den Schulunterricht bearbeitet von ALBERT TRAPPE, königlichem Professor und Prorector an der Realschule am Zwinger zu Breslau. Dritte wesentlich verbesserte und bereicherte Auflage. Breslau, Verlag von Ferdinand Hirt. 1865. 8. 296 S.

Es ist schon bei Besprechung der 2. Auflage des vorliegenden Werkchens (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1859, Lit.-Ztg. S. 29) von Herrn Dr. Hoffmann hervorgehoben worden, dass der Verfasser vorwiegend darauf bedacht gewesen ist, ein für den Schulunterricht geeignetes Buch zu liefern. Es wurde damals der Beachtung der Schulmänner empfohlen, weil es bei äusserst billigem Preise (25 Sgr.) doch die hauptsächlichsten Erscheinungen und Gesetze mit einer für die Repetition sehr geeigneten kurzen und prägnanten Darstellung enthält, durch die klein gedruckten Erklärungen und Fragen zum Nachdenken erregt, ohne durch peinliche Berücksichtigung aller nahe liegenden Beweise und Erklärungen den Stoff zu Aufgaben zu entziehen. Nach Durchlesung der gegenwärtigen Auflage des geschätzten Büchelchens ist hauptsächlich hervorzuheben, dass die pädagogischen Principien bei der erneuten Ausgabe zum Vortheile des Ganzen festgehalten worden sind, das Buch aber, wie der Herr Verfasser in seiner Vorrede auch bemerkt, Verbesserungen erfahren hat, auf die er beim Gebrauch des Buches und durch die Fortschritte der Physik geführt worden ist. Die wesentliche Erweiterung, die das Werkchen erfahren hat, besteht in der Aufnahme eines letzten Abschnittes als Anhang, in welchem die chemischen Erscheinungen in der Weise, wie beim Gymnasialunterricht, Berücksichtigung finden. Die chemischen Vorbegriffe, die Eigenschaften der Metalloïde und ihrer gewöhnlichsten Verbindungen, das Gesetz der bestimmten Gewichtsverhältnisse in den chemischen Verbindungen, sowie Allgemeines über die Metalle findet hier seinen Platz.

Ungeachtet dieser nützlichen Veränderungen ist der Preis beim Erscheinen der neuen Auflage nicht geändert worden; dieser Umstand in Verbindung mit den übrigen Vorzügen des Buches fordert aber aufs Neue zu verdienter Berücksichtigung beim Schulgebrauche auf. Dr. KAHL.

Bibliographie

vom 15. Februar bis 1. April 1866.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Cl. 17. Bd. Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1865. 2. Bd. 3. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern; aus d. J. 1865. Bern, Huber & Comp. 27 Ngr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. ⅔ Thlr.

Amtlicher Bericht über die 39. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Giessen 1864. Herausgegeben von Werner und Leuckart. Giessen, Ricker. 2 Thlr.

Polytechnische Bibliothek. Monatliches Verzeichniss der in Deutschland und dem Auslande neu erschienenen Werke aus den Fächern der Mathematik, Astronomie, Physik, Mechanik etc. 1. Jahrg. 1866. No. 1 und 2. Leipzig, Quandt & Händel. pro Jahrg. ⅔ Thlr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1868. Herausgegeben von W. Förster unter Mitwirkung von Powalky. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgeg. von J. A. Grunert. 45. Thl. 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgeg. von J. C. Poggendorff. Jahrg. 1866. No. 1. Leipzig, A. Barth. pro compl. 9⅓ Thlr.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques. Tome 19. *Paris.*

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de Petersbourg. VII. Série. Tome X, No. 1. Leipzig, Voss. 23 Ngr.

Annales de l'Observatoire impérial de Paris, publiées par U. J. Le Verrier. Observations. T. 20. 1864. *Paris, Mallet-Bachelier.* 40 frcs.

Reine Mathematik.

Matthiessen, L., Die algebraischen Methoden zur Auflösung der literalen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen. 1. Serie. Leipzig, Teubner. ½ Thlr.

Sohncke, L., *De aequatione differentiali seriei hypergeometricae* $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$. *Dissert. inaug. mathem. Halis.* Königsberg, Schubert & Seidel. 8 Ngr.

ALLÉ, M., Ueber die Entwickelung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten. Wien, Gerold. 4 Ngr.

POPPER, J., Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten. Wien, Gerold. 8 Ngr.

GRUNERT, J. A., Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Classen höherer Lehranstalten. 1. Thl. Gemeine Arithmetik. 2. Ausg. Brandenburg, Wiesike. 17½ Ngr.

STAMPFER, S., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst verschiedenen anderen nützlichen Tafeln und Formeln. 7. Aufl. Wien, Gerold. ⅔ Thlr.

NELL, A., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen etc. Darmstadt, Diehl. 24 Ngr.

SALMON, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, deutsch herausgegeben von W. FIEDLER. 2. Aufl. 1. Abth. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

WIEGAND, A., Analytische Geometrie für die oberen Classen höherer Lehranstalten. 2. Aufl. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

FRENET, M. F., *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.* 2. *Edition.* Paris und Leipzig, A. Dürr. 2 Thlr.

SERRET, J. A., *Cours d'Algèbre supérieure.* 3. *Edition. Tome I.* Ebendaselbst. 6⅔ Thlr.

HAMILTON, W., *Elements of Quaternions. London, Longman.* 25 sh.

KÖHLER, E. T., *Manuale logaritmico-trigonometrico.* 9. *Ediz.* 2. *Vers. ital.* Leipzig, Tauchnitz. 1 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Landestriangulation des Königreichs Preussen. Hauptdreiecke. 1. Thl. Hauptdreiecke in der Provinz Preussen, an der Weichsel und östlich derselben. Berlin, G. W. F. Müller. 2⅔ Thlr.

KOCH, L., Grundzüge der planimetrischen Triangulirung der Feldmarken mittelst Messung aller Dreieckseiten. Halle, Schmidt. ½ Thlr.

WOLF, W., Drei Vorträge über die Geschichte der praktischen Geometrie, gehalten in den Versammlungen des Vereines praktischer Geometer. Dresden, Expedition der Europäischen Modenzeitung. ⅔ Thlr.

SCHUBERT, F., Mathematische Geographie. Wien, Gerold. ⅓ Thlr.

ROSENAUER, J., Die astronomische Uhr am Rathhause zu Prag. Prag, Steinhauser. 4 Ngr.

LITTROW, K. v., Ueber eine Modification des Hansen'shen Registrirapparates. Wien, Gerold. 3 Ngr.

AUWERS, A., Reduction der Beobachtungen der Fundamental-

sterne am Passageninstrument der Sternwarte zu Palermo in den Jahren 1803—1805. Publication der astronomischen Gesellschaft. Leipzig, Engelmann. 2 Thlr.

Hertzer, H., Technische Tabellen. Berlin, Gärtner. 8 Ngr.

Sidler, G., Ueber die Wurflinie im leeren Raume. Bern, Dalp. 12 Ngr.

Köhler, W., Die mechanische Wärmetheorie in ihrer Anwendung auf Wasserdampf. Bielefeld u. Berlin, Calvary & Comp. ⅓ Thlr.

Gyldén, A., Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. (Petersburger Akad. 7. Serie, 10. Bd., No. 1.) Leipzig, Voss. 23 Ngr.

Scriptorum metrologicorum reliquiae. Collegit etc. F. Hultsch. Vol. 2. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

Hoüel, G. J., *Tables pour la reduction du temps en parties décimales du jour.* Publication der astronomischen Gesellschaft. Leipzig, Engelmann. ⅔ Thlr.

Navigation and nautical astronomy. New-York and London. 12 sh.

Physik.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausg. 5. Lief. Leipzig, Teubner. ⅚ Thlr.

Wittwer, W., Lehrbuch der Physik. Regensburg, Pustet. 1 Thlr.

Cornelius, C. S., Grundzüge einer Molecularphysik. Halle, Schmidt. 1 Thlr.

Schmidt, G., Ueber die Atomwärme. Wien, Gerold. 5 Ngr.

Dove, H., Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. 3. Aufl. Berlin, D. Reimer. 1½ Thlr.

Prestel, M., Die periodischen und nichtperiodischen Veränderungen des Barometerstandes, sowie die Stürme an der hannoverschen Nordseeküste. Emden, Haynel. 6⅔ Thlr.

Sartorius von Waltershausen, Untersuchungen über die Klimate der Gegenwart und der Vorwelt mit besonderer Rücksicht auf die Gletschererscheinungen in der Diluvialzeit. Von der Haarlemer Gesellsch. d. Wissensch. gekrönte Preisschrift. Haarlem, Erven Loosjes. 8 fl. 40 c.

Prestel, M., Die jährliche periodische Aenderung des atmosphärischen Ozons und die ozonoskopische Windrose als Ergebniss der Beobachtungen zu Emden von 1857—1864. Jena, Frommann. 16 Ngr.

Morris, A., *A Treatise on meteorology. London, Simpkin.* 3 sh. 6 d.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Ad. Quetelet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles* 1864. 8⁰. 464 Seiten.

Das Werk, über welches hier berichtet werden soll, vereinigt in sich alle Vorzüge, welche man von dem Verfasser zu rühmen weiss, mit den Mängeln, welche dem in dem Titel angegebenen Stoffe anhaften. Wer noch Zweifel hegt über Ausführbarkeit oder Unausführbarkeit des Gedankens, die Geschichte einer Wissenschaft in einem bestimmten Lande so zu schreiben, dass auch der Laie in der Geschichte, wenngleich nicht in der Wissenschaft, sie verstehe, der möge nur in dem uns vorliegenden Werke sich von der Unmöglichkeit dieses Vorhabens überzeugen. Der gegenseitige Einfluss der verschiedenen Völker auf einander im Allgemeinen, wie die besondere Einwirkung dieses oder jenes Gelehrten auf seine ganze Zeitgenossenschaft verbieten in gleicher Weise eine Localgeschichte der Wissenschaft zu schreiben. Muss doch, wenn ein solcher Versuch gewagt wird, entweder die Bedeutung auch auswärtiger Gelehrten in klares Licht gesetzt werden, und dann ist von keiner Localgeschichte mehr die Rede, oder aber es müssen einzelne Figuren einheimischer Gelehrten unverstanden von dem Leser sich herausheben ähnlich jenen erratischen Blöcken, welche nur im Zusammenhang mit entfernten Gebirgsformen sich erklären lassen. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich von selbst, dass dem Referenten eine Geschichte der Mathematik bei einzelnen Völkern nur unter der Voraussetzung denkbar ist, dass jene Völker sei es nun ganz selbstständig in ihren Erfindungen und Entdeckungen waren, oder doch nicht in immerwährendem Wechselverkehre mit anderen Völkern standen, bei denen eine ebenfalls eigenthümliche Entwickelung der Mathematik stattfand. Wir können uns also eine Geschichte der Mathematik bei den alten Indern, bei den Griechen, bei den Chinesen, bei den Arabern denken, aber wir begreifen nicht die Möglichkeit einer Geschichte der Mathematik in Italien, in Belgien, in Deutschland. Entweder gelangt man bei solchen Werken zu einer Parteilichkeit, von welcher Libri das entschiedenste Beispiel liefert, man lässt

alle Entdeckungen, die überhaupt je gemacht wurden, bei dem Volke der eigenen Vorliebe gemacht werden; oder aber, wenn der Verfasser die Wahrheitsliebe, die Unparteilichkeit, den reinen Eifer eines Quetelet besitzt, so wird das Werk leicht lückenhaft, oder wenigstens überaus ungleichartig in der Behandlung einzelner Zeiträume. Wir wollen damit durchaus nicht gesagt haben, das uns vorliegende Buch sei ohne Verdienst; nur wollten wir den Standpunkt kennzeichnen, von welchem es zu beurtheilen sein wird. Das Quetelet'sche Werk ist eine vortreffliche Sammlung von lose zusammenhängenden Studien über einzelne Männer, von eingehenden Referaten über ausserhalb Belgien selten zugängliche Schriften; es ist damit ein unentbehrliches Hilfswerk für den Historiker in den mathematischen Wissenschaften; aber man darf nicht glauben, dass man aus ihm ohne sonstige eingehende Studien Geschichte der Mathematik lernen oder nur verstehen könne.

Quetelet hat in seinem Buche 4 Abschnitte unterschieden. Der erste Abschnitt geht bis auf Kaiser Karl V., also etwa bis zum Jahre 1500; der zweite Abschnitt umfasst das 16. Jahrhundert und endet 1599 mit dem Uebergang der belgischen Regentenwürde an Erzherzog Albert und dessen Gemahlin Isabella; der dritte Abschnitt führt bis zur Gründung der kaiserlichen und königlichen Akademie zu Brüssel auf Befehl der Kaiserin Maria Theresia am 13. April 1773; endlich der vierte Abschnitt enthält die Zeit bis zur Entstehung des gegenwärtigen Königreiches Belgien, bis 1830.

In dem ersten Abschnitte finden wir eine vollständige Liste der Gelehrten der Lütticher Schule des S. XI (wie man sich etwa ausdrücken könnte) hervorzuheben; dann Nicolaus de Cusa, den gelehrten und freidenkenden Cardinal aus der Mitte des 15. Jahrhunderts, über dessen belgische Nationalität wir keinen Zweifel erheben wollen, da solche Streitfragen zu häufig wiederkehren würden. Die „Geschichte der Mathematik bei den Belgiern" hat nämlich ebensowohl denjenigen Gelehrten das Bürgerrecht verliehen, welche ausserhalb Belgien geboren in jenem Lande einen längeren Abschnitt ihres Lebens zubrachten, als auch solchen Gelehrten wirklich belgischer Geburt, welche im Auslande lebten und wirkten.

Der zweite Abschnitt enthält mehrere verdienstlich behandelte Schriftsteller. Wir nennen darunter der Zeitfolge nach Gemma Frisius, Gerhard Mercator, Adrian Romanus, Simon Stévin, Ph. van Lansberge als solche, deren Namen auch allgemeinerer Bekanntschaft sich erfreuen. Bei Gemma Frisius vermissten wir die Erwähnung seines für die damalige Zeit hervorragenden Rechenbuches, welches als *Methodus Arithmeticae practicae* seit 1540 mehrfach abgedruckt wurde. Herr Quetelet fasst dagegen Gemma nur als Astronomen und Geographen auf, wodurch freilich der Uebergang zu Mercator und dessen Freunden und Schülern, einem Judocus Hondius, einem Abraham Ortelius und Anderen, erleichtert wird, von denen mit Fug und Recht behauptet werden kann, sie

seien die Schöpfer der modernen Cartographie. Adrian Romanus (van Roomen) wird insbesondere um seiner Verdienste um die sphärische Trigonometrie wegen vorgeführt, Philipp van Lansberge wegen ähnlicher Untersuchungen, vor Allem wegen seiner Sinustafeln, welche schon 1591, also zwischen den gleichartigen Schriften von Vieta und Rhäticus, erschienen. Eine interessante Studie ist über den sogenannten „Almanach von Mathieu Laensberg" angestellt, dessen Zusammenhanglosigkeit mit dem berühmten Mathematiker dargethan wird. Bei Weitem der bedeutendste Gelehrte dieser Periode ist Simon Stévin. Herr Quetelet hat deshalb auch gewiss mit Recht seine Leistungen ausführlicher besprochen. Wir lernen Stévin als den Begründer der Statik der schiefen Ebene kennen, als den Entdecker des hydrostatischen Paradoxons, wonach der Druck einer Flüssigkeitssäule dem Producte der Höhe in die Grundfläche proportional ist, wie auch die Form des Gefässes sei, so dass eine geringe Menge Flüssigkeit den gleichen Druck auszuüben im Stande ist, wie eine grössere. Wir lesen ferner von seinem Segelwagen, von seinen praktischen Schleussenanlagen. Wir sehen aber auch Rechenkunst und Algebra durch ihn wesentlich gefördert, so durch die Bemühungen, welche er sich um Verbreitung der Decimalrechnung gab, so durch die Einführung von Potenzen mit gebrochenen Exponenten; und endlich finden wir Stévin als Begründer ganz neuer Betrachtungen in der Perspective, indem er die Aufgabe behandelt, den Augenpunkt und die Lagen der Figuren im Raume zu finden, für welche die eine gegebene Figur als perspectivisches Bild der zweiten gleichfalls gegebenen Figur erscheine; beiläufig bemerkt eine Leistung, deren Erwähnung wir in der *Histoire de la perspective* von Poudra (Paris 1864) vermissen.

Wir gelangen nun in unserem Referate zum dritten Abschnitte. Auch im 17. und 18. Jahrhundert weist die Geschichte der Mathematik bei den Belgiern Namen auf, welche sich Unvergesslichkeit erworben haben, oder zum Theile die Vergesslichkeit, welcher sie anheimfielen, nicht verdient haben. Von den Letzteren nennen wir D'Aiguillon, den Optiker, den Erfinder des Namens der stereographischen Projection, deren wichtigste Sätze er schon kannte; Le Poivre, den scharfsinnigen Geometer, welcher auf 61 Seiten die Lehre der Kegelschnitte vollständiger behandelte, als es vor ihm durch irgend einen Schriftsteller geschehen war; Tacquet, den Verfasser schätzenswerther Elementarwerke; Caramuel, den kriegerischen Bischof mit den kühnen, mitunter recht wenig theologischen Gedanken, unter dessen Schriften Herr Quetelet die *Mathesis biceps vetus et nova* zu nennen vergessen hat, welche sich mit dem Zahlensysteme beschäftigt, dessen Grundzahl die 2 ist; Van Langren, den genauen Selenographen, wahrscheinlich Erfinder der meisten Namen, unter welchen bis auf den heutigen Tag die hervorragenden Mondesstellen bekannt sind. Als Mathematiker ersten Ranges sind und bleiben anerkannt der Jesuit Gregorius von

St. Vincent und der Lütticher Canonikus De Sluze. Wenn ein Leibnitz schon Gregorius von St. Vincent mit Descartes und Fermat in eine Linie stellte und diesem Triumvirate einen grösseren Einfluss auf die Fortschritte der mathematischen Wissenschaften zuschrieb, als selbst der Schule von Galilei und Cavalleri; wenn Descartes und Huighens, die entschiedenen Gegner des Gregorius, in ihren Streitschriften gegen seine „Quadratur des Cirkels“ voller Achtung vor den Verdiensten desselben reden, so kann und muss man wohl das Urtheil der modernen Forschung billigen, welches Herr Quetelet in den Satz gefasst hat: *Le résultat de toutes ces querelles fut de reconnaître la fausseté de la solution et le génie mathématique de son auteur.* Man muss ebenso dem Ausspruche beipflichten, dass die *Quadratura circuli* als ein vollständiges Lehrbuch der damaligen höheren Geometrie anzusehen ist. Vielleicht weniger genial aber erfolgreicher in seinen Bemühungen war De Sluze, einer jener Vorgänger der grossen Erfinder der Infinitesimalrechnung, welche an einzelnen Aufgaben bereits in dunkler Vorahnung jene Methoden anwandten, die Leibnitz und Newton später zu einem einheitlichen Lehrganzen zusammenfassen sollten; De Sluze hat eigentlich das Tangentenproblem für seine Zeit bereits erschöpft. Es ist zu bedauern, dass Herr Quetelet die Besprechung dieses Autors im Wesentlichen darauf beschränkt, die Urtheile anderer Schriftsteller über ihn zusammenzustellen, so dass wir weder von seinen Lebensumständen mehr als die Daten seiner Geburt und seines Todes, noch von seinem *Mesolabium* mehr als den blossen Titel kennen lernen. Sollen wir aus diesem dritten Abschnitte noch eine anderweitige, allerdings mit Mathematik nur nebensächlich zusammenhängende Untersuchung anführen, so möchten wir auf die Schilderung des Aufenthaltes der Jesuiten und insbesondere belgischer Jesuiten in China aufmerksam machen.

Den vierten Abschnitt lässt Herr Quetelet 1773 beginnen, während die letzten Männer von irgend welcher Bedeutung, welche im vorhergehenden Abschnitte aufgezählt sind, nicht weiter als bis etwa zum Jahre 1700 herabführen. Schon daraus könnte man folgern, was zum Ueberflusse am Anfange des vierten Abschnittes noch besonders hervorgehoben ist, dass Belgien seit dem westphälischen Frieden und in Folge der damals stipulirten Schliessung der Schelde mehr und mehr verkam. Jene Bedingung, erfunden als Zügel französischer Ländergier, hatte den nicht beabsichtigten Erfolg, Handel und Wandel in den Südprovinzen der Niederlande lahm zu legen, und das arme Land, schon ausgesogen durch spanische Herrschaft und französische Kriegsheere, verlernte jetzt im täglichen Kampfe um die Mittel der Existenz jedes höhere Streben. Die Kaiserin Maria Theresia wurde durch Graf Cobenzl dazu gebracht, den Versuch zu machen, durch Gründung einer Akademie neue Männer in das Land zu ziehen und damit eine neue Anregung zu geben. Die Erweiterung dieser zuerst kleineren gelehrten Gesellschaft zur kaiserlichen und königlichen Akademie erfolgte

den 13. April 1773; die letzte Sitzung fand den 21. Mai 1794 statt. Nach der Vereinigung Belgiens mit Frankreich hörte die Akademie wieder auf, alles geistige Leben zog sich nach Paris, und erst 1816 begann mit der Neubegründung der Akademie den 7. Mai eine belgische Wissenschaft des 19. Jahrhunderts. Das Charakteristische dieser ganzen Periode bildet das gemeinsame Streben und Arbeiten innerhalb der gelehrten Gesellschaften. Herr Quetelet hat vollkommen Recht, wenn er sagt, die Geschichte der Künste und Wissenschaften der letzten Zeiten des vorigen Jahrhunderts falle in Belgien mit der Geschichte der Arbeiten der Brüsseler Akademie zusammen. Ja, man kann den gleichen Ausspruch auch für die Zeit seit 1816 gelten lassen, wenn man neben den Veröffentlichungen der Akademie noch die von Garnier und Quetelet, dann von dem Letzteren allein herausgegebenen 11 Bände der *Correspondance mathématique et physique* (1824—1839) nennt. Die Männer dieser vierten Periode gehören der jüngsten Vergangenheit, oder gar der Gegenwart noch an. Herr Quetelet hat die schwierige Aufgabe, ein Urtheil über Leistungen abzugeben, welche noch nicht der Geschichte angehören, mit Feinheit und anerkennendem Wohlwollen gelöst. Die Namen De Nieuport, Dandelin, Pagani, Plateau treten als Vertreter der mathematischen und physikalischen Wissenschaften hervor, und wenn nicht selten anonyme Arbeiten, wie z. B. über die Focale, über caustische Linien u. s. w., als Anlehnungspunkte für andere Gelehrten nur flüchtig erwähnt werden, so sind wir nicht genöthigt, die Bescheidenheit des Verfassers zu achten und seinen Namen gleichfalls zu verschweigen. Wir dürfen und müssen es aussprechen, Quetelet selbst ist der geistige Mittelpunkt des gelehrten Belgiens in diesem Jahrhunderte; seine Untersuchungen sind es, welche den Ausgangspunkt für die Arbeiten einer ganzen Schule von Mathematikern bilden; seine Ideen sind es, welche den gemeinsamen Arbeiten der Brüsseler Akademiker zu Grunde liegen.

Ueber diese gemeinsamen Arbeiten, welche im allgemeinsten Sinne des Wortes auf die Ermittelung der periodischen Veränderungen der Naturerscheinungen gerichtet sind, verbreitet sich noch ein Anhang des uns vorliegenden Werkes. Wir dürfen denselben als einen der gelungensten Theile bezeichnen, in welchem der Leser ebensowohl Aufschluss über bereits Geleistetes, als Anregung zu noch zu Ermittelndem in reichstem Maasse finden wird. Cantor.

Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Von Dr. C. Neumann, ordentlicher Professor an der Universität Tübingen. Leipzig, B. G. Teubner. 1866.

Nur wenige Zeit ist seit dem Erscheinen des Werkes von Durège über Riemann'sche Theorien verflossen, und schon wird uns unter dem obigen Titel ein neues geboten. Die Bezeichnung Vorlesung für die ein-

zelnen Abschnitte kann nicht wörtlich zu verstehen sein, denn es würde nicht möglich sein, in einer ja nur dreiviertelstündigen Vorlesung irgend einen dieser 12 Abschnitte vorzutragen. Referent glaubt, dass bei einer Vortragsweise in der Ausführlichkeit, wie sie in dem genannten Buche herrscht, ein Semester nicht genügen würde, auch bei mehreren Stunden wöchentlich, den gegebenen Stoff zu bewältigen. Diese sehr grosse Ausführlichkeit erscheint häufig auch etwas allzugross, ist aber wohl auch der einzige, sicher wenigstens erheblichste Vorwurf, den man dem Werke machen kann. Diese Breite der Behandlung geht ziemlich gleichmässig durch alle Abschnitte; wenigstens kann hier nicht, wie dies bei dem Werke von Durège der Fall war, der Vorwurf erhoben werden, dass die schwereren Partien in undeutlicher Kürze behandelt werden. Im Gegentheil sind gerade in diesen späteren Vorlesungen die Beweise entweder ganz neu oder so geschickte Umänderungen der alten, dass die Einsicht sehr erleichtert wird. Wie Durège, so hat auch der Verfasser dieses Buches die Absicht, die Kenntniss der Methoden Riemann's auch schon Anfängern zu ermöglichen. Dies ist in diesem Buche aber auf eine viel vollständigere Art erreicht, indem die Entwickelungen bis mit der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale von dem Gebrauche des Dirichlet'schen Princips freigehalten sind; dies ist immer eine schwierige Stelle und erschwert das Weiterdringen in diese Theorien immer ausserordentlich. Diese Weglassung des Dirichlet'schen Princips erforderte Ergänzungen in mehreren Abschnitten; so hauptsächlich lassen die Betrachtungen der 7. Vorlesung auf p. 279 ff. erkennen, dass für eine Lösung des Umkehrungsproblems das genannte Princip nicht unumgänglich nothwendig ist. Mittelst des Dirichlet'schen Princips lässt sich nämlich zeigen, dass es auf einer $2p+1$ fach zusammenhängenden Fläche p endlich bleibende eindeutige Integrale giebt; aus dem Satze p. 282 folgt, dass die $2p$ imaginären Periodicitätsmoduln (welche ja p complexen Constanten äquivalent sind) ein Integral bestimmen; diese Moduln brauchen aber nach diesem Satze nicht willkürlich wählbar zu sein. Letzteres zeigt sich aber durch die Form der endlich bleibenden Integrale, da man immer p derselben angeben kann. Diese Betrachtungen müssen als ein wesentlicher pädagogischer Fortschritt in der Darstellung der Riemann'schen Theorien gelten.

Ein glücklicher Griff ist es auch wohl, welcher die polaren Unstetigkeiten aus den übrigen heraushebt. Sind dieselben eben auch nichts anderes als Unendlichkeiten, für welche endliche, also bei eindeutigen Functionen ganzzahlige Ordnungszahlen existiren, so setzt doch die Definition: „Der reciproke Werth der Function ist im Pole stetig“, ihre Eigenschaften in ein helles Licht. Die Sätze für stetige Functionen gelten zum Theil noch, wenn polare Unstetigkeiten zugelassen werden; dies zeigt besonders der Satz auf p. 99, ein Satz, welcher von grosser Wichtigkeit und der zahlreichsten Anwendungen fähig ist.

Viele der einzelnen Sätze, die sich zerstreut in allen Kapiteln finden, hätten hingegen getrost wegbleiben können sammt ihren Entwickelungen, so der grosse Satz p. 102, der vollständig selbstverständlich ist. Entwickelungen dieser Art können leicht das Interesse des Lesers abstumpfen, namentlich wenn demselben die Uebung fehlt, so Unwesentliches gleich schnell zu übersehen. Ebenso hätten die Abschnitte 5 bis mit 8 der dritten Vorlesung, ohne dass der Deutlichkeit Schaden geschehen wäre, sehr zusammengezogen werden können. Bemerkenswerth ist wieder der 9. Abschnitt dieser Vorlesung (p. 126 ff.), dessen Inhalt später vielfach benutzt wird.

Fahren wir jetzt in der Besprechung der einzelnen Vorlesungen fort. Die Dritte, eben behandelte, war diejenige, die zuerst zu Bemerkungen Veranlassung bot, da die ersten beiden zu bekannte Sachen geben, die aber dennoch in einem Lehrbuche nicht fehlen durften, zumal der in der 2. Vorlesung gegebene Beweis für das Fundamentaltheorem bestimmter Integrale von Riemann herrührt und daher wohl, in seiner von früheren Beweisen so abweichenden Form, der Riemann'schen Theorie zugezählt werden darf.

Die Auftragung der Punkte einer Ebene auf eine Kugel im 1. und 2. Abschnitt der 4. Vorlesung durch Projection empfiehlt sich durch ihre Anschaulichkeit; der Satz aber auf p. 149 ist wieder absolut selbstverständlich; da nämlich mit x und y sowohl die Coordinaten eines Punktes der Ebene, als auch gleichzeitig die des entsprechenden Punktes der Kugel bezeichnet sind (siehe p. 146) und die Coordinaten des entsprechenden Punktes der Antipodenebene dann bestimmt sind durch

$$(x + yi)(x' + y'i) = 1,$$

so ist es einmal ganz klar, dass eine Function f von $x + yi$ auf der Kugel auch eine solche auf der Ebene und als $f\left(\frac{1}{x' + y'i}\right)$ auch Function von $x' + y'i$ ist.

Originell erscheint im 3. Abschnitt (p. 149 ff.) die Begründung eines Fundamentalsatzes der Functionentheorie, nämlich des Satzes: Eine überall endliche, eindeutige und stetige Function ist eine Constante. Naturgemässer und einfacher ist wohl die früher gebräuchliche Begründung des Satzes, indess ist dieser Beweis wohl gewählt, um die Benutzung des Satzes von p. 128 zu erläutern, welcher Satz auch später vielfach wieder benutzt wird.

In der 5. Vorlesung ist wieder empfehlenswerth der 1. Abschnitt, über die Gestalt der Riemann'schen Flächen, welcher die spätere Benutzung dieser letzteren durch seine grosse Anschaulichkeit jedenfalls sehr erleichtert. Dagegen nimmt der Inhalt des 2. bis 5. Abschnittes wohl wieder ungebührlich viel Raum ein; der 6. Abschnitt zeigt in deutlichster Weise die Möglichkeit, für jede algebraische Function die Riemann'sche Fläche zu construiren, auf welcher diese Function einwerthig und stetig aufgetragen werden kann.

Die 6. Vorlesung beschäftigt sich damit, zu zeigen, wie Theile Riemann'scher Flächen, welche nur einen Windungspunkt enthalten, durch Transformationen in andere und speciell in Elementarflächen verwandelt werden können. Diese Betrachtungen sind wichtig, weil sie erlauben, Sätze, die früher als Functionen des Ortes in einer einblättrigen Fläche entwickelt waren (für innerhalb der Grenzen der Fläche eindeutige Functionen von $x+yi$), auf Functionen des Ortes einer mehrblättrigen Fläche zu übertragen. Denn die Transformationen (siehe p. 227 ff.) sind so beschaffen, dass die unabhängig Veränderliche $x+yi$ durch $\xi+\eta i$ ersetzt wird, welches mit dem $x+yi$ so zusammenhängt, dass jede Function von $x+yi$ auch eine solche von $\xi+\eta i$ wird.

Die Uebertragung dieser Sätze findet in der 7. Vorlesung statt. Man sieht daher, wie die 6. Vorlesung einen Theil der Betrachtungen ausmacht, welche das Dirichlet'sche Princip entbehrlich erscheinen lassen. Wir glauben die Pflicht zu haben, auf alle diese Punkte aufmerksam zu machen, um zu zeigen, wie vielfache neue Gedanken nöthig waren, um ohne dies Princip ans Ziel zu gelangen und wie hoch daher dieser Fortschritt in der Darstellung nicht nur in Folge seiner Wichtigkeit für Lernende, sondern auch in Bezug auf die Schwierigkeit der Ausführung beurtheilt werden muss.

In der 7. Vorlesung ist, ausser der schon besprochenen Uebertragung einiger Sätze über eindeutige Functionen auf mehrdeutige (p. 244, 245, 246), auch eine von der Riemann'schen Definition der Fassung nach verschiedene Erklärung des Begriffes: Null oder unendlich erster Ordnung gegeben. Sie würde noch empfehlenswerther sein, als sie durch ihre Anschaulichkeit und Fasslichkeit ist, wenn sie, um nicht Zweifel an ihrer Eindeutigkeit übrig zu lassen, nicht doch noch der Riemann'schen Definition nöthig hätte (vergl. die Note von p. 242 und p. 248—249).

Vielleicht der wichtigste der anfänglichen Sätze der Functionentheorie, dass überall endliche, stetige und eindeutige Functionen Constanten sein müssen, wird in dem 6. Abschnitt (p. 274) auf mehrdeutige Functionen verallgemeinert, indem die symetrischen Functionen in Betracht gezogen werden, zu denen die verschiedenen Zweige der mehrdeutigen Function führen. Diese einfache Betrachtung führt dazu, auch algebraische Functionen, wie früher rationale, durch ihre Null- und Unendlichkeitspunkte zu bestimmen (siehe den Satz p. 276).

Der 6. Abschnitt enthält ausser diesen leicht beweisbaren Sätzen auch noch den verwickelteren Beweis des schon oben erwähnten Satzes über die Bestimmung der endlich bleibenden Integrale durch die imaginären oder reellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln, eine Anwendung des Satzes von p. 128.

Endlich werden die Sätze, die sich nur auf algebraische Functionen beziehen, zum Abschluss gebracht durch den 7. Abschnitt dieser 7. Vorlesung und zwar mit dem Satze auf p. 290, und es ist nur noch eine vor-

bereitende Vorlesung nöthig, um dann das Umkehrungsproblem in Angriff nehmen zu können.

Dies ist die 8. Vorlesung, welche über die Zerlegung der Riemann-schen Flächen und Zurückführung mehrfach zusammenhängender Flächen auf einfach zusammenhängende vermittelst der Querschnitte handelt. Diese Vorlesung darf als ein Muster von Deutlichkeit gelten. Trotzdem, dass der hier behandelte Gegenstand wohl zu denen gehört, welche das Studium der Riemann'schen Theorien als besonders schwer erscheinen lassen, ist hier nirgends Strenge und Klarheit zu vermissen. Wohl hätte sich der Verfasser die Einführung des Wortes „Strom" ersparen können, welches hier ganz und gar überflüssig ist, da es dasselbe sagen soll, wie das schon bekannte Wort Querschnitt, aber bei weitem nicht so gut gewählt ist, als dieses letztere Wort. Der Beweis für die Constanz der Zahl p oder auch $\nu - \alpha$ (p. 297) ist sehr abweichend von den durch Riemann bekannten Beweisen, und der Beweis für die Formel

$$2p = \omega - 2n + 2$$

auf p. 310 ff. ist eine sehr geschickte Abänderung des Beweises, den Riemann in seinen Vorlesungen gegeben hat. Nur der 6. Abschnitt über Integrale $\int F\,df$ erscheint mir deutlicher und besser darstellbar zu sein, indem man das Kennzeichen für die Eindeutigkeit dieses Integrales innerhalb $\mathfrak{S}$ auf die Betrachtung der Endlichkeit der unbestimmten Integralfunction stützt. Diese kann für jeden Punkt a immer auf blosse Betrachtung der Potenzen von $z - a$ gegründet werden, die in F und f enthalten sind. Der Satz auf p. 335 und dieser ganze 6. Abschnitt scheint mir zweckmässiger durch die Betrachtungen ersetzt werden zu können, die ich in Schlömilch's Journal Jahrg. X, p. 172 angestellt habe.

Die 9. Vorlesung, die Darstellung der elliptischen Functionen durch ϑ-Functionen enthaltend, giebt zu keinen Bemerkungen Veranlassung.

In der 10. Vorlesung ist zu loben, dass die beiden Hauptarten, in denen den Riemann'schen Betrachtungen zu Folge die ϑ-Functionen zur Darstellung algebraischer Functionen benutzt werden können, schon durch die beiden auf p. 393 gegebenen Formulirungen des Umkehrungsproblems angedeutet werden. Nach Riemann kann man nämlich

$$\vartheta\left(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} \ldots u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right)$$

sowohl als Function der gemeinschaftlichen oberen Grenze der $u_1 \ldots u_p$, oder auch als Function der p Punkte betrachten, über welche jede der p Summen

$$\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} \ldots \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}$$

ausgedehnt ist. Dieser Unterschied ist auch in den beiden Problemen auf p. 393 das Wesentliche.

Zu tadeln hingegen ist die Einführung anderer Bezeichnungen und anderer Buchstaben, als der Riemann'schen; so ist die Bezeichnung der Functionen φ nicht beibehalten, welche die Zähler der endlich bleibenden Integrale bilden und es ist der Buchstabe s für p gebraucht. Letzteres ist um so mehr zu tadeln, als s bei Riemann eine so fest bestimmte Bedeutung, die der algebraischen Function hat, welche die Verzweigungsart der endlich bleibenden Integrale bestimmt.

Die additiven Constanten in den endlich bleibenden Integralen bestimmt der Verfasser durch eine andere Regel, als die von Riemann gegebene, nämlich durch die p. 405. Da aber die Riemann'sche Bestimmung so geschickt bequem gewählt ist, dass jede davon dem Wesen nach verschiedene zu verwerfen wäre, so hat auch der Verfasser seine Bestimmung so eingerichtet, dass sie dem Inhalte nach mit der Riemann'schen harmonirt. Die Fassung aber dieser Bestimmung macht es später, im 11. Kapitel, nöthig, die eminent weitläufigen Rechnungen von p. 467 bis p. 484 durchzuführen, um in der Folge auch zeigen zu können, dass bei dieser Bestimmung der Anfangswerthe

$$\vartheta\,(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{\mu} \ldots u_p - \sum_1^p \alpha_p^{\mu})$$

in den p durch die oberen Indices unterschiedenen Punkten verschwindet.

Offenbar sind die Riemann'schen Betrachtungen im §. 23 seiner Abhandlung unendlich einfacher; es hätte, um diese im Lehrbuch anbringen zu können, nur bedurft, den Satz des §. 16 über $p-1$ durch gegebene $p-1$ Punkte bestimmte Punkte durch frühere Betrachtungen bei Gelegenheit einer Untersuchung über das Additionstheorem Abel'scher endlich bleibender Integrale etwas strenger zu beweisen, als dies im §. 16 bei Riemann geschieht. Ich habe hierüber schon eine Notiz ausgearbeitet, die ich bald veröffentlichen werde.

Im Uebrigen kann man dem Verfasser dankbar sein für den die hyperelliptischen Integrale betreffenden Satz, welcher in der durch die citirten Betrachtungen bewiesenen Harmonie der Bestimmungen für die additiven Constanten enthalten ist; die Bestimmung durch p. 405 ist für mich nicht Ausgangspunkt, sondern ein Lehrsatz, der sich allerdings auch durch viel einfachere Betrachtungen über Charakteristiken beweisen lassen wird.

Bei dieser Beurtheilung der 10. Vorlesung kamen wir schon auf einiges in der 11. enthaltene. Indess verdient an dieser Vorlesung etwas ganz besonders hervorgehoben zu werden.

Der von Riemann in §. 22 seiner Abhandlung gelieferte Beweis des Satzes, dass

$$\vartheta\,(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} \ldots u_p - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)})$$

nothwendig in den p Punkten α verschwindet, ist, wenn nicht einige Be-

merkungen hinzugefügt werden, unvollständig; aus den Betrachtungen Riemann's folgt durchaus nicht, dass

$$(c_1 \dots c_p)$$

nur auf eine Weise

$$(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} \dots \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)})$$

congruent gesetzt werden kann.

Riemann selbst hat in Bezug auf diesen Gegenstand im 2. Hefte des 65. Bandes des Journals von Crelle eine Bemerkung gegeben. Dieser Punkt findet sich aber auch schon durch den Verfasser erledigt, dessen Werk vor diesem Riemann'schen Aufsatze erschienen ist. Dies bildet hauptsächlich, nachdem die Gleichungen 2) bewiesen sind, den Gegenstand des 6. Abschnittes dieser Vorlesung.

Der Gegenstand der 12. Vorlesung, die Ausführung und Auflösung des Umkehrungsproblems, hat nunmehr keine Schwierigkeiten und bietet zu Bemerkungen an diesem Orte keine Gelegenheit.

Dem vorliegenden Werke konnten mit gutem Rechte erhebliche Lobsprüche zuertheilt werden. Schade, dass die eminente Breite der Behandlung voraussichtlich das Studium desselben sehr erschweren wird. Diese Breite hat es auch dem Verfasser unmöglich gemacht, Vieles mit aufzunehmen, was bei einem umfangreicheren Lehrbuche Riemann'scher Theorien höchst erwünscht gewesen wäre, z. B. die Darstellung der Integrale dritter und zweiter Gattung und namentlich, was sehr zu vermissen ist, ein Kapitel über das Additionstheorem.

Soll ein Lehrbuch dieser Art wirklich geeignet sein, erhebliche Propaganda für die Riemann'schen Theorien zu machen, diesem grossen Meister zahlreiche Schüler zuzuführen, so muss wenigstens gezeigt werden, wie man den Inhalt der *Fundamenta nova etc.* Jacobi's mit so eminenter Kürze aus diesen Functionssätzen entwickeln kann. Ein Buch dieser Art zu schreiben würde der Verfasser jedenfalls ausserordentlich befähigt sein; aber die erste Anforderung neben Klarheit wäre Kürze.

Halle a./S., im Mai 1866. G. Roch.

Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen. Von Dr. C. Neumann, ordentlicher Professor an der Universität Tübingen. Leipzig, B. G. Teubner. 1866.

Im Anschluss an seine „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“ hat Professor C. Neumann eine kleinere Schrift unter dem obigen Titel erscheinen lassen.

Im ersten Abschnitt werden nur, nach dem Ausdruck des Verfassers, Elementarflächen betrachtet; hierbei sind die Beweisführungen Riemann's

fast genau in umgekehrtem Gedankengange vorgeführt. Zunächst wird gezeigt, dass auf Kreisflächen eine Function immer den Bedingungen auf p. 8 gemäss bestimmt werden kann. Dann wird gezeigt, dass es nur eine solche Function giebt und zuletzt, dass nur diese eine Function $\Pi(U)$ (in der Bezeichnung des Verfassers) zum Minimum macht. Zu tadeln ist, dass der Verfasser so häufig ohne Grund andere als Riemann'sche Bezeichnungen wählt.

Diese Umkehrung des Gedankenganges von Riemann hat einen Vortheil. Riemann geht vom Minimum von $\Omega(\alpha)$ [entsprechend $\Pi(\alpha)$] aus. Dazu muss vorausgesetzt werden, dass es überhaupt stets Functionen α giebt, welche $\Omega(\alpha)$ endlich lassen. Dies ist an und für sich nicht evident und ehe dies nicht klar gemacht ist, kann nicht von einem Minimalwerth von $\Omega(\alpha)$ oder einem Specialwerth u von α gesprochen werden. Dies entscheidet sich beim Verfasser von selbst durch Darstellung des u, welches $\Omega(u)$ endlich lässt.

Auf p. 13 geht der Verfasser zu beliebig gestalteten Elementarflächen über. Hier, oder schon vorher, bei Betrachtung von $\Pi(U)$, wäre es wünschenswerth, Einiges darüber zu erwähnen, warum für die Endlichkeit von $\Pi(U)$ nur die Stetigkeit von U (im Sinne von p. 46 der Vorlesung), nicht aber die der Differentialquotienten 1. Ordnung verlangt ist. Bei der vom Verfasser am genannten Orte gegebenen Definition von Stetigkeit büssen nämlich möglicherweise längs ganzer Linien oder in einzelnen Punkten die ersten Differentialquotienten ihren Sinn ganz ein, ohne unendlich zu werden und es müsste erwähnt werden, dass die Grösse $\Pi(U)$ trotzdem einen bestimmten Werth behält.

Alsdann wäre noch wünschenswerth, die Existenz von Functionen U zu beweisen, die in einer beliebigen Fläche im Neumann'schen Sinne stetig sind und überall endliche erste Differentialquotienten besitzen. Denn bei der Neumann'schen Definition von stetig (siehe Vorlesung p. 46) können offenbar $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ unbeschadet der Stetigkeit von U unendlich sein. Daraus, dass die Existenz solcher Functionen für Kreisflächen bewiesen ist, folgt nicht ihre Existenz für beliebig gestaltete Flächen. Die Ausfüllung aller dieser Lücken ist sehr einfach und geübteren Lesern dürften sie gar nicht als Hinderniss des Verständnisses erscheinen. Das U, welches $\Pi(U)$ zum Minimum macht, muss dann nach Neumann die Function u mit den Eigenschaften sein, wie sie auf p. 16 angegeben sind.

Nach Beifügung der vorhin gewünschten Vervollständigungen wäre, nach der Meinung des Referenten, dieser Beweis vollständig in Ordnung und müsste namentlich für den Vortrag dem Riemann'schen vorgezogen werden.

Referent will nicht weiter angeben, in welcher Weise diese Sätze auf beliebige Riemann'sche Flächen übertragen werden. Dieser Weg ist sehr lang und es scheint sehr wünschenswerth, ihn überflüssig zu machen dadurch, dass man den Riemann'schen Beweis in seinen Einzelheiten weiter ausbildet.

Halle a./S., den 22. Mai 1866. G. Roch.

Bibliographie

vom 1. April bis 1. Juni 1866.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1866. 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 2 Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayr. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1866. 1. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. E. A. Zuchold. 15. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1865. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 9 Ngr.

Reine Mathematik.

Riemann, B., Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen. Berlin, G. Reimer. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Borchardt, C. W., Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Inhalt seiner vier Seitenflächen. (Akad.) Berlin, Dümmler. 8 Ngr.

Gernerth, A., Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und Winkelfunctionen. Wien, Bock. 1 Thlr.

Breymann, C., Tafeln der fünfstelligen Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen etc. Wien, Braumüller. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Förster, Darstellung der elementaren Theorie der Maxima und Minima. Güstrow und Berlin, Calvary & Comp. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Ribi, D., Aufgaben über die Elemente der Algebra. 4 Hefte. Bern, Dalp. 12 Ngr.

—— —— Auflösungen dazu. 1. Heft 8 Ngr., 2. Heft 6 Ngr.

Falke, J., Propädeutik der Geometrie. Leipzig, Quandt & Händel. 1 Thlr.

DILLING, A., Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der rechnenden Stereometrie. Halle, Schmidt. 1⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

WINCKLER, A., Allgemeine Sätze zur Theorie der unregelmässigen Beobachtungsfehler. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

NIEMTSCHIK, R., Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen. (Akad.) Ebendas. 16 Ngr.

LIPPICH, F., Ueber einen neuen Fallapparat. (Akad.) Ebendas. 12 Ngr.

FRIESACH, K., Beschreibung einer Tabelle zur Erleichterung der Schifffahrt im grössten Kreise. (Akad.) Ebendas. 1⅓ Ngr.

FRISCHAUF, J., Bahnbestimmung des Planeten (67) Asia. (Akad.) Ebendas. 6 Ngr.

LÜBSEN, H. B., Einleitung in die Mechanik. 2. Aufl. Leipzig, Brandstetter. 2 Thlr. 8 Ngr.

RZIHA, E., Theorie der Minen, basirt auf die Wellenbewegung in concentrischen Kugelschichten. Lemberg und Wien, Seidel & Sohn. 2 Thlr.

BRAVAIS, A., *Etudes cristallographiques. Paris, Gauthiers-Villars.* 20 frcs.

Physik.

WÜLLNER, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausg. 6. und 7. Lief. Leipzig, Teubner. à ⅔ Thlr.

KIRCHHOFF, G., Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. 1. Thl. 3. Abdr. Berlin, Dümmler. 1⅓ Thlr.

ZÖPPRITZ, K., Die neueren Anschauungen vom Wesen der Wärme. Tübingen, Fues. 5½ Ngr.

KÖHLER, W., Die mechanische Wärmetheorie in ihrer Anwendung auf permanente Gase. Berlin, Calvary & Comp. 8 Ngr.

ROHRER, M., Beitrag zur Meteorologie und Klimatologie Galiziens. Wien, Gerold. 16 Ngr.

EULER, L., *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique, accompagnées de l'éloge d'Euler par Condorcet, avec une introduction et des notes par E. Saisset.* 2 *Vol. Paris, Charpentier.* 7 frcs.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1865.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abel'sche Functionen.

1. Ueber die Transformationen der Abel'schen Functionen erster Ordnung. Koenigsberger. Crelle LXIV, 17.
2. *Sur la transformation des fonctions abéliennes.* *Gordan.* *Compt. rend. LX,* 529.

Analytische Geometrie der Ebene.

3. *Equazioni finite ed equazioni differenziali di alcune curve derivate.* *Tortolini.* *Annali mat. VI,* 88.
4. *Sur la résolution numérique des équations du cinquième degré.* *Montucci.* *Compt. rend. LX,* 440, 846.
5. *Alcune proprietà delle curve algebriche rappresentate dall' equazione polare:* $r^{2n} = A.(\cos\Theta)^2 + B.(\sin\Theta)^2$. *Tortolini.* *Annali mat. VI,* 150.
6. Ueber die Linien, welche die Tangenten einer Curve unter constantem Winkel schneiden. Boeklen. Grun. Archiv XLIII, 14.
7. *De locis geometricis punctorum in plano trianguli quae singularia vocantur.* Lindman. Grun. Archiv XLIII, 350.
8. *Sull' equazione della curva piana, luogo geometrico di un punto dal quale, condotte due tangenti a due circoli di egual raggio, il loro prodotto sia costante.* *Tortolini.* *Annali mat. VI,* 169.
9. *Sopra alcune proprietà di una curva trascendente.* *Egger.* *Annali mat. VI,* 21. [Vergl. Bd. X, No. 13.]
10. Ueber einen Satz von Beltrami, den gemeinsamen Durchschnitt dreier Linien betreffend. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 102. — C. Schmidt ibid. 290. — Koenig ibid. 349. — Beltrami ibid. 482.

    Vergl. Brennpunkte, Ellipse, Elliptische Functionen 60, Evolution 61, 63, Hyperbel, Kegelschnitte, Kreis, Krümmung 131, Parabel, Singularitäten.

Analytische Geometrie des Raumes.

11. *Sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes.* *Dieu.* *N. ann. math. XXIV,* 165.
12. *Analogie de la géométrie du plan à celle de l'espace.* *P. Serret.* *N. ann. math. XXIV,* 145, 193.
13. *Sur les coordonnées orthogonales.* *Darboux.* *Compt. rend. LX,* 560.
14. *Etude des diamètres rectilignes des lignes et des surfaces en général.* *Le Cointe.* *Compt. rend. LX,* 1083.
15. Ueber Curvenbüschel, die sich gegenseitig berühren. Bischoff. Crelle LXIV, 185.
16. *Surface développable circonscrite à deux surfaces homofocales du second degré.* *M. Cornu.* *N. ann. math. XXIV,* 121.
17. *Sections circulaires du tore.* *Godart.* *N. ann. math. XXIV,* 159.

18. *Théorème sur la tétraèdre.* Rubini. *N. ann. math. XXIV*, 76.
Vergl. Ellipsoid, Geodätische Linien, Kegelschnitte 120, Krümmung 127, 128, 130, Oberflächen, Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

19. Zur Berechnung der Monddistanzen. Ligowski. Grun. Archiv XLIII, 335.
20. *Recherches supplémentaires sur les inégalités de la longitude de la lune dues à l'action perturbatrice du soleil.* Delaunay. *Compt. rend. LX*, 191.
21. *Sur l'accélération du moyen mouvement de la lune.* Allegret. *Compt. rend. LX*, 1092, 1242, 1245.

B.

Ballistik.

22. Ueber das ballistische Problem unter Voraussetzung eines der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstandes. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 210.
23. Elementare Behandlung des ballistischen Problems. Gretschel. Grun. Archiv XLIII, 341.
Vergl. Hyperbolische Functionen.

Bestimmte Integrale.

24. Ueber einige allgemeine Integralformeln. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 152.
25. Ueber die Integrale $\int_0^\infty e^{-2\beta t}\cos(\alpha^2 t^2)\,dt$ und $\int_0^\infty e^{-2\beta t}\sin(\alpha^2 t^2)\,dt$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 76.

Brennpunkte.

26. Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte. Siebeck. Crelle LXIV, 175.
Vergl. Parabel 170.

C.

Cartographie.

27. *Sur la construction des cartes géographiques.* Tissot. *Compt. rend. LX*, 933.
28. *Recherches de M. Collignon sur la représentation plane de la surface terrestre.* Bertrand. *Compt. rend. LX*, 762.

Combinatorik.

29. *Mémoire relatif au problème du cavalier.* Geynet. *Compt. rend. LX*, 484.
30. *Sur la détermination des nombres de valeurs, que prennent les fonctions par les permutations des lettres, qu'elles renferment.* Despeyrous. *Journ. Mathém. XXX*, 55.
31. *Sur la théorie des substitutions.* Bachmann. *Journ. Mathém. XXX*, 209.
32. *Classification des permutations d'une nombre quelconque de lettres en groupes des permutations inséparables.* Despeyrous. *Journ. Mathém. XXX*, 177.

Cubatur.

33. Welchem Cylinder von gleicher Höhe ist ein abgestumpfter Kegel gleich? Grunert. Grun. Archiv XLIII, 108.
34. *Cubature d'un cylindre droit coupé par un plan incliné sur sa base.* Lobatto. Grun. Archiv XLIII, 235. [Vergl. Bd. X, No. 33.]
35. *Décrire d'un point donné comme centre une sphère, qui coupe deux droites données dans l'espace en quatre points qui soient les sommets d'un tétraèdre de volume donné.* Drouard & Yver. *N. ann. math. XXIV*, 85.

Cubische Reste.

36. Ueber cubische Reste. G. F. Meyer. Grun. Archiv XLIII, 413.

D.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

37. *Considérations sur les équations du second degré à deux et trois variables.* Lemonnier. *N. ann. math. XXIV*, 5. [Vergl. Bd. X, No. 331.]

38. Ueber Inflexionscurven. Bammert. Zeitschr. Math. Phys. X, 165.
39. *On a theorem relating to five points in a plane. Cayley. Phil. Mag. XXIX*, 460.
40. *Théorème sur l'hexagone. Prouhet. N. ann. math. XXIV*, 129.
41. *Déterminant devenant nul, lorsque les points, dont les coordonnées se trouvent parmi ses éléments, sont placés sur une sphère. Audoynaud. N. ann. math. XXIV*, 78.
42. Zerlegung einer gewissen Discriminante in die Summe von Quadraten. Henrici. Crelle LXIV, 187.

Vergl. Evolution 61, Krümmung 129, Singularitäten 211.

Differentialgleichungen.

43. *De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque. C. G. J. Jacobi. Crelle LXIV*, 297.
44. *Differential equations of the first order; extension of integrable forms. Hargreave. Phil. Mag.* XXIX, 121.
45. Hauptlehrsätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln. Du Bois-Reymond. Crelle LXIV, 271.
46. *Sull' integrazione dell' equazioni differentiali lineari a coefficienti costanti fra due variabili. Tortolini. Annali mat. VI*, 249.
47. Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen. S. Spitzer. Grun. Archiv XLIII, 478.
48. Ueber die Gleichung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = x^m y + A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_m x^{m-1}$, in welcher m und n ganze positive Zahlen und die A beliebige Constanten bezeichnen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. X, 155.
49. Integration der Differentialgleichung $x y^{(n)} + a y^{(n-1)} = b x y$. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. X, 221.

E.

Elasticität.

50. *Sur l'impulsion transversale et la résistance vive des barres, verges ou poutres élastiques. De Saint-Venant. Compt. rend. LX*, 42, 732.
51. *Sur les vibrations des plaques rectangulaires. Terquem. Compt. rend. LX*, 774.

Elimination.

52. *Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes. Cayley.* Crelle LXIV, 167. [Vergl. Bd. IX, No. 277.]
53. Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. Clebsch. Crelle LXIV, 95.

Ellipse.

54. *Théorème sur deux ellipses concentriques et homothétiques. Grussat. N. ann. math. XXIV*, 80. — *D'Apvril ibid.* 84.
55. *Sulla curva luogo geometrico dei raggi di curvatura di un' ellipse data. Tortolini. Annali mat. VI*, 43.
56. *Intorno ad un modo di condurre le normali e dideterminare i punti dell' ellisse. Egger. Annali mat. VI*, 18.

Vergl. Maxima und Minima.

Ellipsoid.

57. Zur Kugel der mittleren Krümmung des Ellipsoides. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 361.
58. *Sur la surface, lieu des sections circulaires diamétrales de certains ellipsoides. Durrandes. N. ann. math. XXIV*, 125.

Elliptische Functionen.

59. *Intorno alla riduzione degl' Integrali ellittici. Genocchi. Annali mat. VI*, 5.
60. Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Clebsch. Crelle LXIV, 210.

Evolutionen.

61. *On the theory of the evolute. Cayley. Phil. Mag. XXIX*, 344.
62. Ueber die Evoluten sphärischer Curven. Mehler. Crelle LXIV, 183.
63. *Sulla trajettoria dell' Eugenio. Egger. Annali mat. VI*, 19.

F.

Factorenfolge.

64. Entwickelung der trigonometrischen Functionen in unendliche Factorenfolgen. Dienger. Grun. Archiv XLIII, 474.

Functionen.

65. *Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables.* *Hermite.* *Compt. rend.* *LX*, 370, 432, 461, 512. Crelle LXIV, 294. [Vergl. Bd. X, No. 220.]
66. Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen. **Roch.** Crelle LXIV, 372.
67. *Sur la formule de Lagrange.* *Laurent.* *Compt. rend.* *LX*, 25.
68. *Des fonctions curvitales.* *Gavarni.* *Compt. rend.* *LX*, 1079.
69. Ueber den Grenzwerth von $x-\sqrt{x^2-1}$, bei wachsenden x. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 116.

   Vergl. Abel'sche Functionen, Combinatorik 30, 31, 32, Elliptische Functionen, Gleichungen 92, Hyperbolische Functionen, Imaginäres 106.

G.

Geodäsie.

70. Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben. Christoffel. Crelle LXIV, 193.

   Vergl. Cartographie.

Geodätische Linien.

71. *Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur les lignes géodésiques.* *Faa de Bruno.* *N. ann. math.* *XXIV*, 108.
72. Ueber die Winkelsumme in Dreiecken, gebildet aus Linien des Systems (a) oder aus geodätischen Linien. Boeklen. Grun. Archiv XLIII, 18.

Geometrie (descriptive).

73. Ueber die geometrischen Principien des Zeichnens, insbesondere über die der Axonometrie. Sella. Grun. Archiv XLIII, 245.

Geometrie (höhere).

74. *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane.* *Cremona.* *Annali mat.* *VI*, 153.
75. *Théorémes généraux sur les courbes planes algébriques.* *Laguerre.* *Compt. rend.* *LX*, 70.
76. *Sur une propriété des courbes d'ordre* n *à* $\frac{n(n-3)}{2}$ *points doubles.* *Clebsch.* *Compt. rend.* LX, 68.
77. *Droites et points ayant rapport à un triangle donné.* *Lacauchie.* *N. ann. math.* *XXIV*, 178.
78. *On quartic curves.* *Cayley.* *Phil. Mag.* *XXIX*, 105.
79. Satz vom Viereck. C. Schmidt. Grun. Archiv XLIII, 376.
80. *Sur l'hypocycloide à trois rebroussements.* *Cremona.* *Crelle LXIV*, 101. — *Clebsch ibid.* 124.
81. *On the intersection of a pencil of four lines by a pencil of two lines.* *Cayley.* *Phil. Mag.* *XXIX*, 501.
82. *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum.* H. Schwarz. Crelle LXIV, 1.
83. *Démonstration géométrique de deux théorèmes relatifs à la surface d'égale pente circonscrite à une conique.* *Cremona.* *N. ann. math.* *XXIV*, 271.

Geschichte der Mathematik.

84. *Manière de compter des anciens, extrait d'un ouvrage espagnol de* 1573. *A. Marre.* *Annali mat.* *VI*, 93.
85. *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits.* *Woepcke.* *Annali mat.* *VI*, 225. *Journ. Math.* XXX, 83. — [Vergl. Bd. X, No. 92.]
86. *Le Talkhys d'Ibn Albannâ.* *Marre.* *Journ. Mathém.* XXX, 117.

87. *Histoire des mathématiques chez les Arabes.* Chasles. *Compt. rend. LX*, 601.
88. Ueber einen Codex des Klosters Salem. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. X, 1.
89. *Newton et Whiston.* Bertrand. *N. ann. math. XXIV*, 93.
    Vergl. Gleichungen 97.

Gleichungen.

90. *Sur limites du nombre des racines réelles des équations algébriques.* Sylvester. *Compt. rend. LX*, 1261.
91. *Commentaire sur le mémoire de Galois.* Jordan. *Compt. rend. LX*, 770.
92. *Etude sur les fonctions différentielles.* Guérin. *Compt. rend. LX*, 519.
93. *Sur une classe d'équations résolues par Moivre et leurs dérivées.* Realis. *N. ann. math. XXIV*, 209.
94. *Equations, qui ont toujours des racines imaginaires.* De Virieu. *N. ann. math. XXIV*, 79.
95. *Théorème d'arithmétique.* Sylvester. *Compt. rend. LX*, 1011, 1121.
96. *Sur la résolution de l'équation du troisième degré.* Vériot *Compt. rend. LX*, 556.
97. *Sopra la trasformazione del Sig. Jerrard per l'equazioni di quinto grado.* Tortolini. *Annali mat. VI*, 33.
98. *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour distinguer le cas quand toutes les racines d'une équation du cinquième degré sont réelles.* Sylvester. *Compt. rend. LX*, 759.
99. *Sur une méthode d'Abel pour déterminer la racine commune à deux équations algébriques. N. ann. math. XXIV*, 109.
    Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4, Zahlentheorie 220.

H.

Hydrodynamik.

100. Ueber Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen einer frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. X, 59.
101. *Sur une propriété du mouvement permanent des fluides.* De Salvert. *Compt. rend. LX*, 1153.
102. *On the application of the principle of the screw to the floats of paddle-wheels.* Adams. *Phil. Mag. XXIX*, 249, 351.
103. *Summary of the properties of certain streamlines.* Macquorn Rankine *Phil. Mag. XXVIII*, 282, *XXIX*, 25.

Hyperbel.

104. *Sur l'hyperbole équilatère.* Mention. *N. ann. math. XXIV*, 30.

Hyperbolische Functionen.

105. Behandlung des ballistischen Problems mit Hilfe der hyperbolischen Functionen. Ligowski. Grun. Archiv XLIII, 92.

I.

Imaginäres.

106. Ueber Functionen complexer Grössen. Roch. Zeitschr. Math. Phys. X, 169. [Vergl. Bd. IX, No. 113.]
107. *On Lobatschewsky's imaginary geometry.* Cayley. *Phil. Mag. XXIX*, 231.
    Vergl. Gleichungen 94, Zahlentheorie 220.

Interpolation.

108. *Formules pour déterminer la température d'une milieu ambiant sans l'observer.* Volpicelli. *Compt. rend. LX*, 416.

K.

Kegelschnitte.

109. Die Entdeckungen von Chasles in Bezug auf Kegelschnitte. Cremona. Annali mat. VI, 179. [Vergl. Bd. X, No. 128, 129, 130, 131, 325, 326, 327, 328.]
110. Allgemeiner Inhalt des *Traité des sections coniques* von Chasles. Chasles. *Compt. rend. LX*, 367.

111. Construction der Linien zweiter Ordnung aus ihrer allgemeinen Gleichung. C. Schmitt. Grun. Archiv XLIII, 365.
112. Der Kegelschnitt der 9 Punkte. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 54.
113. Ueber den Kegelschnitt der 9 Punkte und sein stereometrisches Seitenstück. Gretschel. Grun. Archiv XLIII, 293.
114. Ueber das einem Kegelschnitt umschriebene und einem anderen einbeschriebene Polygon. Rosanes & Pasch. Crelle LXIV, 126.
115. *Sur les coniques tangentes à une circonférence et doublement tangentes à une seconde. Sartiaux. N. ann. math. XXIV*, 41.
116. *Sur les cercles bitangents à une conique. Le Besgue. N. ann. math. XXIV*, 161.
117. Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes. Lommel. Grun. Archiv XLIII, 231.
118. *Conique comme lieu géométrique du point d'intersection de deux droites passant chacune par un point donné et un point variable selon un mouvement rectiligne. Grassat. N. ann. math. XXIV*, 225, 228.
119. *Sur quelques propriétés du lieu des centres des coniques assujetties à quatre conditions, ou des surfaces du second degré assujetties à sept ou à huit conditions. Picquet. N. ann. math. XXIV*, 66.
120. *Sur les trajectoires sous un angle quelconque donné d'une système des coniques planes et sphériques homofocales. W. Roberts. Annali mat. VI*, 28.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 42, Ellipse, Hyperbel, Kreis, Parabel.

Kettenbrüche.

Vergl. Quadratwurzel.

Kreis.

121. *Sur quatre cercles passant par un même point* O. *Lacauchie. N. ann. math. XXIV*, 231. — *Barrère ibid.* 231.
122. *Sur la droite qui contient les pieds des perpendiculaires tirés d'un point du cercle circonscrit à un triangle aux trois côtés du triangle. LeBel & Talayrach. N. ann. math. XXIV*, 177.
123. *Sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle et des cercles tangents à ces côtés. Gérono. N. ann. math. XXIV*, 20.
124. *Sopra alcune formole relative al quadrilatero iscritto al circolo. Tortolini. Annali mat. VI*, 66.
125. *Formole relative ad un pentagono iscritto al circolo. Tortolini. Annali mat. VI*, 191.
Vergl. Rectification 200, 201.

Kreistheilung.

126. Ueber die Beschreibung des regulären Fünfecks und Zehnecks. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 113. [Vergl. Bd. X, No. 343.]

Krümmung.

127. *De curvatura superficierum. Minding. Annali mat. VI*, 201.
128. Ueber das Maass der Krümmung. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 437.
129. Zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers räumlicher Curven. Bammert. Zeitschr. Math. Phys. X, 163.
130. *Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. Beltrami. N. ann. mat. XXIV*, 258. — *Ossian Bonnet ibid.* 267.
131. *Sur les rayons de courbure des caustiques et leurs points de rebroussement. Breton. N. ann. math. XXIV*, 25.

L.

Logarithmen.

132. *Sur les logarithmes des sinus et tangentes des petits angles. Burnier.* Grun. Archiv XLIII, 487.
133. *Formule utile pour le calcul des logarithmes des sinus et des tangentes des petits angles. Burnier. N. ann. math. XXIV*, 233.
134. Fehler in Schroen's 7stelligen Tafeln. Grun. Archiv XLIII, 244.
135. Fehler in den Köhler'schen Tafeln (*édit.* 9) und in den 5stelligen Hoüel'schen Tafeln (*édit.* 2). Hoüel. Grun. Archiv XLIII, 243.

M.

Maxima und Minima.

136. *Sull' ellisse della più piccola superficie circoscritta ad un triangolo dato.* Tortolini. *Annali mat. VI,* 196.

Mechanik.

137. Ueber die allgemeine Theorie der Centralbewegung. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 377.
138. *On a modification of Watt's parallelogram.* *Tchébychef.* *Phil. Mag. XXVIII,* 51.
139. Ueber eine Vorsichtsmassregel beim Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Bertram. Crelle LXIV, 284.
140. *On an extension of the dynamical principle of least action.* *Cotterill.* *Phil. Mag. XXIX,* 299.
141. *On the equilibrium of arched ribs of uniform sections.* *Cotterill.* *Phil. Mag. XXIX,* 380.
142. *Further application of the principle of least action.* *Cotterill.* *Phil. Mag. XXIX,* 430.
143. *Equilibrio di un solido incastrato in un estremita, apoggiato nell' altra e caricato di* n *pesi.* *Cipolletti.* *Annali mat. VI,* 49.
144. *On the work of torsion.* *De Saint-Venant.* *Phil. Mag. XXIX,* 61. [Vergl. Bd. X, No. 350.]
145. Elementare Ableitung der Hauptеigenschaften der Kettenlinien. Gretschel. Grun. Archiv XLIII, 121.

Vergl. Ballistik, Elasticität, Hydrodynamik, Optik, Potential, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

146. Ueber die näherungsweise Berechnung der Permutationszahlen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 232.

N.

Normalen.

147. Ueber die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes Normalen an denselben zu ziehen. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 26.
148. Schneiden sich die auf einander folgenden Flächennormalen, deren Fusspunkte auf einer Krümmungslinie liegen? Boeklen. Grun. Archiv XLIII, 16.

Vergl. Ellipse 56, Parabel 171.

O.

Oberflächen.

149. *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* *Aoust.* *Annali mat. VI,* 65.
150. *Théorie des surfaces.* *Lamarle.* *Compt. rend. LX,* 851.
151. *Sur la théorie des surfaces.* *Nicolaïdès.* *Compt. rend. LX,* 634.
152. *Sur la théorie des surfaces polaires d'un plan.* *Painvin.* *Compt. rend. LX,* 927.
153. *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione.* *Beltrami.* *Annali mat. VI,* 271.
154. Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. Kummer. Crelle LXIV, 66. — Weierstrass ibid. 77. — Schroeter ibid. 79. [Vergl. Bd. X, No. 362.]
155. *Sur la surface du quatrième ordre de Steiner.* *Cayley.* Crelle LXIV, 172.
156. *Note on a quartic surface.* *Cayley.* *Phil. Mag. XXIX,* 19.
157. *Sur une surface réglée du huitième ordre, qui possède quatre lignes doubles du second ordre.* *De la Gournerie.* *Compt. rend. LX,* 1178.
158. *Sur les surfaces à courbure constante négative et sur celles applicables sur les surfaces à aire minima.* *Dini.* *Compt. rend. LX,* 340.
159. *Sur la surface nommée cyclide.* *Colot.* *N. ann. math. XXIV,* 169.

Vergl. Geometrie (höhere) 82, 83.

Oberflächen zweiter Ordnung.

160. *Etude des points à l'infini dans les surfaces du second ordre.* *Painvin.* *N. ann. math. XXIV,* 49.

161. *Etude géométrique sur les surfaces du second ordre.* Picart. *N. ann. math.* XXIV, 62, 97.
162. *Nombre des solutions dans les questions élémentaires relatives aux surfaces du second degré.* Housel. *Compt. rend.* LX, 1072.
163. *Equations tétraédriques des surfaces du second ordre circonscrites aux sommets ou inscrites aux faces ou aux arêtes d'un tétraèdre quelconque.* Haton de la Goupillière. *N. ann. math.* XXIV, 241.
164. *Sur la surface enveloppe des positions d'une surface du second ordre qui tourne autour d'une droite.* De la Gournerie. *Journ. Mathém.* XXX, 33.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16, Kegelschnitte 119.

Operationscalcul.

165. *On the operating symbol of differential covariants.* Cockle. *Phil. Mag.* XXVIII, 205.

Optik.

166. *On the theory of light.* Lorenz. *Phil. Mag.* XXVIII, 409. [Vergl. Bd. IX, No. 367.]
167. *Supplementary considerations relating to the undulatory theory of light.* Challis. *Phil. Mag.* XXIX, 329.
168. Brechung und Reflexion des Lichtes durch eine Kugel. Roeber. Zeitschr. Math. Phys. X, 123.
169. *Sur la réflexion cristalline.* Cornu. *Compt. rend.* LX, 47.

P.

Parabel.

170. *Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite et qui la coupent en deux points fixes est une cissoïde.* Gilliot. *N. ann. math.* XXIV, 39. — Durget *ibid.* 41.
171. *Trouver le lieu géométrique d'un point tel que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné.* Recoq. *N. ann. math.* XXIV, 112.

Planimetrie.

172. Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks. Koenig. Grun. Archiv XLIII, 347. [Vergl. Bd. X, No. 239.]
173. *Théorème de Pythagore.* Zalinski. *Compt. rend.* LX, 86.
174. Ist in dem Dreiecke ABC der Winkel A doppelt so gross, als der Winkel B, so ist $a^2 = b(b+c)$ und umgekehrt. Am Ende. Grun. Archiv XLIII, 241. — Koenig ibid. 345. [Vergl. Bd. X, No. 240.]
175. Ueber einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks. Mink. Grun. Archiv XLIII, 1. [Vergl. Bd. X, No. 192.]
176. Eine planimetrische Aufgabe aus Rogner's „Materialien u. s. w." C. Schmidt. Grun. Archiv XLIII, 7. [Vergl. Bd. X, No. 196.]
177. *Construction du carré, dont les côtés passent par 4 points donnés.* Fasbender. Grun. Archiv XLIII, 472.
178. Satz vom Viereck. C. Schmidt. Grun. Archiv XLIII, 292.
179. Ueber die Seite des regulären Sechsecks. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 113.
180. Die Gleichung zwischen den Seiten des Fünf-, Sechs- und Zehnecks. Heinen. Grun. Archiv XLIII, 100. [Vergl. Bd. X, No. 195.]
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 10, Imaginäres 107, Schwerpunkt.

Potential.

181. Zur Theorie der einwerthigen Potentiale. Christoffel. Crelle LXIV, 321.
182. Ueber einige Aufgaben, welche die Theorie des logarithmischen Potentials und den Durchgang eines constanten elektrischen Stroms durch eine Ebene betreffen. Jochmann. Zeitschr. Math. Phys. X, 48, 89.

Q.

Quadratische Formen.

183. *Nombre des représentations d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix carrés.* Liouville. *Compt. rend.* LX, 1257.
184. *Sur la forme* $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 161.

185. *Sur la forme* $x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 151.
186. *Sur la forme* $x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 155.
187. *Sur la forme* $x^2+y^2+z^2+4t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 77.
188. *Sur la forme* $x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 145.
189. *Sur la forme* $x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 71.
190. *Sur la forme* $x^2+y^2+5z^2+5t^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 1.
191. *Sur la forme* $x^2+y^2+9z^2+9t^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 14.
192. *Note au sujet de la forme* $x^2+y^2+a(z^2+t^2)$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 43.
193. *Sur la forme* $x^2+2y^2+2z^2+4t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 73.
194. *Note au sujet de la forme* $x^2+2y^2+a(z^2+2t^2)$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 49.
195. *Sur la forme* $x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 65.
196. *Sur la forme* $x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+16v^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 203.
197. *Sur la forme* $2x^2+2xy+3y^2+2z^2+2zt+3t^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 9.
198. *Sur la forme* $2x^2+2xy+5y^2+2z^2+2zt+5t^2$. Liouville. *Journ. Mathém.* XXX, 21.

Quadratwurzeln.

199. Ueber die Näherungswerthe der periodischen Kettenbrüche und ihre Anwendung auf Darstellung der Quadratwurzeln. Oettinger. Grun. Archiv XLIII, 301.

R.

Rectification.

200. *On rational approximation to the circle.* Rankine. *Phil. Mag.* XXIX, 421.
201. *On the approximate graphic measurement of elliptic and trochoidal arcs and the construction of a circular arc nearly equal to a given straight line.* Rankine. *Phil. Mag.* XXIX, 22.
202. *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie.* Genocchi. *Annali mat.* VI, 97.

Reihen.

203. Ueber Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 74.
204. *Détermination du point critique, où est limitée la convergence de la série de Taylor.* Marie. *Compt. rend.* LX, 1085.
205. Die harmonischen Reihen. Knar. Grun. Archiv XLIII, 184. [Vergl. Bd. IX, No. 403.]
206. *Sur les progressions des divers ordres.* Le Cointe. *Annali mat.* VI, 124.

S.

Schwerpunkt.

207. Satz von Beltrami über den Mittelpunkt des einem ebenen Dreiecke umschriebenen Kreises und die Mittelpunkte der 4 Berührungskreise. Noeggerath. Grun. Archiv XLIII, 89. — Lobatto ibid. 234. — C. Schmidt ibid. 238. — Reuschle ibid. 364, 483. — Beltrami ibid. 481.

Singularitäten.

208. Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. Clebsch. Crelle LXIV, 98.
209. *Sur les singularités supérieures de courbes planes.* Cayley. Crelle LXIV, 369.
210. Ueber einige von Steiner behandelte Curven. Clebsch. Crelle LXIV, 288.
211. Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Clebsch. Crelle LXIV, 43.

Sphärik.

212. *Problème du cercle tangent à trois cercles donnés et de la sphère tangente à quatre sphères données.* Barbier. *Compt. rend.* LX, 1076.
213. *Construction donnant à la fois les quatre points de contact d'une sphère tangente à quatre sphères données.* Barbier. *Compt. rend.* LX, 1151.

214. Umformung der Gleichung $\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$. Grunert. Grun. Archiv XLIII, 118.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 41, Evolution 62.

Stereometrie.

215. *Recherches sur les polyèdres.* Jordan. *Compt. rend. LX*, 400.
Vergl. Cubatur 33.

T.

Taylor's Reihe.

Vergl. Reihen 204.

Trägheitsmoment.

216. Ueber eine allgemeine Darstellung des Trägheitsmomentes ebener Figuren durch Zeichnung. Siebeck. Zeitschr. Math. Phys. X, 80.

W.

Wärmetheorie.

217. Entwickelung eines Satzes der mechanischeu Wärmetheorie für beliebige Processe, in welchem der Clausius'sche Satz der Aequivalenz der Verwandlungen für Kreisprocesse als besonderer Fall enthalten ist. Bauschinger. Zeitschr. Math. Phys. X, 109.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

218. *On the probability of testimony and arguments.* Abbott. *Phil. Mag. XXVIII*, 12.

Z.

Zahlentheorie.

219. *Sur quelques formules générales, qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres.* Liouville. *Journ. Mathém. XXX*, 135, 169. [Vergl. Bd. X, No. 406.]
220. Ueber die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet sind. Selling. Zeitschr. Math. Phys. X, 17.
221. *Sur le symbole* $\left(\frac{b}{a}\right)$. Le Besgue. *Compt. rend. LX*, 377. [Vergl. Bd. X, No. 409.]
222. *Sur l'équation* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, x_4 \,.\, x_5$. Murent. *N. ann. math. XXIV*, 116.
223. *Intorno all' equazione* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. Genocchi. *Annali mat. VI*, 287.
224. *Impossibilità in numeri interi dell' equazione* $z^n = x^n + y^n$, *quando* $n > 2$. Calzolari. *Annali mat. VI*, 280.
Vergl. Cubische Reste, Quadratische Formen.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, redigirt von C. Jelinek und J. Hann. 1. Bd. No. 1—4. Wien, Gerold's Sohn. pro Band 4⅘ Fl.

In dem Prospectus dieses neuen Unternehmens heisst es:

„Diese Zeitschrift ist bestimmt, nicht blos als eigentliches Vereinsorgan zu dienen, sondern die Stelle einer besonderen Fachzeitschrift für Meteorologie, welche in Deutschland noch fehlt, einzunehmen. Sie wird nicht blos grössere selbstständige Aufsätze, die in das Gebiet der Meteorologie selbst oder verwandter Wissenschaften fallen, bringen, sondern eine besondere Sorgfalt den neueren Erscheinungen im Gebiete der meteorologischen Literatur zuwenden und die Leser der Zeitschrift von allen Bestrebungen und Fortschritten auf diesem Felde in Kenntniss setzen. Bedenkt man, welch' eine reiche Fülle von Material in den Publicationen der verschiedenen Observatorien und gelehrten Gesellschaften enthalten sind, welche dem privaten Freunde der Meteorologie in der Regel ganz unzugänglich bleiben, so dürfte es keine undankbare Aufgabe sein, in fortlaufenden, eingehenden Besprechungen der neueren Leistungen auf dem Gebiete der Meteorologie ein Gesammtbild des gegenwärtigen Zustandes dieser Wissenschaft zu bieten.

„Die Zeitschrift der österreichischen meteorologischen Gesellschaft wird daher enthalten

1. Aufsätze oder Abhandlungen aus dem Gebiete der Meteorologie oder über die Beziehungen der Meteorologie zu anderen Wissenschaften und zu Fragen des praktischen Lebens;
2. kleinere Mittheilungen und unter diesen einerseits fortlaufende Literaturberichte, andererseits Mittheilungen von der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus und den Stationen des österreichischen Beobachtungssystemes, endlich eine Uebersicht über den Verlauf der Witterung in Europa im All-

gemeinen und insbesondere in Oesterreich in der dem Erscheinen der betreffenden Nummer zunächst vorhergegangenen Zeit;

3. die eigentlichen Vereinsnachrichten.

„Bereits haben einige der hervorragendsten Gelehrten, wie Dove, Lamont, Mühry, Kuhn (in München), Prestel u. A. ihre Unterstützung zugesagt, in Wien kann die junge Zeitschrift auf die Mitwirkung der Mitglieder der meteorologischen Gesellschaft, namentlich auf jene der Herren Fritsch, Glatter, Hann, Jelinek, Kuhn, v. Littrow, Lorenz, Pisko, Pohl, Schrötter, Simony, Suess, v. Vivenot, Weiss u. A. zählen und es ist nicht zu zweifeln, dass die neue Zeitschrift, die einem wirklich gefühlten Bedürfnisse abzuhelfen bestimmt ist, sich Freunde in weiten Kreisen erwerben werde. Die Redaction haben die Herren Prof. C. Jelinek, Director der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, und Prof. Julius Hann übernommen.

„Die Zeitschrift erscheint in zwanglosen Lieferungen, die Nummer in der Regel zu einem Bogen; 24 Nummern bilden einen Band."

Der Inhalt der vier bis jetzt erschienenen Nummern ist folgender.

No. 1. Jelinek, die Gründung der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Mühry, die Wind- und Regenverhältnisse Arabiens. Kleinere Mittheilungen: Correspondenzen; neue Psychrometertafeln; zur Frage über die Höhengrenze des Nordlichts; überraschende Wirkungen der tropischen Sonne. — No. 2. Mühry, die Wind- und Regenverhältnisse Arabiens (Fortsetzung und Schluss). Kleinere Mittheilungen: Wüsten und Steppen als meteorologisch begründete Erscheinungen; Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf die Erwärmung besonnter Körper; Feuerkugel zu Tarnopol; Literaturbericht; Vereinsnachrichten. — No. 3. Simony, über klimatische Oasen in den Alpen. Kleinere Mittheilungen: Correspondenzen; Staubfall in Kärnthen und Rom; neuer Beitrag zur klimatischen Kenntniss höherer südlicher Breiten; magnetische Declination zu Lölling in Kärnthen; Witterungsübersicht der letzten drei Wochen; Lehrbücher der Meteorologie; Personalnachrichten. — No. 4. Simony, über klimatische Oasen in den Alpen (Fortsetzung und Schluss). Jelinek, Wiederherausgabe der Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Kleinere Mittheilungen: Die Kälte im Mai; Sturmsignale an der hannover'schen Küste; meteorologische Gesellschaft in Nizza.

Mit diesen durchaus interessanten Aufsätzen hat die neue Zeitschrift einen glücklichen Anfang genommen; wir wünschen ihr von Herzen die lebhafte Unterstützung des schreibenden sowie des lesenden Publicums und damit zugleich ein fröhliches Gedeihen.

SCHLÖMILCH.



Compendium der Planimetrie und Stereometrie, nach Legendre für den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. C. HECHEL. 2. Aufl. Reval, F. Kluge 1865.

Das vorliegende, aus zwei kleinen, durchschnittlich je 70 Seiten zählenden Heften bestehende Compendium scheint seine Entstehung dem Umstande zu verdanken, dass in Russland und namentlich in den Ostseeprovinzen die Geometrie Legendre's als Lehrbuch sehr beliebt und an vielen Unterrichtsanstalten eingeführt ist. So sehr nun auch jeder Mathematiker den Scharfsinn bewundert, welchen Legendre an vielen Stellen seines berühmten Werkes entwickelt, so wird andererseits unter den praktischen Schulmännern Deutschlands ohne Zweifel die Ueberzeugung bestehen, dass sich jenes Werk zum Schulgebrauche nicht eignet, für den es offenbar auch nicht geschrieben wurde. Diese Thatsachen berechtigten allerdings den Herausgeber zu der vorliegenden Bearbeitung, in welcher Alles weggelassen ist, was den gewöhnlichen Kreis des Schulunterrichts überschreitet, und worin gleichzeitig manche schwierige Partieen des Originals durch fasslichere Betrachtungen ersetzt sind. Freilich geht damit auch ein guter Theil von den Eigenthümlichkeiten des Legendre'schen Werkes verloren, und so entsteht aus Bruchstücken von Legendre's altgriechischer Denkweise und aus einigen Zuthaten moderner Pädagogik doch eigentlich nur ein halbes Wesen, das kaum eine äusserliche, gewiss aber keine innere Berechtigung zur Existenz hat.

Stereometrische Aufgaben nebst ihren Auflösungen, für den Gebrauch in höheren Lehranstalten bearbeitet von Dr. C. HECHEL. 2 Hefte. Reval, F. Kluge.

Die hier behandelten Aufgaben beziehen sich meistentheils auf die Berechnung von Linien, Flächen- und Körperinhalten, welche gegebenen Bedingungen genügen sollen, sie betreffen also die eigentliche Ausmessung stereometrischer Gebilde. Ihre Gesammtzahl ist nicht unbedeutend, nämlich = 1020 und gruppirt sich folgendermaassen: 1. Heft: Würfel (No. 1—32), Parallelepiped (33—72), Prisma (73—114), Pyramide (115—226), Abgestumpfte Pyramide (227—283), Pyramidale und prismatische Kugelhaufen (284—305), Prismatische Abschnitte und Obelisken (306—342), Cylinder (343—477); 2. Heft: Kegel (478—576), Abgestumpfter Kegel (577—658), Rotationskörper (659—736), Kugel (737—892), Kugelsegmente und sphärische Figuren (893—1020). Ausser der Anzahl der Aufgaben verdient die Art derselben volle Anerkennung. Es handelt sich bei keiner dieser Aufgaben um ein bloses Zahlenbeispiel zu einer bekannten Formel, vielmehr erheischt jede Aufgabe die Entwickelung einer neuen Formel, welcher dann ein Zahlenbeispiel zur Veranschaulichung beigegeben ist. Als Probe mag dienen:

569. Es ist die Höhe $h = 60$ und der Radius $r = 12$ der Grundfläche eines geraden Kegels gegeben; man soll den körperlichen In-

halt des grössten geraden Cylinders finden, der sich aus dem Kegel schneiden lässt.

Auflösung: $\frac{4}{27}\pi h r^2 = 4021,2385$.

Wie hier so finden sich noch mehrere Aufgaben über Maxima und Minima, auch sind verschiedene Probleme aus der Physik, Mechanik, Geodäsie und Astronomie aufgenommen worden. Die Herleitung der Auflösungen ist in den Figuren durch Aufnahme der nöthigen Hilfslinien (ohne weitere Bemerkung im Texte) angedeutet, womit dem Referenten gerade das richtige Maass einer Beihilfe getroffen zu sein scheint.

Je dürftiger die bisherigen Sammlungen stereometrischer Aufgaben waren, um so mehr Dank verdient der Verfasser für seine reiche, auch typographisch gut ausgestattete Gabe, die hiermit den Schulmännern warm empfohlen sein möge.

Schlömilch.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 1. August 1866.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1865, Bd. II, Heft 4, und 1866, Bd. I, Heft 1. München, Franz. à 16 Ngr.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Cl. 25. Bd. Wien, Gerold. 17⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Cl. Jahrg. 1866, 2. Abtheil., 1. und 2. Heft. Ebendas. pro compl. 8 Thlr.

Annales de l'observatoire impérial de Paris, publiées par U. J. Le Verrier. Mémoires. Tome 8. *Paris, Gauthier-Villars.* 40 *fr.*

American Ephemeris and nautical Almanac for the year 1867. *Published by the authority of the Secretary of the Navy. Washington, Bureau of navigation.* 1½ *doll.*

Reine Mathematik.

NERLING, W., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 2. Aufl. Dorpat, Gläser. 1 Thlr. 2 Ngr.

DAUBER, Die Coefficienten der Differenzenreihen. Osterprogramm des Gymnasiums zu Helmstedt.

DÖLP, H., Die Determinanten als Gegenstand des Gymnasialunterrichts. Osterprogramm des Gymnasiums zu Giessen.

FUCHS, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Osterprogramm der Städtischen Friedrichswerder'schen Gewerbschule in Berlin.

RUMMER, F., Lehrbuch der Elementargeometrie. 2 Thle. Stereometrie und Feldmessen. 3. Aufl. Heidelberg, Mohr. 18 Ngr.

STEGMANN, F. L., Elemente der ebenen Trigonometrie und Stereometrie. 2. Aufl. Marburg, Elwert. ⅜ Thlr.

HELLWIG, C., Die Schule der Geometrie und Trigonometrie der Ebene. 2. Cursus. Erfurt, Villaret. 18 Ngr.

WINCKLER, A., Geometrische Construction rationaler Polynome. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

SCHWARZER, A., Entwickelung der Beziehungsgleichungen zwischen Seite und Halbmesser regelmässiger Sehnenpolygone, deren halbe Seitenzahl ungerade. (Akad.) Ebendaselbst. 2 Ngr.

ANDERSSEN, Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet. Säcularprogr. des Friedrichs-Gymnasiums zu Breslau.

GREBE, E. W., Fünfzig Aufgaben über das geradlinige Dreieck, trigonometrisch gelöst. Osterprogramm der Städtischen Realschule zu Cassel.

EILLES, J., Elementare Darstellung einiger Lehren der neueren Geometrie. Augustprogramm des Ludwigs-Gymnasiums zu München.

FUNCK, Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene, zurückgeführt auf synthetisch-geometrische Betrachtungen. Michaelisprogramm des Gymnasiums zu Culm.

KRESS, H., Zur Erörterung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen. Osterprogramm des Gymnasiums zu Meiningen.

SCHRAMM, H., Ueber eine einfache Construction aller Kegelschnittslinien. Augustprogramm der Oberrealschule zu Wienerisch Neustadt.

TELLKAMPF, A., Ueber die Behandlung der Kegelschnitte im geometrischen Schulunterrichte. Osterprogramm der Städtischen höheren Bürgerschule zu Hannover.

COLLMANN, Die analytische Behandlung der Kegelschnitte. Osterprogramm des Gymnasiums zu Bielefeld.

DRONKE, A., Bestimmung einiger geometrischen Orte. Michaelisprogramm der Provinzialgewerbschule zu Coblenz.

LEWIN, J., Neue Auflösung des Pothenot'schen Problemes und Beweis des Lehmann'schen Satzes über dasselbe. Wien, Bermann & Altmann. 12 Ngr.

TODHUNTER, J., *Algebra for use of colleges and shool. London, Macmillan.* 7 *sh.* 6 *d.*

SERRET, J. A., *Cours d'algèbre supérieure.* 3 *édit. Tome II. Paris, Gauthiers-Villars. Les deux vol.* 24 *frcs.*

FORT en SCHLÖMILCH, *Leerboek der analytische meetkunst. Naar de* 2. *uitgave bewerkt en verm.door Dr. van Geer.* 2 *Dln. Leiden, Sijthoff.* 5 *fl.*

BRETON, F., *Question de porismes. Notice sur les débats auxquels a donné lieu l'ouvrage de M. Chasles, suivi de l'explication de ce que c'est qu'un porisme. Paris, impr. Vve. Bouchard-Huzard.* 3 *fr.*

PONCELET, J. V., *Traité des propriétés projectives des figures. Tome II.* 2 *édit. Paris, Gauthiers-Villars.* 20 *fr.*

Angewandte Mathematik.

DELABAR, G., Anleitung zum Linearzeichnen. 1. Theil: das geometrische Linearzeichnen. Freiburg im Br., Herder. 18 Ngr.

EICKEMEYER, Der Theodolit, seine Einrichtung und praktische Anwendung. Osterprogramm des Gymnasiums zu Hadamar.

MORITZ, A., Ueber die Anwendung des Pistor'schen Reflectionskreises zum Messen von Angulardistanzen zwischen terrestrischen Objecten. Tiflis und Dorpat, Gläser. 3 Ngr.

ROBIDA, K., Höhenbestimmungen der Erdatmosphäre und ihrer unteren Schichten. Klagenfurt, Leon. 4 Ngr.

ZIEGLER, J. M., Hypsometrische Karte der Schweiz. 4 Blätter. Chromolithogr. mit Text und Register. Winterthur, Wurster & Comp. 5⅓ Thlr.

HAGEN, G., Die preussische Ostseeküste in Betreff der Frage, ob sich eine Hebung oder Senkung derselben bemerken lässt. (Akad.) Berlin, Dümmler. 8 Ngr.

FÖRSTER, W., Ueber Zeitmaasse und ihre Verwaltung durch die Astronomie. Berlin, Lüderitz. ¼ Thlr.

Jacobi, C. G. J., Vorlesungen über Dynamik nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen desselben, herausgegeben von A. Clebsch. Berlin, G. Reimer. $6\frac{2}{3}$ Thlr.

Scheffler, H., Imaginäre Arbeit, eine Wirkung der Centrifugal- und Gyralkraft. Leipzig, Teubner. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Stefan, J., Ueber den Einfluss der inneren Reibung der Luft auf die Schallbewegung. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Zeuner, G., Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Aufl. 2. Hälfte. Leipzig, Felix. 2 Thlr.

Köhler, W., Die mechanische Wärmetheorie in ihrer Anwendung auf permanente Gase. Berlin, Calvary & Comp. 8 Ngr.

Schwarz, L., Ueber die Reduction der scheinbaren und wahren Monddistanzen auf einander. Dorpat, Gläser. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Schmidt, J. F. J., Ueber Rillen auf dem Monde. Leipzig, J. A. Barth. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Leiber, Th., *De casibus quibusdam, in quibus corporis solidi motus in incompressibili fluido analysis auxilio determinari potest. Dissert. inaug. Halle.*

Todhunter, J., *A Treatise on analytical Statics. London, Macmillan.* 10 *sh.* 6 *d.*

Devillez, A., *Eléments de mécanique considérée comme science naturelle.* 1. *Partie. Corps solides.* Leipzig, Brockhaus Sortim. 4 Thlr. 24 Ngr.

Jullien, M., *Problèmes de mécanique rationelle.* 2 *Volumes. Paris, Gauthier-Villars.* 15 *fr.*

Physik.

Encyclopädie der Physik, herausgegeben von G. Karsten. 17. Lieferung. Leipzig, Voss. $2\frac{5}{6}$ Thlr.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausgabe. 8. und 9. Lief. Leipzig, Teubner. à $\frac{5}{6}$ Thlr.

Müller, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 9. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

—— —— Mathematischer Supplementband. 2. Aufl. Ebendas. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1864. Redigirt von Jochmann. 20. Jahrg. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. $2\frac{1}{6}$ Thlr.

Hager, H., Das Mikroskop und seine Anwendung. 2. Auflage. Berlin, Springer. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Stefan, J., Ueber eine neue Methode, die Längen der Lichtwellen zu messen. (Akad.) Wien, Gerold. $1\frac{1}{2}$ Ngr.

Memorsky, Ueber die Farbe des Tageslichtes und einiger künstlichen Beleuchtungsmittel. (Akad.) Wien, Gerold. 1⅙ Ngr.

Kirchhoff, G., und R. Bunsen, Spectraltafel. 2. Aufl. Taf. 1. Chromolith. Dresden, Schrag'sche Verlagsanstalt. 1⅚ Thlr.

Pierre, V., Ueber die durch Fluorescenz hervorgerufene Wärmestrahlung. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Ditscheiner, L., Ueber einen Interferenzversuch mit dem Quarzprisma. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Grabowski, A., Methode und Apparat zur Bestimmung der Dampfdichte. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Hertzer, Ueber die Temperatur der Flüsse. Osterprogramm des Gymnasiums zu Wernigerode.

Unverdorben, F. X., Ueber das Verhalten des Magnetismus zur Wärme. Inauguraldissert. Passau, Deiters. ⅙ Thlr.

Reimann, Ueber die Entstehung des Hagels. Osterprogramm der Realschule zu Saalfeld.

Wittwer, Die Ueberschwemmungen. Augustprogramm des Gymnasiums zu Regensburg.

Ploix, Ch., *Météorologie nautique. Vents et courants. Routes généra les. Paris, Didot frères.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Festigkeitslehre, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues. Abriss von Vorträgen an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe von Dr. F. Grashof. Berlin, Gärtner 1866.

Wir begrüssen hierin das erste vollständigere wissenschaftliche Werk der Festigkeitslehre, oder besser der Elasticitätslehre. Es soll zwar, wie der Titel besagt, besondere Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues nehmen, kann jedoch recht wohl als eine allgemeine Elasticitätslehre gelten. Allerdings bildet das Werk nur einen Abriss, da keine vollständigen mathematischen Entwickelungen, sondern nur Andeutungen derselben gegeben sind; die Principien aber, auf welchen diese Entwickelungen beruhen sollen, sind mit möglichster Vollständigkeit und Klarheit besprochen, so dass es dem nicht unbefähigten Leser leicht werden wird, das Fehlende selbst zu ergänzen. Hierdurch wurde es möglich, den bis jetzt enorm angewachsenen Stoff auf den kleinen Raum von 18½ Bogen zusammenzudrängen.

In der Einleitung wird nach der Definition der Grundbegriffe als Hauptaufgabe der praktischen Festigkeitslehre hingestellt „die Bestimmung der Dimensionen oder der Belastung eines Körpers, derart, dass in keinem Punkte und nach keiner Richtung die Ausdehnung gewisse erfahrungsmässig zulässige Werthe überschreitet". Es wird sodann nachgewiesen, dass diese Ausdehnung nach einer beliebigen Richtung sich ausdrücken lässt durch die Längenänderungen und gegenseitigen Verschiebungen der gegenüberliegenden Flächen eines kleinen rechtwinkligen Parallelepipedes, ohne jedoch die Abhängigkeit in Formeln zu entwickeln, und dass sich diese Längenänderungen und Verschiebungen wiederum ausdrücken lassen durch die auf die Seitenflächen des Parallelepipedes wirkenden Kräfte oder Spannungen. Die letzteren werden zerlegt in Normalspannungen und Tangentialspannungen und die Abhängigkeit der Längenänderungen von den Normalspannungen, sowie der Verschiebungen von den Tangentialspannungen nach dem einfachen Gesetze der Proportionalität als Erfahrungsgesetz hin-

gestellt. Sowohl die Spannungen als die Längenänderungen und Verschiebungen sind mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, was hätte vermieden werden sollen. Nach einer Mittheilung der numerischen Werthe der Elasticitäts- und Festigkeitsconstanten wird die Art und Weise der Beanspruchung stabförmiger Körper besprochen und diese auf das System der äusseren Kräfte für jeden Querschnitt F gegründet. Dieses System wird zurückgeführt auf eine normal zu F wirkende Kraft R_1, eine in F wirkende Kraft R_2 und zwei Kräftepaare M_1, M_2, deren Momentenebene die Fläche F und eine zu F senkrechte Ebene ist. Es werden die Spannungen und die Aenderung der gegenseitigen Lage zweier benachbarter Querschnitte bezeichnet, welche jede dieser Grössen R_1, R_2, M_1, M_2 erzeugen. Als einfache Fälle werden diejenigen hingestellt, bei welchen von den vier Grössen nur eine vorhanden ist oder wenigstens nur eine einen wesentlichen Einfluss hat, nämlich Zug- und Druckfestigkeit (R_1), Biegungsfestigkeit (M_1), Schubfestigkeit (R_2) und Drehungsfestigkeit (M_2).

Im I. Kapitel wird die Zug- und Druckelasticität und Festigkeit in der gewöhnlichen Weise behandelt, dabei auch die speciellen Regeln für Drähte, Seile und stehende Zapfen aufgestellt.

Das II. Kapitel behandelt die Biegungs-Elasticität und Festigkeit und zwar für gerade stabförmige Körper. Zunächst werden die Ausdehnungen, die Spannungen in Richtung der Axe des Stabes, sowie die Differentialgleichung der elastischen Linie in der gewöhnlichen Weise unter der Annahme entwickelt, dass die Querschnitte auch bei der Biegung Ebenen und zur elastischen Linie senkrecht bleiben. Durch Gleichsetzung der in den von der neutralen Axe am weitesten entfernten Fasern entstehenden Zuges und Druckes mit dem Sicherheitscoefficienten für Zug und Druck oder durch Bildung der Alternativgleichung

$$\frac{Me'}{3} = K', \quad \frac{Me''}{3} = K''$$

wird die bezeichnete Hauptaufgabe der Festigkeitslehre im Allgemeinen gelöst. Es folgen nun Anwendungen auf verschiedene Querschnittsformen welche jedoch zu kurz ausgefallen sind, sowie Anwendungen auf verschiedene Unterstützungs- und Belastungsweisen der Stäbe von constantem Querschnitte, wobei als Unterstützungsweisen die Einspannung eines Endes, die Unterstützung beider Enden, die Einspannung eines und Unterstützung des andern Endes und endlich die gerade und schiefe Einspannung beider Enden vorkommen; als Belastung wird die Belastung durch isolirte und gleichmässig vertheilte Lasten angenommen, aber auch die Behandlungsweise einer beliebigen Belastung gezeigt. Hierbei werden stets die resultirende Kraft (R_1) und das Spannungsmoment (M_1) mit demselben Buchstaben bezeichnet, der für das Spannungsmoment aber in Parenthese gesetzt, z. B. X, $[X]$, was des unbequemen Lesens wegen nicht recht praktisch erscheint. Sodann wird, allerdings in grosser Kürze, der Fall behandelt, in welchem der Stab auf

mehr als zwei Stützen liegt, wobei die zuerst von Clapeyron angegebene Methode befolgt wird, zunächst die Spannungsmomente für die Stützen und hieraus alles Uebrige zu bestimmen. Es wird hierbei nur eine totale gleichmässige Belastung jedes Feldes vorausgesetzt. Vollständiger hat der Herr Verfasser diese Untersuchungen bereits früher veröffentlicht. Hierauf wird gezeigt, wie diese Fälle bei variabelem Querschnitte zu behandeln sind. Zum ersten Male erscheint die interessante Behandlung des auf mehr als zwei Stützen liegenden Körpers von gleichem Widerstande mit constanter Höhe. Hieran schliesst sich die Ermittelung der Form und Durchbiegung der Körper von gleichem Widerstande für die einfachsten Fälle. Das Kapitel schliesst mit der Behandlung des Falles, in welchem die äusseren Kräfte nicht in der Symmetrieebene des Körpers wirken. Bekanntlich tritt in diesem Falle, oder allgemeiner, wenn die Kraftebene nicht durch die eine der Hauptträgheitsaxen der Querschnitte geht, die Axe des Körpers bei der Durchbiegung aus der Kraftebene heraus. Zur Bestimmung der Spannungen sind hier zwei Gleichungen für das Gleichgewicht gegen Drehung aufzustellen, während bei symmetrischer Lage der Kraftebene eine Gleichung genügt. Dieser Fall wird hier richtig behandelt, während er oft, z. B. auch von Rebhann in seinem bekannten Werke, falsch behandelt wurde.

Das III. Kapitel behandelt die zusammengesetzte Biegungselasticität und Festigkeit, d. h. den Fall, in welchem ausser dem Biegungsmomente M_1 auch eine parallel zur Axe wirkende Kraft R_1 vorhanden ist. Es wird nur der Fall behandelt, in welchem nur eine zur Axe parallele Kraft vorhanden ist, dagegen werden diejenigen Fälle, in welchen auch eine senkrecht zur Axe wirkende Kraft vorhanden und welche in der Praxis zuweilen vorkommen, unbeachtet gelassen. Zunächst wird der einfache Fall betrachtet, dass der Abstand der Kraft von der Axe oder ihre Excentricität gegen die Durchbiegung sehr gross ist, so dass das Biegungsmoment M als unabhängig von der Biegung betrachtet werden kann. Sodann derjenige Fall, dass die Excentricität nicht gegen die Durchbiegung zu vernachlässigen ist, wobei also der Aufstellung der Festigkeitsbedingung die Bestimmung der Formänderung vorausgehen muss. Endlich wird der durch seine Eigenthümlichkeit bekannte Fall, dass die Kraft in der Axe selbst wirkt, oder die sogenannte Zerknickungsfestigkeit, behandelt. Die Durchbiegung und somit die Beanspruchung kann hierbei jede beliebige Grösse erreichen, wenn die Kraft eine gewisse Grenze überschreitet. Eine genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung ist hierbei nicht wohl zu erwarten, weil in Wirklichkeit die Kraft P meist eine geringe, jedoch meist sehr unbestimmte Excentricität hat. Der Verfasser nennt daher diesen Fall eine schwache Seite der Festigkeitslehre und theilt deshalb die bekannten empirischen Regeln von Hodgkinson mit. Diese haben für verschiedene Materialien eine verschiedene Form, was offenbar nicht gut denkbar ist, weshalb der Verfasser eine rationellere empirische Regel, welche für alle Materialien gilt, mittheilt.

Hieran schliesst sich die Behandlung der einfach gekrümmten stabförmigen Körper. Zunächst werden die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen und für die Verrückungen eines Punktes der Axe entwickelt und hieran einige Beispiele geknüpft, nämlich ein kreisförmiger Ring und ein ovaler Ring ohne und mit Steg und ein Schwungring mit Berücksichtigung des Einflusses der Arme. Das letzte Beispiel bildet ein Kettenhaken.

Das IV. Kapitel behandelt die Schub-Elasticität und Festigkeit. Zunächst wird die Beziehung zwischen dem Elasticitätsmodul E und dem Schubelasticitätsmodul G durch Untersuchung der Formänderung eines Parallelepipedes durch Tangentialspannungen ermittelt, wobei allgemein angenommen wird, dass bei der Zug- nnd Druckelasticität eine Verkürzung, bezüglich Verlängerung der Querschnittsdimensionen eintritt, welche $\frac{1}{m}$ der Verlängerung, bezüglich Verkürzung der Axe des Stabes ist. Es werden die durch Versuche von Wertheim und Regnault gefundenen Werthe von m mitgetheilt und darnach vorgeschlagen, m für isotrope Körper zwischen 3 und 4 anzunehmen. Die Entwickelung der Grösse von m nach der Moleculartheorie, welche $m = 4$ liefert, wird nicht gegeben. Hierauf werden die Tangentialspannungen τ entwickelt, welche bei der Biegungselasticität durch die parallel zum Querschnitte F wirkende äussere Kraft R_2 entstehen. Hierbei wird angenommen, dass τ in einer zur Kraftebene senkrechten Geraden des Querschnittes constant sei, ohne welche Annahme allerdings eine einfache Theorie nicht möglich ist. Der Verfasser beachtet aber nur die Tangentialspannung, welche im Querschnitt parallel zur Kraftebene wirkt, vernachlässigt aber diejenige, welche senkrecht zur Kraftebene ist, welche letztere allerdings beim rechtekigen Querschnitte Null ist, aber unter Umständen doch von Einfluss sein kann. Hieran schliesst sich eine gleiche Untersuchung für Körper mit einfach gekrümmter Axe, welche sich hier zum ersten Male findet.

Das Auftreten dieser Tangentialspannungen macht es unmöglich, dass die Querschnitte bei der Formänderung eben bleiben, weshalb diese Annahme, auf welcher die im II. Kapitel entwickelten Regeln beruhen, als ein grosser Mangel der Theorie erscheint. Es hätte sich aber diese Annahme, ohne im II. Kapitel andere Resultate zu erhalten, vermeiden lassen.

Zum Schluss wird die einfache Schub-Elasticität und Festigkeit besprochen, welche insbesondere bei den beispielsweise behandelten Nietverbindungen auftritt.

Das V. Kapitel beschäftigt sich mit der Drehungs-Elasticität und Festigkeit. Zuerst wird die gewöhnliche Theorie gegeben, welche die Annahme macht, dass die Querschnitte unverändert, also auch eben bleiben, welche aber nur beim kreisförmigen Querschnitte zutrifft. Es wird hier richtig vorausgesetzt, dass Tangentialspannungen auftreten,

welche im Querschnitte in der Richtung concentrischer Kreise wirken und proportional dem Radius zunehmen. Sodann wird für beliebige, aber in Beziehung auf zwei senkrechte Axen symmetrische Querschnitte eine corrigirte Theorie entwickelt und zwar unter der Annahme, dass die Symmetrieaxen stets zu einander und zur Axe des Stabes senkrechte Gerade bleiben, deren Richtigkeit sich in der That durch eine genaue Theorie nachweisen lässt. Ausserdem wird noch die Annahme gemacht, dass im Ausdrucke für die Tangentialspannung die Querschnitts-Coordinaten nur bis zur dritten Potenz auftreten. Diese Theorie ist für das Rechteck, die Raute und die Ellipse angewendet und hiernach eine allgemeine Näherungsformel (welche für die Ellipse richtig ist) aufgestellt. Es wird in dieser Weise abweichend von der gewöhnlichen Theorie das richtige Resultat gefunden, dass beim Rechteck und der Ellipse die grösste Tangentialspannung in dem der Axe am nächsten liegenden Punkte des Umfanges entsteht. Wir können diese hier zum ersten Male gegebene Theorie, obwohl sie nur Näherungsresultate liefert, für einen mehr elementaren Curs empfehlen, da die anfangs gegebene gewöhnliche Theorie für langgestreckte Querschnittsformen doch von der Wahrheit zu sehr abweichende Resultate giebt.

Die doppelt gekrümmten stabförmigen Körper werden im Allgemeinen nicht behandelt; nur wird am Schlusse dieses Kapitels eine Näherungstheorie der Spiralfedern gegeben.

Das VI. Kapitel entwickelt die allgemeinen Beziehungen zwischen den Spannungen, Ausdehnungen und Verschiebungen im Innern der Körper, welche bekanntlich zuerst von Cauchy aufgestellt wurden. Sie sind hier nach der Darstellung in Holtzmann's theoretischer Mechanik gegeben. Bei den Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung sind nur isotrope Körper berücksichtigt, ohne auf die Moleculartheorie einzugehen. Dieses Kapitel hätte eigentlich den Anfang des Werkes machen sollen, wodurch dasselbe bedeutend an Wissenschaftlichkeit gewonnen hätte. Der Verfasser hat dies aus Rücksicht auf die Bedürfnisse für seinen Unterricht vermieden, weil es ihm darauf ankam, sobald als möglich zur Begründung der einfachsten Constructionsregeln zu gelangen, da die Festigkeitslehre und die Elemente des Maschinenbaues in demselben Semester zum Vortrage kommen. Das ist jedenfalls ein Mangel in der Organisation. Besser würde es sein, zwei Curse der Festigkeitslehre, einen elementaren und einen höhern einzuführen, wie z. B. an den polytechnischen Schulen in Dresden, Prag etc.

Das VII. Kapitel behandelt die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit. Zunächst werden als Ergänzung des vorigen Kapitels die allgemeinen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderung für den Fall entwickelt, dass Normal- und Tangentialspannungen gleichzeitig vorhanden sind, und namentlich die grössten oder Haupt-Spannungen und Ausdehnungen ermittelt. Hieran schliesst sich die genaue allgemeine

Theorie gerader stabförmiger Körper oder das von Clebsch erweiterte De Saint-Venant'sche Problem in der zuerst von Clebsch gegebenen Behandlungsweise. Es setzt einen isotropen Körper, eine gewisse Vertheilungsweise der äusseren Kräfte auf die Endquerschnitte und die Abwesenheit von Kräften voraus, welche auf den übrigen Theil der Oberfläche wirken. Hierdurch wird die Zulässigkeit der früher für die Biegungs- und Drehungsfestigkeit entwickelten Näherungsresultate nachgewiesen. Angewendet wird diese Theorie auf den elliptischen Querschnitt, welcher sich am einfachsten behandeln lässt, und den rechteckigen Querschnitt; bei letzterem wäre aber, da eben eine genaue Theorie gegeben werden soll, eine grössere Strenge zu wünschen. Zuletzt werden einige zusammengesetzte Fälle behandelt, nämlich Zug oder Druck und Verdrehung, Biegung und Verdrehung, Biegung und Verschiebung, letzterer auf den rechteckigen und den doppelt T-förmigen Querschnitt angewendet.

Den Schluss dieses Kapitels bilden die plattenförmigen Körper, welche hier zum ersten Male vollständiger behandelt werden. Zunächst wird die genaue Theorie der Kugelschalen bei symmetrischer Belastung und der Umdrehungskörper mit symmetrischer Belastung im Allgemeinen, beispielsweise angewendet auf den Hohlcylinder mit offenen und geschlossenen Enden gegeben. Diesem schliesst sich die Näherungstheorie der Röhren mit eingeklemmten Enden, der ebenen kreisförmigen Platten, der beliebig begrenzten und belasteten ebenen Platten, angewendet auf die rechteckigen, gleichmässig belasteten Platten an. Hierbei wird, entsprechend der Näherungstheorie der Stäbe, die Annahme gemacht, dass eine auf der mittleren Fläche senkrechte Gerade bei der Formänderung gerade und auf der mittleren Fläche senkrecht bleibt. Bei den rechteckigen Platten wäre eine etwas grössere Strenge wünschenswerth.

Das VIII. Kapitel endlich handelt von der Arbeit der innern Kräfte, woraufsich die Theorie der Festigkeit gegen Stoss gründet. Zunächst wird der allgemeine Ausdruck für die Arbeit der innern Kräfte (oder das sogenannte Clapeyron'sche Theorem) entwickelt, woran sich die bekannte Theorie des Stosses schliesst. Als Anwendung wird schliesslich die Elasticität und Festigkeit gegen Stoss bei der Zug- und Druck-, Biegungs- und Drehungs-Elasticität gerader Stäbe und der Röhren behandelt.

Somit bietet das Buch, obwohl es nicht Alles erschöpft, doch ein reiches Material und verdient wegen der kurzen, präcisen, dabei wissenschaftlichen und meist klaren Behandlungsweise gewiss Empfehlung.

Dr. Winkler,
Prof. am Polytechn. zu Prag.



Nicomachi Geraseni Pythagorei introd. arithm. libri II. *rec.* Ricardus Hoche. *Bibl. script. Graec. et Rom. Teubn. Lipsiae MDCCCLXVI. XI.* 199.

Seinen bisherigen Verdiensten um den Text der Arithmetik des Nicomachus hat Herr Hoche durch die vorliegende Ausgabe eine Arbeit angereiht, welche in den Bemühungen nach dieser Seite hin für geraume Zeit einen Abschluss herbeizuführen geeignet ist. In gefälliger Ausstattung, wohl nur wenige Wünsche übrig lassender Einrichtung ist die nach aller Wahrscheinlichkeit überhaupt jetzt noch mögliche älteste Gestalt des Textes gegeben. Die Ausstattung ist die bekannte der *Bibliotheca Teubneriana*. Der Text ist nach Kapiteln und Paragraphen abgetheilt, dazu aber an der Seite auch die Seitenzahl der Pariser Ausgabe beigefügt. Zunächst darunter befindet sich die Angabe der entsprechenden Abschnitte des Joannes Philoponus, Jamblichus, Boethius, der von Nobbe bekannt gegebenen Scholien, des Theon, Theodorus Protocensor, Soterichus, Pediasimus, endlich der Scholien der Handschrift (*C*) in Zeitz, also alles dessen, was zur Vergleichung beigezogen werden kann, innerhalb der Grenzen der H. H. zugänglichen Werke. Dass in diese der Commentar des *Asclepius Trallianus* und die Bearbeitung des *Thâbet ben Korrah* nicht fallen konnten, ist darum zu bedauern, weil beide Werke die beste Benutzung würden erfahren haben. Die abweichenden Lesarten, welche den unteren Theil der Seiten einnehmen, sind für die ersten drei Kapitel des ersten Buchs vollständig mitgetheilt, um das Verhältniss der Handschriften zu einander deutlich erkennen zu lassen, für den übrigen Text mit zweckmässiger Beschränkung auf das für den Text selbst Erhebliche. Den Schluss bildet ein sehr sorgfältig gearbeiteter Index von 44 Seiten und ein *Catalogus Auctorum*.

Dass die möglichst älteste Gestalt des Textes gegeben ist, erhellt aus der ausführlichen Darlegung hierüber in der *Praefatio*. H. H. konnte den sehr guten Codex von Göttingen aus dem X. Jahrhundert benutzen und machte denselben mit Recht zur Grundlage seiner Ausgabe. Die darin vorkommenden Lücken und insbesondere die sicher nicht von Nicomachus herrührenden Schemata, die auf S. 30, 50, 62, 71—72, 90 u. a. mitgetheilt, oder wie auf S. 57 zu Zeile 15, angedeutet sind, beweisen zwar, dass auch diese beste Handschrift nicht eine blose Copie des Werkes des Nicomachus, sondern eine mit Zusätzen versehene Ausgabe desselben, oder doch die Copie einer solchen ist. Aber diese Zusätze berühren den eigentlichen Text so wenig, dass dieser wenigstens als dem Original möglichst nahekommend kann angesehen werden. Freilich ist dabei nicht zu vergessen, dass nach der Ansicht von H. alle ihm bekannt gewordenen Handschriften in 2 Gattungen sich scheiden, die er einem *archetypus* unterordnet, über dessen Differenz vom Originale nichts zu bestimmen ist. Mit grösster Vorsicht hat H. überdies alle die Wörter, die er den späteren Handschriften allein entnommen hat oder selbst beifügte, mit kleineren Lettern drucken lassen, und die wenigen überflüssigen, wie S. 26, Z. 17—18; 44, 21; 99, 2 in eckige Klammern eingeschlossen.

Diesem Bericht über die Arbeit des Herrn Hoche glaube ich folgende Bemerkungen noch beifügen zu sollen. Es ist nicht erwähnt, von wem die Abtheilung in Kapitel und Paragraphen herrührt; hat dies H. selbst gethan so scheint er mir dies wenigstens auf S. 14, 19 nicht glücklich gethan zu haben. Mit *καθ' ὑποδιαίρεσιν* beginnt so sehr eine neue Gedankenreihe, dass ein neues Kapitel damit dürfte angefangen sein. Die Ueberschriften der Kapitel hat H. in die *var. lect.* gesetzt, und sie sind auch schwerlich von Nicomachus; allein der Grund, der sie herbeigeführt hat, die bequemere Uebersicht, besteht auch jetzt noch, und es würden klein gedruckt diese Ueberschriften im Text nicht stören. Manche Paragraphen ferner sind sehr lang, z. B. 1, 8, 10, wodurch man zu langem Suchen genöthigt ist, wie z.B. bei dem Worte *τριακοστόδυος*, bei welchem im Index neben 10 auch noch 11 stehen könnte. Bezüglich der Wortabtheilung ist S. 18, Z. 16 *συν-αμφότεροι*, 123, 16 *συν-αναιροῦσαν*, S. 8, 4 aber *ἀσυ-νήθη* zu finden. Warum ferner S. 3, Z. 4 *παρα-πολαύει*; 14, 2 *πα-ρεμφαίνων*; 26,15 *πα-ρώνυμον*; 50, 7 *ἀνθυ-πακούων*, da doch *εἰς* und *προς* ihr *ς* behalten, letzteres selbst in *προςώπου* (131, 10), und als unzertrennliche Sylben behandelt werden? — Nach S. IX schrieb H. mit dem *cod. G.* *ἐνάς* statt *ἐννάς*. Da nun zu S. 52, 12 aus *G.* und *P.* *ἐνάδος* angeführt ist und ich S. 53, 4 statt *ἐνάς*, wie H. angiebt, in der Pariser Ausgabe *ἑνάς* finde, so fragt es sich vielleicht doch, ob nicht blos eine Verwechslung des *ἐννάς* mit *ἑνάς* = *μονάς* der Schreibweise *ἐνάς* zu Grunde liegt und diese also nicht aufzunehmen war. — S. X erklärt sich H. gegen die Bruchbezeichnung durch 2 Striche, wie $\delta'' = \frac{1}{4}$, die Hultsch aufnahm, wobei H. sagt, dass er sie nirgends gefunden habe. Sind aber nicht schon die 2 Striche, die nach dem Zeichen für $\frac{1}{2}$ auf S. XI, ferner 149—150 aus der Zeitzer Handschrift angewendet sind, eine Spur davon? Ich habe übrigens dieselbe Bruchbezeichnung, wie Hultsch, auch in der Geometrie des Pediasimus, welche diesen Herbst als Programm erschienen ist, deshalb angewendet, weil ich sie in den von mir benutzten Handschriften vorfand. — Im Text selbst scheint mir S. 12, Z. 6 *ἐκ τοῦ* seine rechte Stelle nicht zu haben, sondern zu schreiben zu sein *ἐκ τοῦ οἷον* (vielleicht *οἱονεὶ*) *λόγον προχ. ἐπεχ.* Vergl. 9, 8—9. — S. 13, Z. 11 könnte *μέσης* richtiger sein, da bei Boethius *uno medio non intercedente* steht. — S. 16 dürfte Z. 16 vor *καὶ μονάδος* zur Vermeidung einer falschen Beziehung ein Komma stehen, Z. 19 vor *ἐὰν* ein Punkt und Z. 20 vor *μία* ein Komma. — S. 19,8 ist *πολλαπλασιαζομένου* nur die versuchte Ausfüllung einer vorgefundenen Lücke. Diese scheint mir aber eher nach *η* entstanden zu sein und zu schreiben *τῷ ὀκτάκις η*, *τῷ ἀπό μόνου τοῦ μέσου πρὸς ἑαυτόν*. Was überhaupt die Form *πολλαπλασιάζειν* neben *πολυπλασιάζειν* betrifft, so kam erstere vielleicht erst durch die Copisten in den Text. S. 22, 20-21 hat die Ausfüllung der Lücke viel Wahrscheinlichkeit für sich, vielleicht würde aber die Stelle besser lauten: *πλείονα μὲν γὰρ ἑνὸς τὰ τμήματα ἐν τῷ μείζονι μέρει, μείζονα δὲ τοῦ ἑνὸς τὰ ἄτμητα ἐν τῷ ἐλάττονι.* — S. 25 scheinen mir die Beischriften bei dem Schema

schwerlich von Nicomachus selbst herrührend, mit Ausnahme etwa von *πλάτος* und *μῆκος*. Sollte H. dieselbe Ansicht dadurch angedeutet haben, dass er diese Stelle des Wortes *γνώμονες* in den Index nicht aufnahm? — S. 27, 3 ist das Komma nach *μονάδος* wohl zu tilgen. — Warum ist S. 31 im Diagramm *οζ* nicht zerlegt? — S. 34, 6—9 ständen statt der runden Klammern besser eckige, da beides, wie S. 26, 17—18 dem Vorhergehenden wörtlich entnommen ist und sich so als späterer Zusatz erweist. Zeile 10 hat Ast's Correctur *ὥστ' ἂν* viel für sich. — S. 35, 14 vermisse ich nach *εἰσὶ* die Zahlen *ὁ κγ καὶ ὁ μ ε*, denen vielleicht anderes noch beigefügt war, so dass eine ganze Zeile ausfiel. — S. 38, 9 scheint mir das klein Gedruckte ein späterer Zusatz von Jemand zu sein, dem es zu viel schien, *ζῷον* auch vom Menschen gelten zu lassen. Vgl. 37, 6—10. — S. 41, 1 ist *ἀδιαφοροῦσα* sehr zweifelhaft. Es könnte *οὔτ' αὖ διαφοροῦσα* geheissen haben. — S. 63, 4—5 ist das Kolon nach *γείτονα* durch ein Komma zu ersetzen und ein Komma nach *στίχου* anzubringen, wenn man überhaupt Unterscheidungszeichen setzen will. — S. 69, 10 ist *καὶ ἀφ' ἧς ἀμφότεραι* schwerlich richtig. Es scheint ein Wort ausgefallen und vielleicht zu schreiben *ἐν γεννηθείσαις ἀφ' ἑκάστης ἀμφοτέραις*. — S. 73, 9—10 dürfte Nicomachus selbst statt *ἀναλύεται* vielmehr *ἡ ἀνάλυσις* geschrieben haben; vergl. 74, 3. — S. 74, 18 sollte wohl *ἤτοι πολλαπλασιεπιμορίῳ ἢ πολλαπλασιεπιμερεῖ* stehen; vergl. z. B. 47, 2; 64, 7. — Woher S. 75, 6 das Femininum in *αἱ γινόμεναι*? — Zeile 8 und 9 sollte wohl *τοὺς ὅρους οἱ λειπόμενοι τρεῖς κτλ* stehen. — S. 80, 1 wird *Λοιπὸν δεῖ* durch *Λοιπὸν ... διαρθρώσω* S. 144, 20 gesichert, es dürfte aber auch diese Stelle im Index erwähnt worden sein. — S. 88, 13 und 14 würde ich die Ausdrücke *τουτέστι τοῦ γ*, *τουτέστι τοῦ ς* eckig eingeklammert haben. — S. 104, 11 und 12 scheint nach *δυνάμει* und *ἐνεργείᾳ πρῶτον* ausgefallen zu sein; vergl. Zeile 16—18. — S. 108, 17 ist das Kolon zu tilgen. — S. 111, 14 scheint die Aufnahme von *τοῦτο* für *ε*, das *G.* und *P.* haben, unnöthig; denn das *ε* ist nur ungeschickt wegen des vorhergehenden *πεντάκις ε* geschrieben worden, als ob mit *πάλιν* auf dieses verwiesen würde. — S. 116, 24 sollte *οὕτως* nicht klein gedruckt sein, da es in der besten Handschrift sich findet, in welcher überhaupt nur *γὰρ* fehlt und *α* und *δ* vertauscht wurden. — S. 130, 20 und 21 und 131, 2 scheinen die Klammern zu tilgen zu sein, da bei *G.* die Lücke in Folge eines Sprunges von dem einen *τετράγωνος* zum zweiten deutlich ist und 131, 5 und 6 dieselbe Umkehr bei *περισσός* und *ἄρτιος* angewendet ist. — Sollte S. 131, 13 nicht *ἡ τρίτη ἐν τῇ τάξει* zu schreiben sein? Vergl. 141, 4 und 143, 9 und 20. — S. 140, 1 könnte nach *εὑρήσεις ὧδε* oder *τῇδε* ausgefallen sein. — S. 149, 21 scheint das Kolon nach *ἔστω* zu streichen. — Druckfehler sind auf das sorgfältigste vermieden worden; neben wenigen anderen leicht zu verbessernden, wie S. 50, 1; 52, 24; 119, 22 sind etwa zu nennen S. 19, 15 *ἡ κβ* statt *ὁ κβ*, 25 im Diagramm *ϙνη* [ε] statt *ϙνη*, 31 im Diagramm *οε* [ιγ]

statt οε $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\varepsilon]}{[\iota\varepsilon]}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\varepsilon]}{[\iota\varepsilon]}$ πε statt $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\varepsilon]}{[\iota\zeta]}$ πε, 38, 1 λϛ statt λς, 50 im Diagramm λε statt λβ, wenn nicht die Handschrift selbst λε hat, 58 im Diagramm, 3. Zeile ις statt ιζ und 72, 16 με statt μβ, beides unter der gleichen Voraussetzung. S. 109, 11 fehlt neben Zeile 11 die Nummer 2. — S. 166 ist bei διχοστατεῖν 8 statt 18 gedruckt. Auf einem späteren Wechsel der Bezeichnung scheint es zu beruhen, dass schon auf S. VI und dann in der *var. lect.* bald G bald G_1 gedruckt ist.

Endlich erübrigt noch einiges von den Problemen zu sagen, welche den Anhang bilden und von denen das 1. dem Κύων, das 2. und 3 dem Isaak zugeschrieben ist, während bei dem 4., 5. und 6. der Autor nicht genannt ist. Das erste löst die Aufgabe $1 + 2 + 3 + \ldots + n = x$ und es ist interessant, weil es zeigt, wie man zu der Vorschrift kam, das letzte Glied mit dem, welches zunächst folgen würde, zu multipliciren und das Produkt mit 2 zu dividiren. Unsere jetzige Bezeichnung angewendet ist der Gedankengang folgender: Liegt eine ungerade Anzahl von Gliedern vor, z. B. $2\nu + 1$, dann ist $\nu + 1$ das mittlere Glied und

$$\begin{array}{rl} 1 + (2\nu + 1) &= 2(\nu + 1) \\ 2 + \quad (2\nu) \quad &= 2(\nu + 1) \\ 3 + (2\nu - 1) &= 2(\nu + 1) \\ \vdots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ (2\nu + 1) + 1 \quad &= 2(\nu + 1), \end{array}$$

also ist $x =$ so oft mal $(\nu + 1)$ als die Anzahl der Zahlen beträgt, oder $x : (\nu + 1) = (2\nu + 1) : 1$ oder $x = (2\nu + 1)(\nu + 1)$. Das nächste Glied nach $2\nu + 1$ ist $2\nu + 2$,

$$(2\nu + 2) = 2(\nu + 1) \text{ also}$$

$$(2\nu + 2)(2\nu + 2) = x \cdot 2 \text{ also } x = \frac{(2\nu + 1)(2\nu + 2)}{2}.$$

Das 2. Problem löst dieselben Aufgaben nach den Formen $\frac{n \cdot n}{2} + \frac{n}{2}$ und $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) n$. In einem Scholion dazu finden sich die Lösungen

$$1 + (1 + a) + (1 + 2a) + \ldots + [1 + (2\nu - 1)a]$$
$$= \frac{[1 + (\nu - 1)a] + [1 + \nu a]}{2} \cdot 2\nu$$

und

$$1 + (1 + a) + (1 + 2a) + \ldots + [1 + 2\nu a] = 2\nu\,[1 + \nu a].$$

Das 3. Problem giebt die Lösung in der bekannten Weise $s = \frac{a + z}{2} \cdot n$.

Das vierte behandelt das Räthsel, die Ziffern ααα γγ εεε ζ ϑ, deren Summe 40 ist, so in 2 Gruppen von 5 Ziffern zu schreiben, dass beide Theile dieselbe Zahl darstellen, und giebt als Auflösung die Form $5 \cdot (1 + 1 + 3 + 7) = 3 \cdot (1 + 5 + 5 + 9)$. Das fünfte lehrt eine Zahl zwischen 7 und

105, die sich Jemand merkt, aus Mittheilungen über die Resultate gewisser Operationen zu finden. Das Verfahren des Ausforschens lässt sich ausdrücken durch $\frac{x}{3} = y + \frac{a}{3}$, $\frac{x}{5} = z + \frac{b}{5}$, $\frac{x}{7} = u + \frac{c}{7}$ und das Verfahren der Lösung durch $\frac{a.70 + b.21 + c.15}{105} = t + \frac{x}{105}$, wobei a, b, c die Zahlen sind, die derjenige sagen muss, der sich die Zahl gemerkt hat. Bemerkenswerth ist hierbei, dass alle Divisionen durch wiederholtes Subtrahiren ausgeführt werden (*ἐκβαλεῖν ἀπ' αὐτοῦ τὸν γ ὁσάκις ἐγχωρεῖ* S. 152, Z. 10) und die Fingerrechnung dabei benutzt wird (*λάμβανε τῇ σῇ χειρὶ τὸν ο ἀριθμόν* S. 152, 14). Das 6. Problem endlich stellt in Worten die Aufgabe

$$2(2[2(2[2(2x - 250) - 250] - 250) - 125] - 125) - 125 = 0$$

und giebt die Lösung $x = 232 \frac{1}{3} \frac{1}{12} \frac{1}{192}$ ($= 232 \frac{27}{64}$).

Ansbach. FRIEDLEIN.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. October 1866.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Cl. 1866, I. Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1866, Bd. I, Heft 3. München, Franz. 16 Ngr.

Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich; redig. von R. Wolf. 11. Jahrg. 1. Heft. Zürich, Höhr. pro complet 3 Thlr.

Annalen der Königl. Sternwarte bei München; herausgeg. von J. Lamont. 5. Supplementbd. München, Franz. 2⅔ Thlr.

Repertorium für physikalische Technik, für mathematische und astronomische Instrumentenkunde; herausgeg. von Ph. Carl. 2. Bd. 1. Heft. München, Oldenburg. pro compl. 6 Thlr. 12 Ngr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgeg. von C. W. Borchardt. 66. Bd., 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro complet 4 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Zuchold. 16. Jahrg. 1. Heft. Januar — Juni 1866. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅓ Thlr.

Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Tome 35. *Paris, Firmin Didot frères, fils & Co.*

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'acad. des sciences de St. Petersbourg. Tome III, livr. 8. Leipzig, Voss. 15 Ngr.

Mélanges physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'acad. de St. Petersbourg. Tome VI, livr. 5. Ebendas. 13 Ngr.

Reine Mathematik.

Prym, F., Zur Theorie der Functionen in einer zweiblätterigen Fläche. Zürich, Schabelitz. 24 Ngr.

Gleue, Reihensummirungen durch bestimmte Integrale. Osterprogramm für 1865 des Pädagog. zu Ilefeld.

Cramer, Entwickelung der Differentialquotienten von Functionen einer Variabelen. Michaelis-Programm für 1865 der städt. höheren Bürgerschule zu Mühlheim a. Rh.

Decker, A., Ueber Theilbruchreihen. August-Programm für 1865 des Obergymnasiums zu Troppau.

Ley, Beiträge zur Entwickelung der cyclischen Functionen. Michaelis-Programm für 1865 des Gymnas. an Marzellen zu Cöln.

Worpitzky, Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Functionen durch Kettenbrüche. Oster-Programm des städt. Friedrichs-Gymnasiums zu Berlin.

Wolfram, C. A., Ueber die arithmetische und geometrische Bedeutung der Taylor'schen Reihenglieder nebst der directen Integration. Würzburg, Julien. 12 Ngr.

Dienger, J., Theorie und Auflösung der höheren Gleichungen. Stuttgart, Metzler. 24 Ngr.

Féaux, B., Buchstabenrechnung und Algebra. 4. Aufl. Paderborn, Schöningh. 17½ Ngr.

Pollak, F. X., Sammlung arithmetischer und algebraischer Aufgaben. 1. Abth. 5. Aufl. Augsburg, Rieger. ⅜ Thlr.

Gisecke, B., Systematisch geordnete Aufgaben zum Unterrichte in der Buchstabenrechnung und Algebra. Halle, Schmidt. 12 Ngr.

Schoder, H., Logarithmen mit vier und drei Stellen. Stuttgart, Lindemann. 4 Ngr.

Oppolzer, Th., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Wien, Braumüller. ⅙ Thlr.

Schlömilch, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Braunschweig, Vieweg. ⅜ Thlr.

Wittstein, Th., Siebenstellige Gauss'sche Logarithmen. Hannover, Hahn. 1 Thlr. 24 Ngr.

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 2. Aufl. 2 Thl. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. Vorträge. 1. Abth. Hannover, Rümpler. 1⅙ Thlr.

Geiser, C. F., Beiträge zur synthetischen Geometrie. Zürich, Schabelitz. 16 Ngr.

Heinen, Einige planimetrische Sätze. Michaelis-Programm für 1865 der städt. Realschule zu Düsseldorf.

Junghann, Ein stereometrischer und ein planimetrischer Lehrsatz. Oster-Programm für 1865 der städt. Realschule in Perleberg.

Oelsnitz, A. v. d., Die Theilung eines Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile. Michaelis-Programm der städt. Friedrichsschule zu Marienwerder.

Meyer, C., Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien. 1. Thl. 10. Aufl. 2. Thl. 5. Aufl. Mühlheim an der R., Bagel. 1 Thlr. 2½ Ngr.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Bd. 2. Abth. Planimetrie. 3. Aufl. Hannover, Hahn. ⅔ Thlr.

Wiegand, A., Lehrbuch der Mathematik. 1. Curs der Planimetrie. 8. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

—— —— 2. Curs der Planimetrie. 7. Aufl. Ebendas. ⅓ Thlr.

Koppe, K., Die ebene Trigonometrie. 4. Aufl. Essen, Bädeker. 16 Ngr.

Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklid's Elementen. Osterprogramm für 1865 des Gymnasiums zu Herford.

Ruchonnet, Ch., *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes.* 2. *édit.* Zürich, Orell, Füssli & Co. 1⅔ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Paulus, Ch., Zeichnende Geometrie. Stuttgart, Metzler. 1⅔ Thlr.

Niemtschik, R., Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe und hierauf bezügliche Theoreme. (Akad.) Wien, Gerold. 1⅓ Thlr.

Hansen, P. A., Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig. Leipzig, Hirzel. 28 Ngr.

Bauernfeind, C. M., Die Bedeutung moderner Gradmessungen. Vortrag. München, Franz. 13 Ngr.

Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865. Berlin, G. Reimer. 1⅙ Thlr.

Jordan, W., Die trigonometrische Höhenmessung und die Ausgleichung ihrer Resultate mittelst der Wahrscheinlichkeitsrechnung, an einem ausgeführten Höhennetz dargestellt. Stuttgart, Lindemann. 12 Ngr.

Wiegand, A., Grundriss der mathematischen Geographie. 6. Aufl. Halle, Schmidt. 10 Ngr.

Küpper, C., Einleitung in die Mechanik durch rein geometrische Betrachtungen. Trier, Groppe. 1 ½ Thlr.

Graefe, V. v., Ueber eine allgemeine Formel zur Bestimmung des Schwerpunktes von Körpern. Hamburg, Meissner. 12 Ngr.

Place, F., Theorie und Construction der Neigungswage (Zeigerwage). Weimar, Voigt. 15 Ngr.

Lang, V. v., Lehrbuch der Krystallographie. Wien, Braumüller. 2 ⅔ Thlr.

Kepleri, J., *Opera omnia, ed. C. Frisch. Vol. VI, pars* 2. Frankfurt a/M., Heyder & Zimmer. 2⅓ Thlr.

Giesel, *Trium corporum se mutuo attrahentium et in eadem recta motorum motus definiatur.* Oster-Programm für 1865 der städt. höheren Bürgerschule zu Delitzsch.

Germain, A., *Traité des projections des cartes géographiques. Représentation de la sphère et de la sphèroïde.* 1. *Partie. Théorie des projections.* 2. *Partie. Construction et usages des projections. Paris, Bertrand.* 15 fr.

Physik.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Ausg. 10., 11. und 12. Lief. Leipzig, Teubner. à 25 Ngr.

Frick, J., Lehrbuch der Naturlehre für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Freiburg im Br., Wagner. 2 Thlr.

Koppe, K., Anfangsgründe der Physik. 9. Aufl. 1. Hälfte. Essen, Bädeker. pro complet 1 Thlr. 8 Ngr.

Bopp, C., Wandtafeln der Physik als Ergänzung zu den physikalischen Apparaten. Ravensburg, Dorn. 2 Thlr.

—— —— Textheft dazu 6 Ngr.

Harder, P. E., Das Moleculargesetz mit besonderer Anwendung auf Wasser, Dampf und Luft. Hamburg, Meissner. 2 Thlr.

Wüllner, A., Einleitung in die Dioptrik des Auges. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

Holtzmann, C., Mechanische Wärmetheorie. Stuttgart, Metzler. ⅓ Thlr.

Oettingen, A. v., Ueber die Correction der Thermometer, insbesondere über Bessel's Kalibrirmethode. Dorpat, Gläser. 1 Thlr. 16 Ngr.

Hankel, W. G., Elektrische Untersuchungen. 7. Abth. Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Leipzig, Hirzel. 24 Ngr.

MONCKHOVEN, D. VAN., Photographische Optik. Beschreibung der photographischen Objective und Vergrösserungsapparate. Aus dem Französischen übersetzt von A. Martin. Wien, Kramer. 1⅓ Thlr.

VIVENOT, R. v., Beiträge zur Kenntniss der klimatischen Evaporationskraft und deren Beziehung zu Temperatur, Feuchtigkeit, Luftströmungen und Niederschlägen. Erlangen, Enke. 26 Ngr.

WANGERIN, A., *De annulis Newtonianis. Dissert. inaug.* Königsberg, Schubert & Seidel. 6 Ngr.

WALKER, E., *Terrestrical and cosmical magnetism; the Adams prize essay for* 1865. *London*, *Bell & C.* 15 sh.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1865.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

225. Beweis eines allgemeinen Satzes über algebraische Curven. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. X, 503. [Vergl. Bd. X, No. 126.]
226. *On the association of possible magnitudes with impossible branches of curves.* Walton. *Quart. Journ. math. VII*, 232.
227. *Geometrical notes.* Burnside. *Quart. Journ. math. VII*, 227.
228. *On rolling curves.* Purser. *Quart. Journ. math. VII.* 129.
229. *Related caustics.* Childe. *Quart. Journ. math. VII*, 136. — Abercrombie. Smith. *ibid.* 242.
230. Ueber die durch $y = \sqrt[x]{x}$ dargestellte Curve. H. Müller. Grunert's Archiv XLIV, 128.
231. *On a triangle in- and circumscribed to a quartic curve.* Cayley. *Phil. Mag. XXX*, 340.
    Vergl. Imaginäres 314.

Analytische Geometrie des Raumes.

232. *Analogie de la géométrie du plan à celle de l'espace.* P. Serret. *N. ann. math. XXIV*, 433. [Vergl. No. 12.
233. Analytisch-geometrische Parallelen. Dietrich. Grun. Archiv XLIV, 200.
234. *Note on the contact of curves.* Spottiswoode. *Quart. Journ. math. VII*, 114.
235. *On the signification of an elementary formula of solid geometry.* Cayley. *Phil. Mag. XXX*, 413.
236. *Section du tore par un plan et par une sphère bitangents.* Nombel. *N. ann. math. XXIV*, 346. — Dyrion *ibid.* 348. — Gérono *ibid.* 349.

Astronomie.

237. Neue Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Astronomie. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 259.
238. *Sur l'existence d'une cause nouvelle ayant une influence sensible sur la valeur de l'équation séculaire de la lune.* Delaunay. *Journ. Mathém. XXX*, 401.
239. Ueber einen Fehler bei der gewöhnlichen Berechnung der Auf- und Untergänge der Sonne und des Mondes. Kokides. Grun. Archiv XLIV, 255.
240. *Note on the action in an elliptic orbit. Quart. Journ. mathem. VII*, 45.

Asymptoten.

Vergl. Hyperbel 308. Kreis 333.

Attraktion.

241. Ueber die Schwere an der Oberfläche eines Rotationssphäroids. Friesach. Grun. Archiv XLIV, 355.
    Vergl. Potential.

B.

Bestimmte Integrale.

242. Ueber das Integral $\int_0^{2\pi} f(\cos nu)\, l \sin \frac{1}{2}u \,.\, du$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 500.

C.

Combinatorik.

243. *On symmetric functions of the natural numbers and on their partition.* Scott. *Quart. Journ. mathem. VII*, 81.
244. *On a property of commutants.* Cayley. *Phil. Mag.* XXX, 411.
245. *On a problem of geometrical permutation.* Cayley. *Phil. Mag.* XXX, 370.

Cubatur.

246. *Relation entre les volumes de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre, de 4 autres tétraèdres et des 3 axes de la surface. N. ann. math. XXIV*, 549.

D.

Determinanten.

247. Zur Theorie der Determinanten. Dietrich. Grun. Archiv XLIV, 344.
248. *Théorème sur les déterminants.* Mirza Nizam. *N. ann. math. XXIV*, 500.
249. *Equation entre trois fonctions d'une variable independante et leurs dérivées premières et secondes.* Chenim. *N. ann. math. XXIV*, 369. — *A. S. ibid.* 371.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

250. *Analytical metrics.* Clifford. *Quart. Journ. math. VII*, 54.
251. *The geometry of the triangle: on the equation of a certain envelope.* Greer. *Quart. Journ. math. VII*, 70.
252. *Area of a triangle whose three lines are referred to trilinear coordinates.* Walker. *Quart. Journ. math. VII*, 122.
253. *On a formula for the intersections of a line and conic and on an integral formula connected therewith.* Cayley. *Quart. Journ. math. VII*, 1. [Vergl. Bd. VIII, No. 331.]
254. *On the reciprocation of a quartic developable.* Cayley. *Quart. Journ. math. VII*, 87.
255. *On a special sextic developable.* Cayley. *Quart. Journ. math. VII*, 105. [Vergl. Bd. X, No. 41.]

Vergl. Cubatur.

Differentialgleichungen.

256. *Extension of the solution of Riccatis equation.* Challis. *Quart. Journ. math. VII*, 51. — Hargreave *ibid.* 256.
257. *Ramener l'équation* $P.y''+Q.(y')^2+R.y'+S=0$ *à une équation du premier ordre.* Tychsen. *N. ann. math. XXIV*, 523.
258. *On linear differential equations of the third order.* Cockle. *Quart. Journ. math. VII*, 316.

Differentialquotient.

259. *On interpolation with reference to development and differentiation.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. VII*, 184.
260. *Démonstration d'une formule différentielle.* Hemming. *N. ann. math. XXIV*, 554.

E.

Elasticität.

261. *Mémoire sur les divers genres d'homogénité des corps solides.* De Saint-Venant. *Journ. Math. XXX*, 297.
262. *Sur l'impulsion et la résistance vive des pièces élastiques et sur les forces vives dues aux mouvements vibratoires.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXI*, 33.

Elimination.

263. *On some points in the theory of elimination.* Salmon. *Quart. Journ. math. VII*, 327.

Ellipse.

264. Construction der Fusspunktscurve einer Ellipse oder Hyperbel. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. X, 332.
265. *Théorème sur le triangle inscrit dans l'ellipse.* *Mister & Neuberg.* *N. ann math. XXIV,* 458.
    Vergl. Maxima und Minima 339. Rectification.

Ellipsoid.

Vergl. Oberflächen 356. Perspective. Potential.

Elliptische Functionen.

266. *On a fondamental formula in the theory of elliptic functions.* *Warren.* *Quart. Journ. math. VII,* 178.
267. Ueber die Ausdrücke elliptischer Integrale 2. und 3. Gattung durch Θ-Functionen. Roch. Zeitschr. Math. Phys. X, 317.
    Vergl. Homogene Functionen 300.

F.

Functionen.

268. *On Laplace's coefficients and functions.* *Heath.* *Quart. Journ. math. VII,* 23.
269. r, p, n *étant trois nombres entiers positifs,* p *et* n *deux nombres premiers entre eux* $\frac{(r-1)(2^{pn}-1)}{(r^p-1)(r^n-1)}$ *est un nombre entier.* *De Verieu.* *N. ann. math. XXIV,* 514.
270. *On the expansion of* $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *in ascending powers of* x. *Frost.* *Quart. Journ. math. VII,* 381.
    Vergl. Combinatorik 243.

G.

Geodäsie.

271. Ueber die Pothenot'sche Aufgabe. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 184.
272. Ueber Trunk's Planimeter. Hübner. Grun. Archiv XLIV, 337.
273. *On two new forms of Heliotrope.* *W. H. Miller.* Grun. Archiv XLIV, 361.

Geometrie (descriptive).

274. *De la projection gauche.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XXIV,* 384.

Geometrie (höhere).

275. *Sur les systèmes de courbes et de surfaces et sur certaines formules qui s'y rattachent.* *De Jonquières.* *Journ. Mathém. XXX,* 412.
276. *Exercices sur la théorie des sections coniques.* *De Jonquières.* *N. ann. math. XXIV,* 504.
277. *Geometrical theorems demonstrated by the method of inversion.* *Casey.* *Quart. Journ. math. VII,* 378.
278. *Théorème sur 4 cercles passant par un même point.* *Fontaneau.* *N. ann. math. XXIV,* 557.
279. *Lorsqu'une courbe a 4 foyers sur un cercle elle en a nécessairement* 12 *autres situés par* 4 *sur* 3 *cercles.* *Coren.* *N. ann. math. XXIV,* 518.

Geschichte der Mathematik.

280. Die „mittleren" Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. X, 456.
281. Diophantus bei den Arabern im IX. S. Steinschneider. Zeitschr. Math. Phys. X, 499.
282. Die Entwicklung des Rechnens mit Columnen. Friedlein. Zeitschr. Math. Phys. X, 241.
283. Handschriftlicher Fund aus der Thorner Gymnasial-Bibliothek. Curtze. Grun. Archiv XLIV, 371, 501.

Gleichungen.

284. *On Quantoids.* Cockle. *Phil. Mag.* XXX, 347.
285. *Théorème sur les permanences.* Sylvester. *Compt. rend. LXI,* 282.
286. *Théorie des équations réciproques.* Vogt. Grun. Archiv XLIV, 50.
287. *Sur une classe d'équations résolues par Moivre et leurs dérivées.* Realis. *N. ann. math. XXIV,* 289. [Vergl. No. 93.]
288. Ueber die Beurtheilung der Wurzeln einer vorgelegten cubischen Gleichung. Kerz. Grun. Archiv XLIV, 1, 129, 379. [Vergl. Bd. X, No. 112.]
289. *Solution of a quartic.* Warren. *Quart. Journ. math. VII,* 182.
290. *On the algebraical solution of biquadratic equations.* Ball. *Quart. Journ. math. VII,* 6, 358.
291. Ueber die biquadratischen Gleichungen Pokorny. Zeitschr. Math. Phys. X, 320.
292. Ueber eine Beziehung der Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks zu den Wurzeln einer biquadratischen Gleichung und ihrer Resolvente. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. X, 331.
293. *Sur la résolution numérique des équations du cinquième degré et de quelques autres équations.* Montucci. *Compt. rend. LXI,* 31. [Vergl. No. 4.]
294. *Sur l'équation du cinquième degré.* Hermite. *Compt. rend. LXI,* 877, 965, 1073.
295. *Trouver les racines réelles de l'équation* $a^x + b^x = c^x$. Dupain. *N. ann. math. XXIV,* 454.
296. *Sur les racines réelles de l'équation* $h.\sin^4 x = \sin(x-\alpha)$. Delaitre. *N. ann. math. XXIV,* 353.
297. *Extension aux équations simultanées des formules de Newton.* Méray. *Compt. rend. LXI,* 710.

Vergl. Imaginäres 312. Ludolph'sche Zahl. Mechanik 352.

H.

Homogene Functionen.

298. *On some of the conditions of the resolvability of the ternary cubic form into factors.* Walker. *Quart. Journ. math. VII,* 272. — Spottiswoode. *ibid.* 281. [Vergl. Bd. X, No. 118.]
299. *On the Hessian of a composite quaternary cubic form.* Walker. *Quart. Journ. math. VII,* 347.
300. *On Legendre's reduction of a binary quartic to its canonical form.* Warren. *Quart. Journ. math. VII,* 338.
301. *The reduction of the resultant of two binary quartics to the fundamental invariants of those quartics.* Warren. *Quart. Journ. math. VII,* 67.
302. *Sur la décomposition de certaines expressions en deux carrés.* Realis. *N. ann. math. XXIV,* 451.

Vergl. Combinatorik 244. Variationsrechnung.

Homographie.

303. *Génération homographique d'une conique.* Desq & Grassat. *N. ann. math. XXIV,* 515.

Hydrodynamik.

304. *Supplementary researches in Hydrodynamics.* Challis. *Phil. Mag.* XXX, 207, 258. [Vergl. Bd. VIII, No. 326.]
305. Ueber Hydrodiffussion in begrenzten cylindrischen Gefässen. Beez. Zeitschr. Math. Phys. X, 358.
306. *Sur la théorie des roues hydrauliques: théorie des roues à augets.* De Pambour. *Compt. rend. LXI,* 1121.

Hyperbel.

307. *Construire une hyperbole équilatère connoissant le centre, une tangente et un point de la courbe.* Pabou. *N. ann. math. XXIV,* 320.
308. *Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donné par l'équation générale du second degré passe à l'origine.* Dorbecourt & Baillet. *N. ann. math. XXIV,* 474.
309. Der excentrische Kreis für die Hyperbel. Struve. Grun. Archiv XLIV, 196.

Hyperboloid.

310. *Lieu des sommets de tous les cônes du second degré inscrits à un hexagone gauche. (Steiner.)* Brasseur. *N. ann. math. XXIV*, 319.

I.

Imaginäres.

311. *Nouvelle interprétation géométrique des valeurs imaginaires d'une variable.* Mouchot. *Compt. rend. LXI*, 113.
312. *Demonstration of Newton's rule for determining the numbre of imaginary roots in an equation.* Young. *Phil. Mag. XXX*, 113, 289, 363. — Sylvester *ibid.* 232, 364.
313. Theorie der Aequivalenzen. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 443.
314. *On the transformation of the axes of coordinates in impossible geometry.* Walker. *Quart. Journ. math. VII*, 102.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 226. Kreis 333.

Integral (unbestimmtes).

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 253.

Involution.

Vergl. Sphärik 389.

K.

Kegelschnitte.

315. *Systèmes de coniques qui satisfont à sept conditions dans l'espace.* Chasles. *Compt. rend. LXI*, 389.
316. *Étude de géométrie comparée avec applications aux sections coniques.* Mathien. *N. ann. math. XXIV*, 393, 481, 529.
317. Geometrischer Ort der Mittelpunkte aller durch einen festen Punkt gehenden Sehnen eines Kegelschnittes. Braun. Grun. Archiv XLIV, 358. [Vergl. No. 117.]
318. *Sur une conique donnée par 6 points situés sur une autre conique.* Mlle. Lechaucey. *N. ann. math. XXIV*, 372. — Gazères *ibid.*
319. *Théorème sur les coniques.* Cornu. *N. ann. math. XXIV*, 334. — Painvin *ibid.* 335. — Mathieu 335. — Recoq *ibid.* 336.
320. *Théorèmes sur les diamètres dans les coniques.* Painvin. *N. ann. math. XXIV*, 498.
321. *On the relation connecting the area of a given triangle with that of its polar triangle with respect to a central conic.* Walker. *Quart. Journ. math. VII*, 119.
322. *Du lieu des centres des coniques qui passent par 4 points fixes.* Mannheim. *N. ann. math. XXIV*, 133.
323. *On a certain system of conics.* Ferrers. *Quart. Journ. math. VII*, 20.
324. *Coniques circonscrites à un quadrilatère, et coniques inscrites à un autre quadrilatère dont les côtés passent par les somets du premier.* Widmann & Gilliot. *N. ann. math. XXIV*, 551.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 253. Ellipse. Geometrie (höhere) 276. Homographie. Hyperbel. Normale. Oberflächen zweiter Ordnung 363. Parabel. Pascal's Sechseck.

Kettenbrüche.

325. *Sur les fractions continues algébriques.* Tchébychef. *Journ. Mathém. XXX*, 353.
326. Methode, eine Potenz mit rational gebrochenem Exponenten in einen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Partialbrüche Stammbrüche sind. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. X, 315.

Kreis.

327. Bedingungsgleichung dass vier Punkte in einem Kreise liegen. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 376.
328. *Construction des points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés.* Barbier. *N. ann. math. XXIV*, 313.
329. *On the nine point circle.* W. H. B. *Quart. Journ. math. VII*, 302.
330. *Sur les cercle des neuf points de deux triangles.* Pétrelle. *N. ann. math. XXIV*, 322.

331. *Sur le cercle de neuf points.* Juncker. *N. ann. math. XXIV*, 323.
332. *Geometrical theorems.* Griffiths. *Quart. Journ. math. VII*, 46, 341. [Vergl. Bd. X, No. 151.]
333. Ueber die Curven 3. Grades, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispunkte gehen. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. X, 321.
Vergl. Geometrie (höhere) 278, 279.

Krümmung.

334. *On the curvature of curves of double curvature.* Routh. *Quart. Journ. math. VII*, 37.
Vergl. Determinanten 249.

L.

Laplace'sche Function.

Vergl. Functionen 268.

Logarithmen.

335. *On fractions for the value of the modulus of common logarithms.* Templeton. *Phil. Mag. XXX*, 434.
336. *On a method of utilizing compact logarithmic tables.* Templeton. *Phil. Mag. XXX*, 221.

Ludolph'sche Zahl.

337. Ueber die Quadratur des Zirkels. Scheffler. Grun. Archiv XLIV, 84.

M.

Maxima und Minima.

338. *Note sur quelques cas de maximum dans les polyèdres réguliers.* Babinet. *Compt. rend. LXI*, 827, 973.
339. *Sur l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire ou circonscrire à un quadrilatère donné.* P. Serret. *N. ann. math. XXIV*, 303.
340. *Determination of the solid body the velocity of instantaneous axis of rotation of which is a maximum or a minimum.* Warren. *Quart. Journ. math. VII*, 179.
341. *On the axis of maximum and minimum reluctance of a rigid body revolving about a rigid point.* Walton. *Quart. Journ. math. VII*, 376.

Mechanik.

342. *Théorème relatif à l'équilibre de quatre forces.* Cayley. *Compt. rend. LXI*, 829.
343. Ueber die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen eines Systems unveränderlich mit einander verbundener Punkte. Hartwig. Grun. Archiv XLIV, 340.
344. *On the principle of least action.* Challis. *Quart. Journ. math. IV*, 125.
345. *On the principle of least action.* H. W. C. *Quart. Journ. math. VII*, 326.
346. *On elliptic ribs.* Cotterill. *Phil. Mag. XXX*, 21. [Vergl. No. 140, 141, 142].
347. *Remarques concernant le mouvement d'un point oscillant circulairement sur une surface de révolution du second ordre.* Léon Foucault. *Compt. rend. LXI*, 515.
348. *On the molecular strains of a revolving body.* Walton. *Quart. Journ. math. VII*, 353.
349. *On the angular velocity of the instantaneous axis in space.* Ferrers. *Quart. Journ. math. VII*, 74.
350. Ueber den Einfluss der Gestalt und täglichen Bewegung des Erdballs auf Gleichgewicht und scheinbare Bewegung irdischer Gegenstände in der Nähe der Oberfläche. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. X, 402.
351. *De la mesure des petites forces au moyen du pendule.* Jamin & Briot. *Compt. rend. LXI*, 1050.
352. *Sur l'équation du troisième degré de la question du pendule conique.* Dieu. *N. ann. math. LXI*, 456.
353. *Recherches géometriques et physiques sur le bifilaire.* Volpicelli. *Compt. rend. LXI*, 418.
Vergl. Attraktion. Elasticität. Hydrodynamik. Maxima und Minima 340, 341, Schwerpunkt. Trägheitsmoment. Wärmelehre.

N.

Normalen.

354. *Lieu des centres des coniques tangentes aux côtés d'un triangle et telles, que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point.* Poussart. *N. ann. math. XXIV*, 469.

O.

Oberflächen.

355. *Théorie des surfaces: indicatrice circulaire.* E. Lamarle. *Compt. rend. LXI*, 249. [Vergl. No. 150.]
356. *Surface lieu des courbes de contact des cônes ayant un point fixe pour sommet et circonscrits aux ellipsoïdes d'un système homofocal donné.* Grassat & Desq. *N. ann. math. XXIV*, 365.
357. *Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque.* E. de Jonquières. *Compt. rend. LXI*, 440.
358. *Théorie des surfaces polaires d'un point.* Painvin. *N. ann. math. XXIV*, 337, 413.
359. *Sur les surfaces gauches, qui peuvent être représentées par des équations à différences partielles du second ordre.* Ullysse Dini. *Compt. rend. LXI*, 1001.
360. *Sur une surface réglée du huitième ordre qui possède cinq lignes doubles du quatrième ordre.* De la Gournerie. *Compt. rend. LXI*, 116.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 254, 255.

Oberflächen zweiter Ordnung.

361. *Règles pour reconnaître l'espèce d'une surface du second ordre.* Dieu. *N. ann. math. XXIV*, 408.
362. Ueber ein stets mit derselben Seitenzahl schliessendes Polygon auf einer Fläche 2. Grades. Berner. Zeitschr. Math. Phys. X, 382.
363. *On polygons inscribed in curves and surfaces of the second degree.* Gardener. *Quart. Journ. math. VII*, 146, 284.
364. Sind die Distanzen eines Punktes π von 3 festen Punkten ω, ω', ω'' respective gleich den Distanzen eines Punktes p von 3 festen Punkten o, o', o'', bewegt sich der Punkt π in einer Ebene, so beschreibt der Punkt p eine Fläche 2. Grades. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. X, 416.
365. Ueber ein System parallelachsiger Rotationsflächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Schnittcurve besitzen. Gretschel. Grun. Archiv XLIV, 124.
366. *Extension au cas de l'espace des considérations de M. Mannheim.* Carrière. *N. ann. math. XXIV*, 543. [Vergl. No. 322.]

Vergl. Hyperboloid. Mechanik 347. Sphärik.

Operationscalcul.

367. *On Arbogast's calculus of derivations.* Sam. Roberts. *Quart. Journ. math. VII*, 10.

P.

Parabel.

368. *Sur la développée de la parabole.* Recoq. *N. ann. math. XXIV*, 360.

Pascal'sches Sechseck.

369. Zur Theorie des Pascal'schen Secksecks. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. X, 390.

Perspective.

370. *On the projection of the ellipsoid.* Cayley. *Phil. Mag. XXX*, 50.

Planimetrie.

371. *Critical examination of the first propositions of Euclid.* Wolff. *Quart. Journ. math. VII*, 76.
372. Ueber das Deltoid. Reuschle. Zeitschr. Math. Phys. X, 506.
373. Der Mittelpunkt des einem Dreiecke umschriebenen Kreises ist Schwerpunkt der Mittelpunkte der 4 eingeschriebenen Kreise (Beltrami). Struve. Grun.

Archiv XLIV, 119. — C. Schmidt ibid. 120. — Stammer ibid. 335. [Vergl. No. 207.]

374. *Étant donné un cercle, un diamètre et une droite, on propose de tracer une corde parallèle à la droite donnée et divisée par le diamètre en rapport donné.* Gay. *N. ann. math. XXIV*, 476.

375. *Construire un carré dont les côtés prolongés coupent une droite donnée en 4 points donnés.* Gay & Daigueplats. *N. ann. math. XXIV*, 476.

Potential.

376. *Attraction of an ellipsoid deduced from properties of the potential.* Frost. *Quart. Journ. math. VII*, 373.

Q.

Quadratische Formen.

377. *De la forme* $x^2+y^2+z^2+7t^2$. Liouville. *Journ. Mathém. XXX*, 234.

378. *Sur les deux formes* $x^2+y^2+6z^2+6t^2$, $2x^2+2y^2+3z^2+t^2$. Liouville. *Journ. Mathém. XXX*, 359.

Quadratur.

379. Ueber die Berechnung eines Kreisabschnittes. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 363.

380. *On certain formulas of mensuration.* Purkiss. *Quart. Journ. math. VII*, 235.

R.

Rectification.

381. Ueber die näherungsweise Rectification der Ellipse. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. X, 501.

382. *Expression par des arcs d'ellipse d'une courbe déduite de la cycloide. N. ann. math. XXIV*, 555.

Reihen.

383. *Researches in analysis.* Blissart. *Quart. Journ. math. VII*, 155, 223.

384. Summirung der Reihe $\frac{1}{1}.tg\frac{\varphi}{1}+\frac{1}{2}.tg\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}.tg\frac{\varphi}{4}+\frac{1}{8}tg\frac{\varphi}{8}+\dots$ P. Escher. Grun. Archiv XLIV, 374.

385. *On properties of the series* $\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\dots+\frac{1}{(n-1)^r}$. Frost. *Quart. Journ. math. VII*, 370.

Vergl. Functionen 270.

S.

Singularitäten.

386. *On the higher singularities of a plane curve.* Cayley. *Quart. Journ. math. VII*, 212.

387. *Note sur les courbes algébriques.* P. Serret. *N. ann. math. XXIV*, 311.

Schwerpunkt.

Vergl. Planimetrie 373.

Sphärik.

388. *Démonstration géométrique les formules de trigonométrie sphérique, qui donnent* $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tang\frac{A}{2}$. Barbier. *N. ann. math. XXIV*, 421.

389. *De l'involution plane relativement à la sphère.* Poudra. *N. ann. math. XXIV*, 493.

390. *Propriétés du tétraèdre polaire.* Poudra. *N. ann. math. XXIV*, 496.

391. Der Pythagoräische Lehrsatz in der Sphärik. Eilles. Grun. Archiv XLIV, 440.

392. *Construire une sphère tangente à 4 sphères données.* Barbier. *N. ann. math. XXIV*, 537.

393. *Quand arrive-t-il que le segment et la zone sphérique sont exprimés par le même nombre? N. ann. math. XXIV*, 512.

Stereometrie.

394. *Recherches sur les polyèdres; théorie des aspects retrogrades.* Jordan. *Compt. rend. LXI*, 205. [Vergl. No. 215.]
395. *On Polyhedra.* Cayley. *Quart. Journ. math. VII*, 304.
Vergl. Maxima und Minima 338.

T.

Tabellen.

396. *Table of the reciprocals of numbers.* Oaker. *Phil. Mag.* XXX, 312.
Vergl. Logarithmen 336.

Trägheitsmoment.

397. Beitrag zur Lehre von den Trägheitsmomenten. Reye. Zeitschr. Math. Phys. X, 433.
398. Die Trägheitsmomente gradkantiger, krummkantiger und gewundener Prismen und Pyramiden. Zetzsche. Grun. Archiv XLIV, 227.

Trigonometrie.

399. *On a rational integral identity between the sines and cosines of any four angles and four of their arithmetical sums in twos.* Cotterill. *Quart. Journ. math. VII*, 259.
400. *Équation entre les sinus de deux angles construits dans un cercle.* Massing. *N. ann. math. XXIV*, 326. — Niébylowski *ibid.* 328.

V.

Variationsrechnung.

401. *Solution of a problem in Variations by the theory of homogeneous forms.* Warren. *Quart. Journ. math. VII*, 171.

W.

Wärmelehre.

402. *Sur diverses formes applicables, qu'on peut donner aux équations fondamentales de la théorie mécanique de la chaleur.* Clausius. *Journ. Mathém.* XXX, 361.
403. *On thermodynamic and metamorphic functions, disgregation an real specific heat.* Rankine. *Phil. Mag.* XXX, 407.
404. *Sur un mode de transformation des figures employé dans la théorie de la chaleur.* Morin. *Compt. rend. LXI*, 477. — Haton de la Goupillière *ibid.* 569.
405. *Sur une loi générale relative à la force agissante de la chaleur.* Clausius. *Compt. rend. LXI*, 621.
406. *On the law of density of saturated steam.* Th. Rowe Edmonds. *Phil. Mag.* XXX, 1.
407. *On the second law of Thermodynamics.* Rankine. *Phil. Mag.* XXX, 241.

Z.

Zahlentheorie.

408. *Sur la théorie des congruences suivant un module premier et suivant une fonction modulaire irréductible.* J. A. Serret. *Compt. rend. LXI*, 973.
409. *Théorème pour la résolution des congruences binômes à module premier. Application à la construction du Canon arithmeticus.* Le Besgue. *Compt. rend. LXI*, 1041.
410. *Théorème sur les sommes des diviseurs.* Hemming. *N. ann. math. XXIV*, 547.
411. *Invention of magic cubes and construction of magic squares possessing additional properties.* Frost. *Quart. Journ. math. VII*, 92.
412. Neuer Beweis eines wichtigen und merkwürdigen arithmetischen Satzes. Grunert. Grun. Archiv XLIV, 478. [Vergl. No. 313.]
413. Zwei Briefe von Schumacher und Gauss über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. Grun. Archiv XLIV, 504.

414. *Résolution en nombres entiers de l'équation* $x^2 - Ny^2 = -1$. *Richaud.* *Journ. Mathém.* XXX, 235.
415. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $A^2 + 20B^2$ *en y prenant* B *impair.* *Liouville.* *Journ. Mathém.* XXX, 281.
416. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $A^2 + 36B^2$, *en y prenant* B *impair.* *Liouville.* *Journ. Mathém.* XXX, 285.
417. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $A^2 + 44B^2$, *en y prenant* B *impair.* *Liouville.* *Journ. Mathém.* XXX, 289.
418. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $A^2 + 56B^2$, *en y prenant* B *impair.* *Liouville.* *Journ. Mathém.* XXX, 293.
419. *Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule* $A^2 + 116B^2$, *en y prenant* B *impair* *Liouville* *Journ. Mathém* XXX, 295.
420. *Étude des binômes cubiques*, $X^3 = Y^3$. *Lamé.* *Compt rend.* *LXI*, 921, 961.

Vergl. Quadratische Formen.

